

序

E.Kreyszig所著的 *Introductory functional analysis with applications* 是一本具有特色的泛函分析的入门书。在内容上，它不依赖于“实变函数”、“测度论”作为必要的基础知识，而仅以一般的高等数学和线性代数基础作为阅读此书的预备知识；在理论上保持体系的完整，论证上保证逻辑的严密的前提下，力求通俗易懂，适合自学，注意实际应用，使泛函分析这门较为抽象的学科变得易于为广大工科、数学系以外的理科学生，研究生以及广大科技工程人员所接受。

基于上述特点和国内至今还没有此类泛函书的情况，刘、徐两位同志对该书进行了编译，将原书（共十一章及三段附录）近700页篇幅的洋洋大作进行了取舍，考虑到国内的实际需要，突出了基础与重点，压缩了内容，同时保留了原著体系和特点。此外，在编译本中，还给出了许多典型的例题和适当的习题，并附以全部习题的解答，有利于自学。

本书可作为工科和某些理科（如物理，力学等）学生、研究生学习泛函分析的教材和参考书，也可作广大工程技术人员自学泛函分析的参考书。

定光桂

于南开大学

1987年6月8日

目 录

前 言	(1)
第一章 度量空间	(3)
§ 1.1 度量空间	(4)
§ 1.2 三个重要不等式及较复杂的例题	(11)
§ 1.3 开集、闭集、邻域	(19)
§ 1.4 收敛、柯西(Cauchy)序列、完备性	(27)
§ 1.5 例题 (完备性的证明)	(33)
§ 1.6 度量空间的完备化	(42)
第二章 赋范空间、巴拿赫 (Banach) 空间	(50)
§ 2.1 向量空间	(51)
§ 2.2 赋范空间、Banach 空间	(58)
§ 2.3 赋范空间的另一些性质	(65)
§ 2.4 有穷维赋范空间及其子空间	(72)
§ 2.5 紧性及有穷维数	(76)
§ 2.6 线性算子	(81)
§ 2.7 有界线性算子	(90)
§ 2.8 有界线性泛函与对偶空间	(103)
第三章 内积空间、希耳伯特 (Hilbert) 空间	(117)

§ 3.1 内积空间、Hilbert 空间	(118)
§ 3.2 直交与直交分解	(127)
§ 3.3 直交集和直交序列	(136)
§ 3.4 完全标准直交集和序列	(146)
§ 3.5 Hilbert 空间上泛函的表示	(155)
§ 3.6 Hilbert 伴随算子	(161)
§ 3.7 自伴算子、酉算子、正规算子	(166)
第四章 赋范和 Banach 空间的基本定理	(173)
§ 4.1 Zorn 引理	(174)
§ 4.2 哈恩-巴拿赫 (Hahn-Banach) 定理	(177)
§ 4.3 复向量空间和赋范空间的 Hahn-Banach 定理	(183)
§ 4.4 伴随算子	(190)
§ 4.5 自反空间	(197)
§ 4.6 范疇定理、一致有界性定理	(204)
§ 4.7 强收敛与弱收敛	(215)
§ 4.8 算子序列和泛函序列的收敛	(221)
§ 4.9 序列可和性的应用	(227)
§ 4.10 数值积分和弱*收敛	(233)
§ 4.11 开映象定理	(242)
§ 4.12 闭线性算子、闭图象定理	(248)
第五章 Banach 不动点定理、逼近理论	(255)
§ 5.1 Banach 不动点定理	(256)
§ 5.2 Banach 不动点定理的应用	(263)

§ 5.3 赋范空间中的逼近	(277)
§ 5.4 一致逼近	(285)
§ 5.5 Hilbert 空间中的逼近	(297)
§ 5.6 样条逼近	(301)
第六章 赋范空间线性算子的谱论	(307)
§ 6.1 有限维赋范空间的谱论	(307)
§ 6.2 基本概念	(312)
§ 6.3 有界线性算子谱的性质	(317)
§ 6.4 预解式与谱的其他性质	(321)
§ 6.5 Banach 代数	(327)
§ 6.6 Banach 代数的进一步性质	(331)
第七章 赋范空间上的紧线性算子及其谱	(336)
§ 7.1 赋范空间上紧线性算子	(336)
§ 7.2 紧线性算子的进一步性质	(343)
§ 7.3 赋范空间上紧线性算子谱的性质	(351)
§ 7.4 紧线性算子谱的进一步性质	(360)
§ 7.5 紧线性算子的算子方程	(368)
§ 7.6 Fredholm 型的其他定理	(375)
§ 7.7 Fredholm 择一性	(384)
附录	(393)
I: 复习与参考资料	(393)
II: 习题答案	(408)
参考书目	(544)

前 言

泛函分析是近代数学中一重要分支，起源于古典分析，它将线性代数、线性常与偏微分方程、积分方程、变分学、逼近论中具有共同特征的问题进行抽象概括，且综合了代数、拓扑和分析结构于一体。泛函分析的基本概念建立于本世纪初，成熟于50年代，其内容已渗透到逼近论、偏微分方程、概率论、最优化理论等各方面。近十几年来泛函分析在工程技术方面的应用日益广泛和有效，国内外技术科学的论文、专著常引用泛函分析的内容和方法，获取学位要通过泛函分析考试，工科院校的本科或研究生要开设泛函分析课程，因而我国迫切需要适合工科院校和科技工作者的泛函分析入门书。

本书是在工科泛函分析教学实践基础上，根据ERWIN KREYSZIG 所著“泛函分析入门及应用”一书编译的。其特点是准备知识只要求数学分析与线性代数，在保证内容系统的严谨条件下，避开实变函数论中测度、勒贝格积分等内容，所需集论与拓扑的知识在附录或有关内容中给出。在概念引入上注意其实际背景，叙述与证明上做到严谨详尽，并介绍了某些实际应用。本书附有习题及解答，对较难的题目给出较详尽的解法，对较易的给出题示。这些都有助于科技工作者和工科院校学生克服学习近代抽象数学所遇到的困难。

本书是泛函分析入门书，书中包括了泛函分析中最基本的内容：度量空间，Banach空间与Hilbert空间的性质及有关算子。谱的理论只作了简单介绍。

本书在编译过程中，得到南开大学定光桂教授的热情指导，对全书作了校订并写了序，在此深致谢意。

由于编译者水平和经验所限，不足和错误之处难免，诚恳希望读者批评指正。

编 者

1987年 3 月

第一章 度量空间

度量空间是实直线 R 的推广，其在泛函分析中的地位和作用类似于微积分中的实直线 R 。度量空间对数学各种不同分支中的问题统一处理提供了基础。

在微积分中许多结果不依赖于实数或复数的代数结构，而只与两个数 x 与 y 之间的距离概念有关。例如，我们考虑极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ，这里只用到 x 与 x_0 以及 f 与 l 之间的距离概念给出了函数极限的定义。从极限概念出发，从而引出了函数的连续性等重要理论。

本章将在一般抽象集合上定义距离（度量），并在此基础上研究极限、连续和完备等概念。

重要概念、主要内容的概述

首先定义度量空间 (§ 1.1)，它是一集合 X 在其上赋予了度量，这里的度量就是 X 的两个元素（点）间的距离函数，并由一组公理规定。这些公理是根据实直线 R 与复平面 C 上的两点间距离而抽象得到。 (§ 1.2) 例题说明度量空间是广泛存在的一般概念。研究度量空间的一个重要问题是看其是否具有完备性 (§ 1.5) 及如何使之完备化 (§ 1.6)。另一概念是度量空间是否具有可分性 (§ 1.3)，可分的度量空间比不可分的简单。

§1.1 度量空间

在微积分中研究了定义在实直线 R 上的函数及其极限，那里的极限是以 R 上的距离作基础定义的，而 R 上任意二点 x, y 的距离为： $d(x, y) = |x - y|$ 。

在泛函分析中，我们将研究更一般的“空间”和定义在其上的“函数”及相应的“极限”。因此，首先应将 R 上距离的概念推广到一般抽象集合 X 上，并使其具有 R 上距离的几个最基本的性质。这样就产生了泛函分析中重要的基本概念。

1.1-1定义（度量空间，度量）．度量空间是由一非空集合 X 与一度量 d （或称做距离函数）组成的对 (X, d) ，其中 d 是定义①在 $X \times X$ 上的一个函数，且对于任意 $x, y, z \in X$ ，有：

(M1) d 是有限的非负实数。

(M2) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ 。

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ 。（对称性）

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 。（三角不等式）。

X 的元素 x 称为点，对于固定的 $x, y \in X$ ，称非负数 $d(x, y)$ 为 x 到 y 的距离。(M1)至(M4)是度量公理。

根据(M4)，我们用数学归纳法可证得推广的三角不等式。

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

① 符号 \times 表示集合的笛卡儿乘积， $X \times X$ 表示 X 里元素的所有有序对的集合。

、 在不至于引起混淆时，可将 (X, d) 简记作 X 。

对于度量空间 (X, d) 的任何一个非空子集 Y ，当我们将 d 限制^①在 $Y \times Y$ 上，即在 $Y \times Y$ 上定义函数 $\tilde{d}(x, y)$ ，使得对于所有的 $x, y \in Y$ ，有，

$$\tilde{d}(x, y) = d(x, y)$$

或记作 $\tilde{d} = d \Big|_{Y \times Y}$ ，那么， \tilde{d} 是 Y 上的度量，称 (Y, \tilde{d}) 为 (X, d) 的子空间。 \tilde{d} 称做 d 在 Y 上的导出度量。

1.1-2 例题

【例 1】 设 X 是所有有序实数对组成的集合，定义：

$$d_1(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$$

这里， $x = (\xi_1, \xi_2)$ ， $y = (\eta_1, \eta_2)$ ，证明 d_1 是 X 上的一个度量。

证明由于 $\xi_j, \eta_j (j=1, 2)$ 都是实数， $(M1)$ 至 $(M3)$ 显然成立。现证 $(M4)$ ，对于任意 $Z = (\xi_1, \xi_2) \in X$ ，有，

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2| \\ &= |(\xi_1 - \xi_1) + (\xi_1 - \eta_1)| + |(\xi_2 - \xi_2) + (\xi_2 - \eta_2)| \\ &\leq |\xi_1 - \xi_1| + |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \xi_2| + |\xi_2 - \eta_2| \\ &= (|\xi_1 - \xi_1| + |\xi_2 - \xi_2|) + (|\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|) \\ &= d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

① 参阅附录1中关于“限制”概念的论述。

因此, d_1 是 X 上的一度量.

【例 2】欧几里得 (Euclidean) 空间 R^n . 这个空间是由所有 n 个实数的有序组 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ 等组成的集合, 并按

$$d(x, y) = \left[\sum_{j=1}^n (\xi_j - \eta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

定义欧几里得度量, 则 R^n 是度量空间.

证明 (M1) 及 (M3) 显然成立. 若, $d(x, y) = 0$, 那么, 对于每个 j , 有

$$0 \leq |\xi_j - \eta_j| \leq \left[\sum_{j=1}^n (\xi_j - \eta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

所以, $\xi_j = \eta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 即, $x = y$. 反过来, 易见当 $x = y$ 时, $d(x, y) = 0$. (M2) 得证.

在证明 (M4) 之前, 先证柯西 (Cauchy) 不等式,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

这里 a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 均为实数. 任取实数 λ , 有,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^n a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

右端是 λ 的二次三项式, 它对于 λ 的一切值都是非负的, 故其判别式不会大于零, 即,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

成立. 利用柯西不等式, 得,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\
&= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (3)
\end{aligned}$$

在 R^n 中任取 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 并在 (3) 中, 令 $a_k = \xi_k - \zeta_k$, $b_k = \zeta_k - \eta_k$. 则有,

$$\left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - \zeta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^n (\zeta_k - \eta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

即, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(M4) 得证. 因此, R^n 是度量空间.

$n=1$ 时, $R^1 = R$, $d(x, y) = |x - y|$. $n=2$ 时, R^2 上的度量为 $d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$, 对照例 1, 它们的集合是相同的, 但度量不同, 因此, R^2 与例 1 中的 (X, d_1) 是不同的度量空间. 这说明一个重要事实, 在同一集合上可赋予不同的度量, 构成不同的度量空间.

又如, 在全体 n 个实数有序组所成之集上, 还可以赋予如下两个度量,

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i - \eta_i|$$

可得到两个不同的度量空间.

如果在 R^n 中, 每个点 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 的坐标是复数, 度量按

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

定义, 那么, 用类似的方法可证得此空间按度量(4)为一度量空间, 称做酉空间(或称为 n 维复欧几里得空间), 记作 C^n .

【例3】有界数列空间 l^∞ . 取所有有界复数列作为元素组成集合 X , 即对于 X 里的每个元素 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, 简记作 $x = (\xi_j)$, 都存在一个实数 C_x , 使得,

$$|\xi_j| \leq C_x \quad (j = 1, 2, \dots)$$

按

$$(5) \quad d(x, y) = \sup_{j \in N} |\xi_j - \eta_j|$$

定义度量, 其中, $y = (\eta_j) \in X, N = \{1, 2, \dots\}$, \sup 表示上确界(最小的上界^①), 令 $l^\infty = (X, d)$ 则 l^∞ 是度量空间.

证明 由于 $x = (\xi_j), y = (\eta_j)$ 都是有界的复数列, 所以, $|\xi_j - \eta_j| (j = 1, 2, \dots)$ 是有界的, 并存在上确界. 即,

$$d(x, y) = \sup_{j \in N} |\xi_j - \eta_j| \text{ 是有限的非负实数.}$$

由 $x = y$ 推出 $d(x, y) = 0$ 是显然的. 反过来, 若,

$$d(x, y) = \sup_{j \in N} |\xi_j - \eta_j| = 0, \text{ 那么, 对于每个 } j \text{ 有,}$$

$$0 \leq |\xi_j - \eta_j| \leq \sup_{j \in N} |\xi_j - \eta_j| = 0$$

因此, $\xi_j = \eta_j (j = 1, 2, \dots)$. $x = y$. 即(M2)得证.

① 参阅附录1中关于上确界的论述.

(M3)显然成立. 下面证(M4), 对任意 $z = (\zeta_j) \in X$, 有,

$$\begin{aligned} |\xi_j - \eta_j| &= |(\xi_j - \zeta_j) + (\zeta_j - \eta_j)| \\ &\leq |\xi_j - \zeta_j| + |\zeta_j - \eta_j| \\ &\leq \sup_{j \in N} |\xi_j - \zeta_j| + \sup_{j \in N} |\zeta_j - \eta_j| \\ &\quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

因为上确界是一切上界中的最小者, 所以,

$$\sup_{j \in N} |\xi_j - \eta_j| \leq \sup_{j \in N} |\xi_j - \zeta_j| + \sup_{j \in N} |\zeta_j - \eta_j|$$

即 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

从而证得 l^∞ 是度量空间.

【例4】连续函数空间 $C[a, b]$. 设 $J = [a, b]$ 上所有实值连续函数 $x(t)$ 所成之集为 X , 对于任意 $x(t), y(t) \in X$, 定义其度量为

$$(5) \quad d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

记 $C[a, b] = (X, d)$, 则 $C[a, b]$ 是一度量空间.

证明 (M1)与(M3)显然成立. 由 $x = y$ 立即可得 $d(x, y) = 0$. 若 $d(x, y) = 0$, 那么, 对于每个 $t \in [a, b]$, 有

$$0 \leq |x(t) - y(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t) - y(t)| = 0$$

于是, $x = y$. 故(M2)成立. 下面证(M4), 由于在闭区间上连续函数可取到最大值, 因此, 存在 $t_0 \in [a, b]$, 使得

$$\begin{aligned} \max_{t \in J} |x(t) - y(t)| &= |x(t_0) - y(t_0)| \\ &\leq |x(t_0) - z(t_0)| + |z(t_0) - y(t_0)| \\ &\leq \max_{t \in J} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in J} |z(t) - y(t)| \end{aligned}$$

即, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

因此, $C[a, b]$ 为一度量空间.

在例 4 的集合 X 上, 还可赋予度量

$$\tilde{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

得到另一度量空间 (X, \tilde{d}) (证明留作习题)

【例 5】离散度量空间. 对于任何非空集合 X , 定义度量如下, $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

易证 d 满足度量公理 (M1) 至 (M4). 因此, (X, d) 是度量空间.

此例说明任一非空集合都可以在其上赋予度量使之成为度量空间.

习 题 1.1

1. 证明实直线是一度量空间.
2. $d(x, y) = (x - y)^2$ 是所有实数组成的集合上的度量吗?
3. 试证 $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ 是定义在全体实数所组成之集上的度量.
4. 求出由两个点组成之集 X 上的所有度量, 再求出由一个点组成的集上的所有度量.
5. 设 d 是 X 上的一个度量, 分别确定满足下列条件的所有常数 k
 - (i) 使得 kd 是 X 上的度量.
 - (ii) 使得 $d + k$ 是 X 上的一度量.
6. 若 A 是由其项值取 0 和 1 的序列组成的 l^∞ 的子空间, 那么, A 上

的导出度量是什么?

7. 证明由 $\tilde{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$ 定义的度量是例4

中集合 X 上的另一度量.

8. 证明例5中的 d 是一度量.

9. (Hamming距离) 设 X 是0和1的所有三元有序数组的集合, 证明 X 由8个元素组成. 且 $d(x, y) =$ “ x 与 y 中项值不同的位置的个数”是 X 上一度量. (此空间和类似的 n 个数组空间在开关和自动控制理论以及编码中起着一定的作用. $d(x, y)$ 通常称做 x 与 y 间的 Hamming 距离.)

10. 证明推广的三角不等式(1).

11. 利用习题10证明.

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w).$$

12. 利用三角不等式证明.

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

13. (M1) 至 (M4) 可用另外的公理代替. 例如, 用 (M2) 及不等式

$$d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$$

可推出 (M3) 及 (M4).

14. 用 (M2) 至 (M4) 证明度量的非负性

§1.2 三个重要不等式及较复杂的例题

本节要证明的三个不等式, 在理论研究和实际问题中是不可缺少的工具. 在本节例题中和以后各章里要多次用到它们.

1.2-1 荷尔德 (Hölder) 不等式. 设 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q < +\infty$, 那么,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q \right)^{1/q} \quad (1)$$

证明 令 $u = t^{p-1}$ 则 $t = u^{q-1}$, 对于任意正数 α, β , 有 (参阅图 1)

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} t^{p-1} dt + \int_0^{\beta} u^{q-1} du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad (2)$$

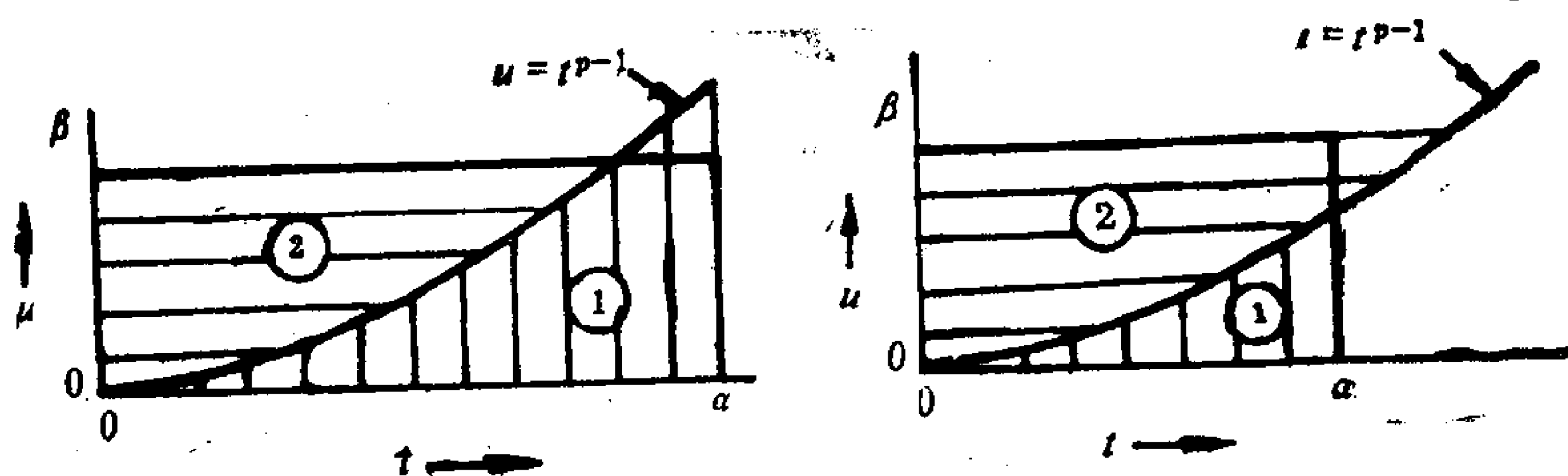


图 1 不等式(2)之图示。其中①对应(2)中第一个积分②对应第二个积分

如果 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$, (2) 式显然成立, 设 $(\tilde{\xi}_i)$ 与 $(\tilde{\eta}_i)$ 满足

$$\sum |\tilde{\xi}_i|^p = 1, \quad \sum |\tilde{\eta}_i|^q = 1 \quad (3)$$

令, $\alpha = |\tilde{\xi}_i|, \beta = |\tilde{\eta}_i|$ 代入(2), 得,

$$|\tilde{\xi}_i \tilde{\eta}_i| \leq \frac{1}{p} |\tilde{\xi}_i|^p + \frac{1}{q} |\tilde{\eta}_i|^q$$

对 i 求和并利用(3)式, 有

$$\sum |\tilde{\xi}_i \tilde{\eta}_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (4)$$

今取任何非零的 $x = (\xi_i)$ 与 $y = (\eta_i)$ 满足,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q < +\infty \quad \text{且令}$$

$$\tilde{\xi}_i = \frac{\xi_i}{(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}} \quad \tilde{\eta}_i = \frac{\eta_i}{(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q)^{1/q}} \quad (5)$$

则它们满足(3), 将(5)代入(4)得Hölder不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q \right)^{1/q}$$

当 $p = q = 2$ 时, (1)成为

1.2-2 柯西-许瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

1.2-3 闵可夫斯基(Minkowski)不等式

设 $p \geq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p < +\infty$, 那么, 有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (7)$$

证明 对于 $p = 1$, (7)显然成立. 设 $p > 1$,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 令 $\omega_i = \xi_i + \eta_i$, 则,

$$\begin{aligned} |\omega_i|^p &= |\xi_i + \eta_i| |\omega_i|^{p-1} \\ &\leq |\xi_i| |\omega_i|^{p-1} + |\eta_i| |\omega_i|^{p-1} \end{aligned} \quad (8)$$

对 i 从 1 至 n 求和, 并利用 $p = q(p-1)$ 及Hölder不等式(1),

得,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |\omega_j|^p &\leq \sum_{j=1}^n |\xi_j| |\omega_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |\eta_j| |\omega_j|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &= \left[\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^p \right)^{1/p} \right] \\ &\quad \left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^p \right)^{1/q}\end{aligned}$$

因此, 有

$$\left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^p \right)^{1/p} \quad (9)$$

因为 $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p$ 及 $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p$ 收敛, 所以, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, (9) 式左端级数也收敛, 从而得出Minkowski不等式,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p \right)^{1/p}\end{aligned}$$

为了阐明度量空间的概念. 掌握验证度量公理的方法, 特别是要利用一些技巧验证三角不等式 (M4), 我们再给出三个重要的范例.

1.2-4 空间 l^p ($p \geq 1$). l^p 是所有 p 方可和的数列所成之集. 即, 每个 $x = (\xi_j) \in l^p$, 均满足,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$$

对于任意 $x = (\xi_j) \in l^p$, $y = (\eta_j) \in l^p$, 其度量定义为,

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \quad (10)$$

试证 l^p 是度量空间.

证明 易证 (M2) 及 (M3) 成立. 对于 l^p 中的任意元素 $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$, $z = (\zeta_j)$, 利用 Minkowski 不等式, 得

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p \right)^{1/p} < +\infty \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} |(\xi_j - \zeta_j) + (\zeta_j - \eta_j)|^p \right]^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \zeta_j|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

故证明了 (M1) 及 (M4) 成立.

1.2-5 序列空间 S . S 是所有复数列 (有界或无界) 组成的集, 其度量定义成

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} \quad (11)$$

其中, $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$. 验证 S 是度量空间

证明 由 (11) 定义的 $d(x, y)$ 显然满足 (M1)、(M2)、(M3). 下面验证 (M4), 为此, 引进函数

$$f(t) = \frac{t}{1+t}$$

由于 $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, $f(t)$ 是单调增加的. 又,

$|a+b| \leq |a| + |b|$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \end{aligned} \quad (12)$$

令 $z = (\xi_j)$, 并在(12)中, 置 $a = \xi_j - \xi_j$, $b = \xi_j - \eta_j$, 则有

$$\frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|} \leq \frac{|\xi_j - \xi_j|}{1+|\xi_j - \xi_j|} + \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|}$$

两边同乘以 $1/2^j$ 后, 对 j 从 1 至 ∞ 取和, 得,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

这就验证了 (M4) 成立, 同时证得 S 是度量空间

1.2-6 有界函数空间 $B(A)$. 定义在集 A 上的有界函数全体所成之集 $B(A)$, 按

$$d(x, y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| \quad (13)$$

定义度量. 试证 $B(A)$ 是度量空间.

证明 显然, 由(13)定义的 d 满足 (M1)、(M3). 今证 d 满足 (M2), 由 $x = y$ 推出 $d(x, y) = 0$ 是显而易见的. 反之,

如果 $d(x, y) = 0$, 那么, 对于每个 $t \in A$, 有,

$$0 \leq |x(t) - y(t)| \leq \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| = 0$$

于是, $x = y$. (M2)得证.

下面验证(M4), 对于每个 $t \in A$, $x, y, z \in B(A)$.

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |[x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]| \\ &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \sup_{t \in A} |x(t) - z(t)| \\ &\quad + \sup_{t \in A} |z(t) - y(t)| \end{aligned}$$

不等式右端是与 t 无关的数, 根据上确界是上界中之最小者, 从而

$$\begin{aligned} \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| &\leq \sup_{t \in A} |x(t) - z(t)| \\ &\quad + \sup_{t \in A} |z(t) - y(t)| \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

因此, $B(A)$ 是度量空间.

习 题 1.2

1. 在1.2-5的(11)中, 利用使 $\sum \mu_j$ 收敛的 $\mu_j > 0$ 代替 $1/2^j$, 试证可以得到另外的度量.

2. 利用(2)证明二正数的几何平均值不超过其算术平均值.

3. 证明由Cauchy-Schwarz不等式可推出

$$(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|)^2 \leq n(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)$$

4. 找一收敛于零的序列, 但不属于任何 l^p ($1 \leq p < +\infty$).

5. 找一序列 $x = (\xi_j)$, $x \in l^p$ ($p > 1$), 但, $x \notin l^1$.

6. (直径, 有界集) 在度量空间 (X, d) 中, 一个非空集 A 的直径 $\delta(A)$ 定义为, $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$

如果 $\delta(A) < \infty$, 称 A 是有界的. 试证若 $A \subset B$, 则, $\delta(A) \leq \delta(B)$.

7. 试证 $\delta(A) = 0$ (参考习题 6) 的充要条件是 A 为单点集.

8. (两集合间的距离) 度量空间 (X, d) 的两个非空子集 A 与 B 间的距离 $D(A, B)$ 定义为,

$$D(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)$$

试证 D 不是 X 的幂集上的度量.

9. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 试证习题 8 中的 $D(A, B) = 0$, 其逆成立吗?

10. 点 x 到 (X, d) 的非空子集 B 的距离 $D(x, B)$ 定义为,

$$D(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b)$$

试证对任何 $x, y \in X$, 有

$$|D(x, B) - D(y, B)| \leq d(x, y)$$

11. 设 (X, d) 是任何一度量空间, 证明,

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

是 X 上的另一度量, 并证明 X 按度量 \tilde{d} 是有界的.

12. 试证在一度量空间中, 两个有界集 A 与 B 的并集是有界的 (定义见习题 6)

13. (度量空间的积) 两个度量空间 (X_1, d_1) 与 (X_2, d_2) 的笛卡儿乘积 $X = X_1 \times X_2$, 可用多种方法构成度量空间, 试证,

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

是一度量, 这里, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

14. 证明由

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

定义的 \tilde{d} 是习题 13 中 X 上的另一个度量,

15. 证明按

$$\approx d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_1(x_2, y_2)\}$$

\approx
的 d 是习题13中 X 上的第三个度量.

§1.3 开集、闭集、邻域

为了研究度量空间中极限、连续映射等概念,有必要研究度量空间中一些重要点集,其名称我们沿用读者熟知的欧几里得几何中的术语.

与三维欧几里得空间类似,我们在一般的度量空间中引进开球、闭球、球面的概念.

1.3-1 定义(球与球面). 设 (X, d) 是一度量空间, $x_0 \in X$, 实数 $r > 0$. 称点集

$$B(x_0; r) = \{x \mid x \in X \text{ 且 } d(x, x_0) < r\}$$

为以 x_0 为中心, r 为半径的开球. 称点集

$$\tilde{B}(x_0; r) = \{x \mid x \in X \text{ 且 } d(x, x_0) \leq r\}$$

为以 x_0 为中心, r 为半径的闭球. 称点集

$$S(x_0; r) = \{x \mid x \in X \text{ 且 } d(x, x_0) = r\}$$

为以 x_0 为中心, r 为半径的球面.

由定义可得, $S(x_0; r) = \tilde{B}(x_0; r) - B(x_0; r)$

值得注意的是在一般的度量空间中, 球和球面可能不再具有三维欧几里得空间中“球”的形状. 例如, 在离散度量

空间 (X, d) 中, 球面 $S(x_0; \frac{1}{2})$ 是空集 \emptyset . 而开球 $B(x_0; \frac{1}{2})$

与闭球 $\tilde{B}(x_0; \frac{1}{2})$ 为单点集 $\{x_0\}$.

在度量空间 (X, d) 中, 集 $M \subset X$ 是有界的当且仅当存在 $x_0 \in X$ 与一个正数 r , 使得 $M \subset B(x_0; r)$ (证明留给读者, 参看习题1.2中第6题)

开球 $B(x_0; \varepsilon)$ 也称做点 x_0 的 ε -邻域. 如果 $N (\subset X)$ 包含 x_0 的某个 ε -邻域, 则称做 x_0 的邻域. 因此, 若 N 是 x_0 的邻域, 且 $N \subset M$, 那么, M 也是 x_0 的邻域.

下面我们引进点集中相关的两个重要概念

1.3-2 定义 (开集、闭集). 设 G 是度量空间 X 的子集, 如果 G 是 G 中每一点的邻域, 则称 G 是 X 中的开集. 若 X 的子集 F , 其在 X 中的余集是开集, 即 $F^c = X - F$ 是 X 中的开集, 则称 F 是 X 中的闭集.

如果度量空间 X 中的集 A 是点 x_0 的邻域, 则称 x_0 是 A 的内点. A 的内点全体所成之集称做 A 的内部, 记作 A° 或 $\text{Int}(A)$. $\text{Int}(A)$ 是开的且是 A 中最大的开集.

X 的所有开子集组成的集族 J 具有如下性质.

1.3-3 定理 设 J 是度量空间 X 的开子集全体所成之集族. 那么,

(T1) $\emptyset \in J, X \in J$.

(T2) J 中任意多个元素的并集是 J 中的元素.

(T3) J 的有限个元素之交集是 J 的元素.

证明 (T1) 因为空集 \emptyset 不含任何点, 所以不含非内点的点, 这就证得 $\emptyset \in J$. 显然, X 是 X 中每一点的邻域, 故, $X \in J$.

(T2) 设 $G_\lambda (\lambda \in I)$ 是 X 中任意一族开集, 令 $G = \bigcup_{\lambda \in I} G_\lambda$.

对于任意 $x \in G$, 则有 $\lambda_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\lambda_0}$, 因为 G_{λ_0} 是 X

中的开集, 所以, 必存在 $B(x; \varepsilon) \subset G_{\lambda_0} \subset G$, 即, x 是 G 的内点, G 是 x 的邻域. 由于 x 的任意性, (T2) 得证.

(T3) 设 G_1, \dots, G_n 是 X 中有限个开集, 任取 $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$. 那么, $x \in G_k (k=1, 2, \dots, n)$, 由于 G_k 是开集, 所以, 存在 $B(x; \varepsilon_k) \subset G_k (k=1, 2, \dots, n)$ 取 $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} \{\varepsilon_k\}$, 则 $\varepsilon > 0$, 且 $B(x; \varepsilon) \subset G_k, (k=1, 2, \dots, n)$, 因此, $B(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$, 这说明 $\bigcap_{k=1}^n G_k$ 是 x 的邻域, 从而证得 $\bigcap_{k=1}^n G_k \in T$.

定理1.3-3中的性质是最基本的, 我们要在更一般的情况下考虑任一集 X 的子集构成的集族 T , 若 T 满足公理 (T1) 至 (T3), 则称 T 是 X 上的一个拓扑. 对于给定拓扑 T 的集合 X 称做拓扑空间, 记为 (X, T) .

现在我们再引入两个概念, 它们是相互关联的. 设 A 是度量空间 X 的子集, $x_0 \in X$ (可以是或不是 A 的点), 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 球 $B(x_0; \varepsilon)$ 里均含有 A 中异于 x_0 的点, 则称 x_0 是 A 的聚点. 由 A 的聚点全体与 A 所成之并集称为 A 的闭包, 记作 \overline{A} .

值得注意的是, 在 R^3 中开球 $B(x_0; r)$ 的闭包 $\overline{B(x_0; r)}$ 就是闭球 $\widehat{B}(x_0; r)$. 但在一般度量空间中这一性质不一定成立.

关于点集的闭包有下列性质.

1.3-4 定理. 设 A 是度量空间 X 的子集, 则.

(a). A 的闭包 \overline{A} 是闭集.

(b). \overline{A} 是包含 A 的最小闭集.

(c). A 为闭集的充要条件是 $A = \overline{A}$

证明:

(a). 记 A 的聚点全体为 D , 那么, $\overline{A} = A \cup D$. 为了证明 \overline{A} 是闭集, 只须证 \overline{A}^c 是开集. 任取 $x \in \overline{A}^c$, 则 $x \notin D, x \notin A$. 必存在 $B(x; \varepsilon)$ 不含 A 的点, 且 $B(x; \varepsilon)$ 中的每个点都不是 A 的聚点, 即 $B(x; \varepsilon) \subset A^c$ 与 $B(x; \varepsilon) \subset D^c$ 因此, $B(x; \varepsilon) \subset \overline{A}^c$. 故 \overline{A}^c 是开集同时也就证明了 \overline{A} 是闭集.

(b) 设 F 是包含 A 的任意闭集, 要证 \overline{A} 是包含 A 的最小闭集, 只须证 $\overline{A} \subset F$. 首先我们用反证法证明 F 的聚点均是 F 的点. 若有 F 的聚点 x_0 不属于 F , 则 $x_0 \in F^c$, 因为 F^c 是开集, 必存在 $B(x_0; \varepsilon) \subset F^c$, 于是 $B(x_0; \varepsilon)$ 不含 F 中的点, 这与 x_0 是 F 的聚点矛盾, 因此, F 的聚点均在 F 中. 由于 $A \subset F$, 根据聚点的定义知, A 的聚点均是 F 的聚点, 从而 A 的聚点都在 F 中, $\overline{A} \subset F$. 由 (a) 知 \overline{A} 是闭集, 即证得 \overline{A} 是包含 A 的最小闭集.

(c) 必要性. 若 A 是闭集, 则由 (b), \overline{A} 是包含 A 的最小闭集, 因此, $\overline{A} \subset A$. 故 $A = \overline{A}$.

充分性, 若 $A = \overline{A}$, 由 (a) 知 \overline{A} 是闭集. 所以 A 是闭集.

下面我们将微积分中连续函数的概念推广到一般度量空间上.

1.3-5 定义 (连续映射) 设 (X, d) 与 (Y, \tilde{d}) 是两个度量空间. 称映射 $T: X \rightarrow Y$ 在点 $x_0 \in X$ 连续, 是指对于任意

$\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得满足 $d(x, x_0) < \delta$ 的所有 x , $\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ 恒成立, 如果 T 关于 X 的每个点 x 都是连续的, 则称 T 是连续映射 (参看图 2)

连续映射可用开集的术语描述如下:

1.3-6 定理 (连续映射) 度量空间 X 到度量空间 Y 中的映射 T 是连续的, 当且仅当 Y 的任何开子集的原象是 X 的开子集.

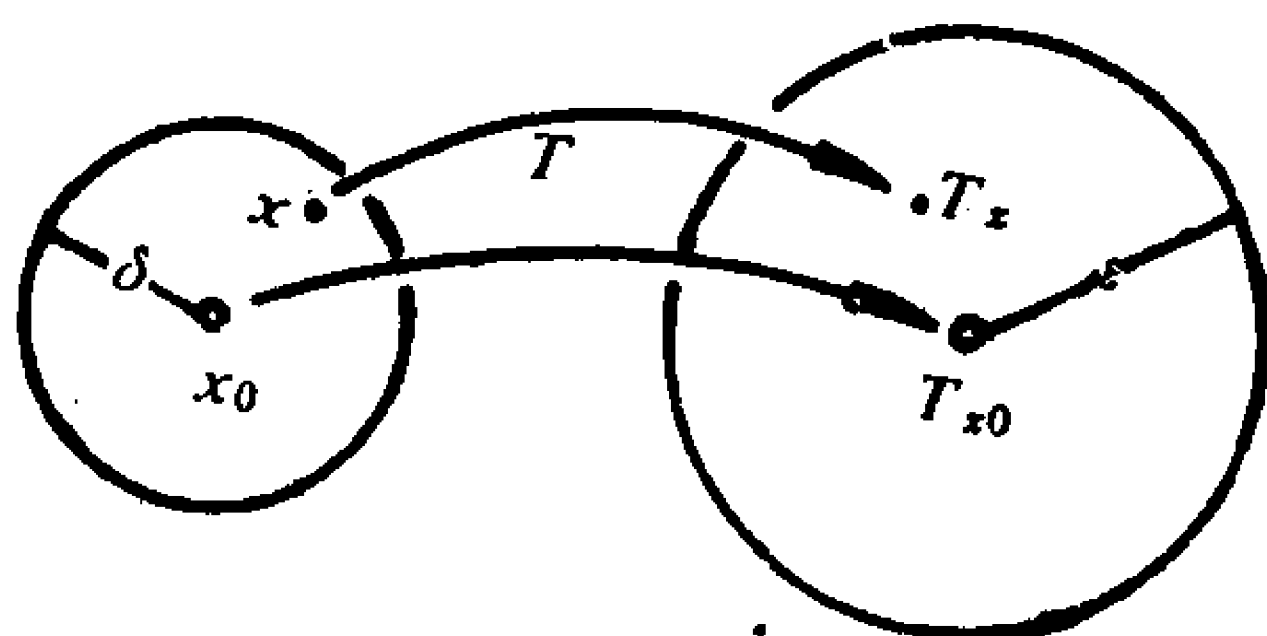


图 2 1.3-5 定义中的不等式在 $X = R^2$ 与 $Y = R^2$ 的情况下的图示

证明. 必要性. 假设 T 是连续的, 设 $G \subset Y$ 是任一开集且 G_0 是 G 的原象. 若 $G_0 = \emptyset$, 则 G_0 是开集. 若 $G_0 \neq \emptyset$, 对于任意 $x_0 \in G_0$, 存在 $y_0 = Tx_0 \in G$, 由于 G 是开集, 必有开球 $B(y_0; \varepsilon) \subset G$, 因为 T 是连续的, 则有 x_0 的一个 δ -邻域 $B(x_0; \delta)$ 映射到 $B(Tx_0; \varepsilon)$ 中, 而 $B(Tx_0; \varepsilon) \subset G$, 所以, $B(x_0; \delta) \subset G_0$, 故 G_0 是开集.

充分性. 假定 Y 中的每个开集的原象是 X 中的开集. 则对于每个 $x_0 \in X$, Tx_0 的任意 ε -邻域 $B(Tx_0; \varepsilon) = G$ 均是开集, 于是由假设 G 的原象 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集, 且 $x_0 \in T^{-1}(G)$, 因此必有 x_0 的一个 δ -邻域 $B(x_0; \delta) \subset T^{-1}(G)$, 即 $B(x_0; \delta)$ 映射到 $B(Tx_0; \varepsilon)$ 中, 根据定义 T 在 x_0 点连续, 由于 $x_0 \in X$ 是任意的, 从而证得 T 是连续的.

下面我们利用闭包引进稠密集和可分空间的概念

1.3-7 定义 (稠密集、可分空间) 设 M 是度量空间 X 的

子集, 如果

$$\overline{M} = X$$

则称 M 在 X 中稠密. 若 X 存在一可数^①子集且在 X 中稠密, 则称 X 是可分的.

由定义得知, 如果 M 在 X 中稠密, 那么, X 里的每个球 不论半径怎样小, 都含有 M 中的点.

下面我们给出可分空间与不可分空间的例题.

【例1】 实直线 R 是可分的.

证明 因为有理数全体所成之集 Q 是可数的, 且 在 R 中稠密.

【例2】 复平面 C 是可分的.

证明 因为实部和虚部都是有理数的复数所成之集是 C 中可数的稠密子集.

【例3】 空间 l^p ($1 \leq p < \infty$) 是可分的.

证明 这里 l^p 是实的, 设 M 是形如

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, 0, \dots)$$

的所有实数列所成之集, 其中 n 是任意正整数, η_j 是有理数, 则 M 是可数的. 下面证 M 在 l^p 中稠密. 任意 $x = (\xi_j) \in l^p$,

有, $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$. 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 n , 使得,

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

由于有理数在 R 里稠密, 对于每个 ξ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 存在有理

① 可数子集概念请参看附录 I 中 A1.1.

数 η_i , 使, $|\xi_i - \eta_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n}$, 于是,

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

令 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n, 0, 0, \dots)$ 则, $y \in M$, 且

$$[d(x, y)]^p = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p$$

因此, $d(x, y) < \varepsilon$, 从而证得 M 在 l^p 中稠密.

不是所有的度量空间都是可分的.

【例4】空间 l^∞ 是不可分的.

证明 设 l^∞ 中其项值 $\eta_i = 0$ 或 1 的序列 $y = (\eta_i)$ 所成的集为 Z , 则 $Z \subset l^\infty$, 每一 $y = (\eta_i) \in Z$ 都对应一个实数 \hat{y} , 其二进制表示式为

$$\frac{\eta_1}{2^1} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta_3}{2^3} + \dots$$

而每个 $\hat{y} \in (0, 1)$, 都有形如(*)的二进制表示式, 且不同的 \hat{y} 有不同的二进制表示式. 由 $(0, 1)$ 上的实数是不可数的, 所以, Z 也不可数.

Z 中任何两个不同点间的距离均等于 1 , 以每个 $y \in Z$ 为中心, 以 $1/3$ 为半径作小球, 这些小球互不相交, 且有不可数个. 若 M 是 l^∞ 中任意稠密集, 那么, 这些不相交球的每一个必含有 M 的一个元素, 因此, M 是不可数的, 即 l^∞ 的任意稠密子集均不可数. 从而 l^∞ 不可分.

习 题 1.3

1. 证明度量空间中 (a) 任意开球是开集; (b) 任意闭球是闭集.
2. 分别指出 R 上, C 中开球 $B(x_0; 1)$ 都是什么? $C[-1, 1]$ 中 $x_0 = t^2$ 的开球 $B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$ 是什么?
3. 考虑 $C[0, 2\pi]$ 上的元素 $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$ 试确定最小的实数 r , 使得 $y \in B(x; r)$.
4. 试证任意非空集 $A \subset (X, d)$ 是开的当且仅当其为开球的并.
5. 证明在离散度量空间 X 里, 每个子集既开又闭.
6. 如果 x_0 是集 $A \subset (X, d)$ 的聚点, 试证 x_0 的任何邻域中都包含 A 的无穷个点.
7. 写出下列每个子集的闭包. (a) R 上全体整数组成的集; (b) R 上有理数全体所成之集; (c) C 中具有有理实部与虚部的复数组成的集; (d) 圆盘: $\{Z \mid |Z| < 1\} \subset C$.
8. 举例说明在度量空间中, 开球 $B(x_0; r)$ 的闭包 $\overline{B(x_0; r)}$ 可能不同于闭球 $\widetilde{B}(x_0; r)$.
9. 证明 $A \subset \overline{A}, \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
10. 不属于闭集 $M \subset (X, d)$ 的点 x 到 M 总有非零距离. (只须证 $x \in \overline{A}$ 当且仅当 $D(x, A) = 0$, 这里 A 是 X 的任意非空子集.)
11. 集 $A \subset (X, d)$ 的边界点 x 是 X 的一个点 (属于 A 或不属于 A) 且 x 的每个邻域包含 A 的点同时也包含不属于 A 的点. A 的所有边界点所成之集称做 A 的边界. 写出下列诸集的边界: (a) R 上区间 $(-1, 1), [-1, 1), [-1, 1]$; (b) R 上所有有理数组成的集; (c) 圆盘: $\{Z \mid |Z| < 1\} \subset C$ 及

$\{Z \mid |Z| \leq 1\} \subset C.$

12. $B[a, b]$ (参见 §1.2 中的 1.2-6) ($a < b$) 是不可分的.

13. 证明度量空间 X 是可分的当且仅当 X 存在一个可数子集 Y 具有如下性质. 对于每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $x \in X$, 存在一个 $y \in Y$, 使得 $d(x, y) < \varepsilon$.

14. 试证映射 $T: X \rightarrow Y$ 是连续的当且仅当任意闭集 $M \subset Y$ 的原象是 X 中的闭集.

15. 证明在连续映射下, 开集的象不一定是开集.

§1.4 收敛、柯西 (Cauchy) 序列、完备性

我们知道, 在微积分中利用 R 上的度量定义了数列的收敛. 类似地, 在度量空间 (X, d) 中利用度量 d 来定义序列的收敛.

1.4-1 定义 (序列收敛, 极限). 设 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的序列, 若存在 $x \in X$, 使得,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

则称 (x_n) 收敛. 且 x 称做 (x_n) 的极限. 记为, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 或 $x_n \rightarrow x$. 若 (x_n) 不收敛, 就称其发散.

从定义可看出, 正是利用了度量 d 才产生出实数列 $a_n = d(x_n, x)$, 并由 $\{a_n\}$ 收敛到零定义了 (x_n) 的收敛.

值得注意的是, 收敛序列的极限 x 必为空间 X 内一点.

例如, $X = (0, 1)$, $x_n = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin (0, 1)$, 那么, 序列 $\left(\frac{1}{n}\right)$ 在

$(0, 1)$ 里不收敛.

在微积分中, 收敛序列是有界的, 并且极限是唯一的. 收敛序列的这两个熟知的性质可推广到一般的度量空间上来.

1.4-2 引理 (有界性, 唯一性). 设 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的收敛序列, 则 (x_n) 是有界的, 且极限是唯一的.

证明 假定 $x_n \rightarrow x_0 \in X$, 取 $\varepsilon = 1$, 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x_0) < 1$, 令, $a = \max \{d(x_1, x_0) \dots, d(x_N, x_0)\}$, 那么, 对一切 n , 有, $d(x_n, x_0) < 1 + a$. 即 (x_n) 有界.

若 x, y 都是 (x_n) 的极限, 则,

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $d(x, x_n) \rightarrow 0$, $d(x_n, y) \rightarrow 0$, 因此 $d(x, y) = 0$. 即 $x = y$.

1.4-3 引理. 如果 $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, 那么,

$$d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y).$$

证明 利用 § 1.1 中的公式 (1) 立即得到,

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

将上述不等式中的 x_n 与 x , y_n 与 y 对换, 得,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

将这两个不等式合起来, 有,

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$

在微积分中, 数列 (x_n) 收敛的充分必要条件是 (x_n) 满足 Cauchy 准则. 现试将这一概念移植于度量空间. 但有的度量空间满足 Cauchy 准则的序列可能不收敛. 这是因为这样的空间不具有完备性. 度量空间的完备性在很多方面起着重要作用, 例如, 方程解的存在、唯一性, 近似解的收敛性及算子理论等方面. 这也正是微积分为什么不建在有理直线上而建立在 R 上的理由.

1.4-4 定义 (Cauchy序列, 完备性). 设 (X, d) 是度量空间, (x_n) 是 X 中的序列. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) > 0$, 当 $m, n > N$ 时, 有,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (1)$$

则称 (x_n) 为Cauchy序列 (或基本序列). 如果 X 中的每个Cauchy序列均收敛于 X 里的点, 则称 X 是完备的.

1.4-5 定理 (实直线、复平面). 实直线 R 和复平面 C 是完备的度量空间.

但去掉实直线 R 上的一个点 a , 得到不完备的空间 $R - \{a\}$. 更进一步, 当去掉实直线 R 上所有无理数得有理数集 Q , 这是个不完备的度量空间.

在一般的度量空间中, 条件(1) 不总是收敛的充分条件, 因为空间可能是非完备的. 尽管如此, 条件(1) 仍然是序列收敛的必要条件.

1.4-6 定理 (收敛序列). 度量空间 X 中, 每个收敛序列必为Cauchy序列.

证明 若 $x_n \rightarrow x$. 那么, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) > 0$, 对于一切 $n > N$, 使得,

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$$

故证得 (x_n) 是Cauchy序列.

下面再给出三个经常用到的且与收敛性、完备性有关的定理.

1.4-7 定理 (闭包, 闭集). 设 M 是度量空间 (X, d)

的非空子集, \bar{M} 是 M 的闭包. 那么,

(a) $x \in \bar{M}$ 当且仅当 M 中存在序列 (x_n) , 使得 $x_n \rightarrow x$.

(b) M 为闭的充要条件是: 若 $x_n \in M$, $x_n \rightarrow x$, 则 $x \in M$.

证明 (a) 设 $x \in \bar{M}$. 若 $x \in M$, (x, x, \dots) 就是所要求的序列. 若 $x \notin M$, 它就是 M 聚点, 因此, 每个球 $B(x; 1/n)$

$(n = 1, 2, \dots)$ 包含一个 $x_n \in M$. 由 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 知 $x_n \rightarrow x$.

反之, 如果 $(x_n) \subset M$ 且 $x_n \rightarrow x$, 则 $x \in M$ 或 x 的每个邻域 $B(x; \varepsilon)$ 包含点 $x_n \neq x$, 后一种情况说明 x 是 M 的一个聚点. 由闭包的定义知, $x \in \bar{M}$.

(b) 利用定理 1.3-4 之 (c), M 是闭集当且仅当 $M = \bar{M}$, 再由本定理的 (a) 部分立即证得 (b).

1.4-8 定理 (完备子空间). 完备度量空间 X 的子空间 M 为完备的, 当且仅当 M 在 X 中是闭的.

证明 设 M 是完备的. 设 $x_n \in M$, $x_n \rightarrow x$. 由定理 1.4-6, (x_n) 是 M 中的一个 Cauchy 序列, 因为 M 是完备的, 则 $x \in M$. 根据定理 1.4-7 (b) 于是证得 M 是闭的.

反之, 设 M 是 X 中闭集, 且 (x_n) 是 M 中任意 Cauchy 序列, 由 X 是完备的, 则存在 $x \in X$, 使得 $x_n \rightarrow x$. 因为 M 是闭集, 根据定理 1.4-7 (b) $x \in M$. 从而证明了 M 中任意 Cauchy 序列均在 M 中收敛, 即 M 是完备的.

1.4-9 定理 (连续映射). 度量空间 (X, d) 到度量空

间 (Y, \tilde{d}) 中的映射 $T: X \rightarrow Y$ 在点 $x_0 \in X$ 连续当且仅当

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ 蕴涵 } Tx_n \rightarrow Tx_0$$

证明 假设 T 在 x_0 连续, 由定义 1.3-5 知, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得,

$$d(x, x_0) < \delta \text{ 蕴涵 } \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

设 $x_n \rightarrow x_0$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时.

$$d(x_n, x_0) < \delta$$

因此, 当 $n > N$ 时, 有

$$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$$

这表示 $Tx_n \rightarrow Tx_0$.

反之, 假设 $x_n \rightarrow x_0$ 蕴涵 $Tx_n \rightarrow Tx_0$, 现证 T 在 x_0 连续. 若 T 在 x_0 不连续, 那么, 存在一个 $\varepsilon > 0$, 使得对于每个 $\delta > 0$, 都有一个 $x \neq x_0$, 满足

$$d(x, x_0) < \delta, \text{ 但 } \tilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$$

特别取 $\delta = \frac{1}{n}$, 则有 x_n 使

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ 但, } \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$$

显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow x_0$, 但 Tx_n 不收敛于 Tx . 这与假设 $x_n \rightarrow x_0$ 蕴涵 $Tx_n \rightarrow Tx_0$ 矛盾, 因此, T 在 x_0 连续.

1.4-10 几个范例的解法

【例 1】 如果 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的 Cauchy 序列, 且存在一收敛的子序列 $x_{n_k} \rightarrow x \in X$. 则 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$).

证明. 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n, m > N$ 时,

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

再取 k 足够大, 使得 $n_k > N$, 且 $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ 因此, 当 $n > n_k$ 时,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

即, $x_n \rightarrow x$.

【例 2】若 (x_n) 和 (y_n) 为度量空间 (X, d) 中的两 Cauchy 序列, 则 $a_n = d(x_n, y_n)$ 收敛.

证明. 由于 (x_n) 和 (y_n) 为 Cauchy 序列, 则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

类似引理 1.4—3 中证法. 当 $m, n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

故 $a_n = d(x_n, y_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 R 上的 Cauchy 序列, 由 R 完备, 所以, $a_n = d(x_n, y_n)$ 收敛.

【例 3】设 d_1 和 d_2 是同一集 X 上的度量, 且存在正数 a 和 b , 使得, 对于所有 $x, y \in X$, 有,

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y)$$

试证 (X, d_1) 和 (X, d_2) 中有同样的 Cauchy 序列.

证明. 设 (x_n) 是 (X, d_1) 中的 Cauchy 序列, 那么, 对

于每个给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$d_1(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{b}$$

所以, $d_2(x_m, x_n) < b d_1(x_m, x_n) < \varepsilon$.

即, (x_n) 也是 (X, d_2) 中的Cauchy序列.

若 (y_n) 是 (X, d_2) 中的Cauchy序列, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $m, n > N$ 时

$$d_2(y_m, y_n) < a\varepsilon.$$

因此, $d_1(y_m, y_n) \leq \frac{1}{a} d_2(y_m, y_n) <$

故 (y_n) 也是 (X, d_1) 中的Cauchy序列.

习 题 1.4

1. 若度量空间 X 里的序列 (x_n) 收敛于 x , 试证 (x_n) 的每个子序列 (x_{n_k}) 也收敛于 x .

2. 证明 $x_n \rightarrow x$ 当且仅当对于 x 的每个邻域 V , 均存在一个正整数 n_0 , 使得当 $n > n_0$ 时, $x_n \in V$.

3. 证明Cauchy序列是有界的.

4. 在度量空间中, 试问有界序列均为Cauchy序列吗? 收敛吗?

5. 对引理1.4-3给出一间接证明.

6. 利用1.4-10中例3的结果, 证明习题1.2中9、10、11各度量空间有同样的Cauchy序列.

7. 利用实直线 R 的完备性, 证明复平面 C 的完备性.

§1.5 例题 (完备性的证明)

在本节我们将给出某些度量空间完备性的证明, 这些空

间在理论与实际应用中是经常遇到的. 证明的步骤大体是: 在 (X, d) 中任取一Cauchy序列 (x_n) , 相应选定一元素 x 作为其极限考虑, 证明 $x \in X$ 且 $x_n \rightarrow x$. 在这些例题的证明中, 我们将借助定理1.4-5中实直线 R 和复平面 C 的完备性.

1.5-1 R^n 与 C^n 是完备的

证明 先考虑 R^n . 我们知道, R^n 上的度量(欧几里得度量)为

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. 在 R^n 中任取一Cauchy序列 (x_m) , $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $m, r > N$ 时,

$$d(x_m, x_r) = \left[\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)})^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \quad (1)$$

因此, 对于 $j = 1, 2, \dots, n$, 当 $m, r > N$ 时, 有

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon$$

这说明对每个固定的 j ($1 \leq j \leq n$), 序列 $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ 是Cauchy实数列, 知其收敛, 即当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\xi_j^{(m)} \rightarrow \xi_j \in R$, 利用这 n 个极限值定义 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 显然, $x \in R^n$. 在(1)中令 $r \rightarrow \infty$, 当 $m > N$ 时

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon$$

故证得 $x_m \rightarrow x$ ($m \rightarrow \infty$), 并证明了 R^n 的完备性.

利用 C 的完备性, 并以上述同样的方法可证明 C^n 的完备性.

1.5-2 空间 l^∞ 是完备的

证明 设 (x_m) 是 l^∞ 中任意Cauchy序列, 这里 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots)$, 已知 l^∞ 上的度量为

$$d(x, y) = \sup_j |\xi_j - \eta_j|$$

其中. $x = (\xi_j) \in l^\infty$ $y = (\eta_j) \in l^\infty$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $m, n > N$ 时,

$$d(x_m, x_n) = \sup |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon$$

对于每个固定的 j , 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \quad (2)$$

因此, 序列 $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ 是 C 中 Cauchy 数列, 知其收敛, 即, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\xi_j^{(m)} \rightarrow \xi_j \in C$, 利用这些极限值, 定义 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$

在 (2) 中令 $n \rightarrow \infty$, 当 $m > N$ 时.

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leq \varepsilon \quad (*)$$

因为 $x_m = (\xi_j^{(m)}) \in l^\infty$. 则存在一实数 k_m , 对于所有的 j , 满足 $|\xi_j^{(m)}| \leq k_m$, 因此, 对每个 j 有.

$$|\xi_j| \leq |\xi_j - \xi_j^{(m)}| + |\xi_j^{(m)}| \leq \varepsilon + k_m \quad (m > N)$$

不等式右端是与 j 无关的实数, 故, 证得 (ξ_j) 是有界数列, 即, $x = (\xi_j) \in l^\infty$. 又由 (*), 得,

$$d(x_m, x) = \sup_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leq \varepsilon \quad (m > N)$$

这说明当 $m \rightarrow \infty$ 时, $x_m \rightarrow x$. 从而 l^∞ 的完备性得证.

1.5-3 空间 C 是完备的. C 是所有收敛复数列 $x = (\xi_j)$ 所成之集, 其度量 d 是由空间 l^∞ 导出的.

证明 因为 C 是 l^∞ 的子空间. 若能证明 C 是闭的, 则由定理 1.4-8 即可证得其为完备.

任取 $x = (\xi_j) \in \overline{C}$, 由定理 1.4-7 (a) 知, 存在 $x_n = (\xi_j^{(n)}) \in C$, 使 $x_n \rightarrow x$. 因此, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n \geq N$ 时. 对所有 j , 有,

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j| \leq d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

特别是, 对于 $n = N$ 及所有 j 不等式也成立, 因为 $x_N = (\xi_1^{(N)}, \xi_2^{(N)}, \dots) \in \mathbf{C}$ 为收敛序列, 所以, 是复平面上的 Cauchy 序列, 于是存在一个 N_1 , 当 $j, k > N_1$ 时,

$$|\xi_j^{(N)} - \xi_k^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

从而, 当 $j, k > N_1$ 时, 有,

$$|\xi_j - \xi_k| \leq |\xi_j - \xi_j^{(N)}| + |\xi_j^{(N)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_k| <$$

ε 这证明了序列 $x = (\xi_j)$ 是收敛的, 即, $x \in \mathbf{C}$. 因为 $x \in \overline{\mathbf{C}}$ 是任意的, 所以, \mathbf{C} 在 l^∞ 中是闭的.

1.5-4 空间 l^p 是完备的. (这里 p 是固定的, 且 $1 \leq p < +\infty$)

证明 设 (x_m) 是空间 l^p 中任意 Cauchy 序列, 这里, $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots)$, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad (3)$$

对于每个 $j = 1, 2, \dots$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \quad (4)$$

对于固定的 j , 由 (4) 知, $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ 是 Cauchy 序列. 因为 R 和 C 是完备的, 所以此序列收敛, 即, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\xi_j^{(m)} \rightarrow \xi_j$, 利用这些极限值, 定义 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. 下面证明 $x \in l^p$, 且, $x_m \rightarrow x$.

由 (3), 当 $m, n > N$ 时,

$$\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^P < \varepsilon^P \quad (k=1, 2, \dots)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 当 $m > N$ 时,

$$\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^P \leq \varepsilon^P \quad (k=1, 2, \dots)$$

现在可令 $k \rightarrow \infty$, 则对于 $m > N$, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^P \leq \varepsilon^P \quad (5)$$

这就证明了 $x_m - x \in l^P$ 因为 $x_m \in l^P$, 由 § 1.2 中 Minkowski 不等式, 得,

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^P$$

而且, 由 (5) 得, $d(x_m, x) \leq \varepsilon$, 即 $x_m \rightarrow x (m \rightarrow \infty)$ 因为 (x_m) 是 l^P 中任意 Cauchy 序列, 从而, l^P 完备性得证.

1.5-5 空间 $C[a, b]$ 是完备的.

证明 设 (x_m) 是 $C[a, b]$ 中任意 Cauchy 序列, 则, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad (6)$$

因此, 对于任意固定的 $t_0 \in [a, b]$, 当 $m, n > N$ 时

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon$$

这说明 $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)$ 是 Cauchy 实数列, 所以收敛, 即, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $x_m(t_0) \rightarrow x(t_0)$, 以这种方法, 使每个 $t \in [a, b]$ 对应一个确定的实数 $x(t)$, 从而在 $[a, b]$ 上定义了一函数 x . 下面证 $x \in C[a, b]$. 且 $x_m \rightarrow x$.

在 (6) 中, 令 $n \rightarrow \infty$, 当 $m > N$ 时, 得,

$$\max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

因此, 对于每个 $t \in [a, b]$, 当 $m > N$ 时.

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

这说明 (x_m) 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 x . 因为 $x_m(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续且一致收敛于 $x(t)$, 则 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续 (参见习题 9), 即 $x \in C[a, b]$, 同时证明了 $x_m \rightarrow x (m \rightarrow \infty)$, 从而, $C[a, b]$ 的完备性得证.

在前面及这里, 我们都假定函数 $x(t)$ 是实值的, 为此, 我们称这个空间为实 $C[a, b]$. 类似地, 当我们取定义在 $[a, b] \subset R$ 上的复值连续函数时, 得复 $C[a, b]$ 空间, 这个空间也是完备的, 证明与前面几乎一样.

在上面的证明中, 我们也得到如下的重要事实.

1.5-6 定理(一致收敛). 空间 $C[a, b]$ 中的收敛 $x_m \rightarrow x$ 是一致收敛, 即, (x_m) 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 x .

因此, $C[a, b]$ 上的度量, 有时称为一致度量.

下面是非完备度量空间的例子.

1.5-7 多项式. 设 X 是 $[0, 1]$ 上所有多项式所成之集. 对于任意 $x, y \in X$, 其度量是由 $C[0, 1]$ 上度量导出的, 即.

$$d(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$$

则 (X, d) 是非完备的度量空间.

证明 因为 (X, d) 是 $C[0, 1]$ 的子空间, 由定理 1.4-8, 要证 (X, d) 是非完备的, 只须证 X 是非闭的. 又由定理 1.4-8. 就是找一个序列 $(x_n) \subset X$. 且 $x_n \rightarrow x$, 但 $x \notin X$.

$$\text{设 } x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \quad t \in [0, 1]$$

显然, $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$). 令,

$$x(t) = e^t = 1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \quad t \in [0, 1]$$

那么, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $d(x_n,$

$$x) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \varepsilon \text{ 即,}$$

$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 但 $x(t) = e^t \notin X$.

1.5-8 连续函数. 设 X 是 $[0, 1]$ 上所有实值连续函数所成之集, 对于任意 $x, y \in X$, 定义度量为

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$

试证 (X, d) 是非完备的度量空间.

$$\text{证明. 设 } x_m(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ mt - \frac{m}{2} & \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

则 $x_m \in X$, ($m = 1, 2, \dots$), 因为 $d(x_m, x_n)$ 是图 3 中三角形的面

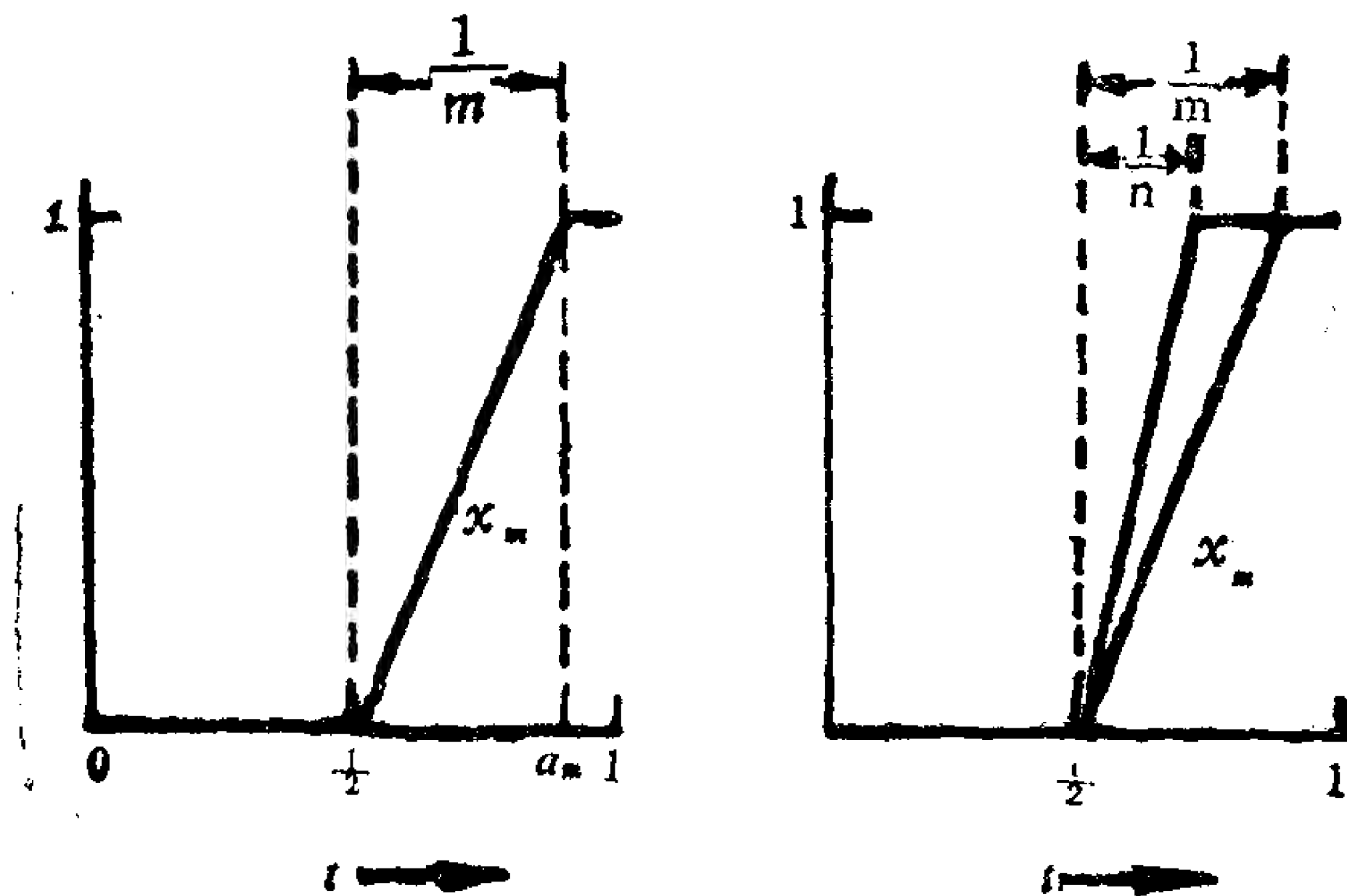


图3

积, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $m, n > N$ 时.

$$d(x_m, x_n) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$$

因此, (x_m) 是 X 中的 Cauchy 序列.

下面证此 Cauchy 序列不收敛. 若 $x(t) \in X$, 且 $d(x_m, x) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), 由于

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \int_0^1 |x_m(t) - x(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}} |x_m(t) - x(t)| dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}}^1 |1 - x(t)| dt, \end{aligned}$$

右端三个积分均是非负的, 因此, $d(x_m, x) \rightarrow 0$ 蕴涵每个积分趋于零. 因为假设 $x(t)$ 是连续的, 则,

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1, & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

对于连续函数这是不可能的. 故 (x_m) 在 X 中不收敛, 从而 (X, d) 是非完备的.

习 题 1.5

1. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. 证明开区间 (a, b) 是 \mathbb{R} 的一非完备子

空间.闭区间 $[a, b]$ 是完备的.

2. 设 X 是所有 n 个实数的有序组 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 所成之集, 其度量定义为

$$d(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j - \eta_j|$$

这里, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, 证明 (X, d) 是完备的.

3. 设 $M \subset l^\infty$ 是由至多含有限个非零项的序列全体组成的子空间, 在 M 中求一不收敛的Cauchy序列. 从而, 证明 M 是不完备的.

4. 利用定理1.4-8证明习题3中的 M 是非完备的.

5. 设 X 是所有整数组成的集合, 度量为 $d(m, n) = |m - n|$, 试证其为完备度量空间.

6. 在实数全体组成的集合上, 选定度量为

$$d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

试证其构成一非完备的度量空间.

7. 设 X 是正整数全体, 定义度量为,

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

试证 (X, d) 是非完备的.

8. 证明满足 $x(a) = x(b)$ 的 $x \in C[a, b]$ 构成的子空间 $Y \subset C[a, b]$ 是完备的.

9. 如果 $[a, b]$ 上的连续函数序列 (x_n) 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 x , 则极限函数 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上是连续的. 试证这个定理.

10. 证明离散度量空间是完备的. (参看1.1-2中例5)

11. 证明在空间 S (参看1.2-5) 中, $x_n \rightarrow x$ 的充要条件是对于所有 $j = 1, 2, \dots, \xi^{(n)}_j \rightarrow \xi_j$, 这里 $x_n = (\xi^{(n)}_j)$, $x = (\xi_j)$

12. 利用习题11结果, 证明序列空间 S 是完备的.

$$13. \text{ 设 } x_n(t) = \begin{cases} n & 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2}, \\ t^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{n^2} < t \leq 1, \end{cases}$$

试证 (x_n) 是 1.5-8 中空间 X 的另一个 Cauchy 序列.

14. 证明习题 13 中的 Cauchy 序列不收敛.

15. 设 X 是只有有限个非零项的实数列 $x = (\xi_j)$ 全体, 其度量为 $d(x, y) = \sum |\xi_j - \eta_j|$, 这里 $y = (\eta_j)$. 令 $x_n = (\xi^{(n)}_j)$, 其中,

$$\xi^{(n)}_j = \begin{cases} 1/j^2 & 1 \leq j \leq n \\ 0 & j > n \end{cases}$$

明证 (x_n) 是 X 中不收敛的 Cauchy 序列.

§1.6 度量空间的完备化

我们知道, 有理直线 Q 是不完备的, 但可以扩充为完备的实直线 R , 且 Q 在 R 中稠密. 扩充的一种重要方法是, 把 Q 内的 Cauchy 数列, 依“可能有相同极限”分成一类, 收敛到有理数的定义为 R 中有理元素, 不收敛的定义为 R 中的无理元素. 用类似的方法, 均可使任一非完备空间完备化. 为了精确地阐述, 先引进两个有关的概念.

1.6-1 定义(等距映射. 等距空间) 设 $X = (X, d)$ 与 $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ 为度量空间.

(a) 如果 X 到 \tilde{X} 的映射 T 保持距离不变, 即, 对所有 $x, y \in X$.

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

则称 T 是等距映射.

(b) 如果存在一个 X 到 \tilde{X} 上的等距双射 T ①, 则称 X 与 \tilde{X} 是等距空间.

因此, 等距空间从度量的角度上看, 两空间至多是它们

① 双射是一对一的满射, 参阅附录 1A 1, 2 映射.

点的属性不同, 可以不加区别地看成同一抽象空间的两个不同模型.

对于度量空间 X , 如果存在完备的度量空间 $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$, 使得 X 等距于 \hat{X} 的一稠密子空间 \overline{W} , 则称 \hat{X} 是 X 的完备化空间.

1.6-2 定理(完备化). 任一度量空间 $X = (X, d)$, 必存在完备化空间 $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$, 且在等距意义下是唯一的(即, 若 \tilde{X} 为任一完备的度量空间, 并存在一个与 X 等距的稠密子空间 \tilde{W} , 则 \tilde{X} 与 \hat{X} 等距).

证明. 分四步进行:

(a) 构造度量空间 $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$.

(b) 构造一等距映射 $T: X \rightarrow W \subset \hat{X}$, 且,
 $\overline{W} = \hat{X}$.

(c) 证明 \hat{X} 是完备的.

(d) 在等距意义下, 证明 \hat{X} 是唯一的.

现在详细证明如下.

(a) 构造 $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$. 设 (x_n) 和 $(x_n^!)$ 是度量空间 X 中的柯西序列, 如果 $(x_n), (x_n^!)$ 满足,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n^!) = 0 \quad (1)$$

则称 (x_n) 与 $(x_n^!)$ 等价^①. 记作 $(x_n) \sim (x_n^!)$. 设 \hat{X} 是由全体柯

① 参阅附录1中的A1.4.

西序列的等价类 $\hat{x}, \hat{y} \cdots$ 组成的集合. $(x_n) \in \hat{x}$ 表示 (x_n) 是 \hat{x} 中一个元素, 或称 (x_n) 是 \hat{x} 的一个代表. 对于任意 $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$ 定义

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad (2)$$

其中, $(x_n) \in \hat{x}, (y_n) \in \hat{y}$.

首先证明(2)式右端极限存在. 由

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

得, $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$

将 m 与 n 互换可得类似不等式, 合起来, 有

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n). \quad (3)$$

因为 $(x_n), (y_n)$ 都是Cauchy序列, 当 m, n 足够大时, 可以使(3)小于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 故证得 $\{d(x_n, y_n)\}$ 是Cauchy数列, 又 R 是完备的, 所以(2)中的极限存在.

还需证明(2)中的极限与等价类 \hat{x}, \hat{y} 中代表 $(x_n), (y_n)$ 的选择无关. 事实上, 若 $(x_n) \sim (z_n), (y_n) \sim (w_n)$, 那么由(1).

$$|d(x_n, y_n) - d(z_n, w_n)| \leq d(x_n, z_n) + d(y_n, w_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \text{ 因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, w_n).$$

下面证(2)中的 \hat{d} 是 \hat{X} 上的度量. 显然, \hat{d} 满足度量公理(M1)与(M3), 也有 $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}) = 0$, 而且, 从 $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, 可推出 $(x_n) \sim (y_n)$. 从而, $\hat{x} = \hat{y}$. 所以(M2)得证.

在

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

中令 $n \rightarrow \infty$ 可得 (M4).

(b) 构造一等距映射 $T: X \rightarrow W \subset \hat{X}$, 并证明 $\overline{W} = \hat{X}$.

对每个 $b \in X$, 对应一个 $\hat{b} \in \hat{X}$, 且 $(b, b, \dots) \in \hat{b}$. 按 $b \mapsto \hat{b} = Tb$, 其中 $(b, b, \dots) \in \hat{b}$ 定义一映射 $T: X \rightarrow W = T(X) \subset \hat{X}$. 由 (2) 得,

$$\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) = d(b, c)$$

这里 $(c, c, \dots) \in \hat{c}$, $c \in X$. 所以 T 是等距的, 任何等距映射都是一对一的. 因为 $T(X) = W$. 即 T 又是满射, 因此, X 与 W 是等距的 [参看定义 1.6-1(b)].

我们证明子空间 W 在 \hat{X} 中稠密. 事实上, 任取 $\hat{x} \in \hat{X}$, 设 $(x_n) \in \hat{x}$, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $m, n \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, 特别有,

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N)$$

设 $(x_N, x_N, \dots) \in \hat{x}_N$, 则, $\hat{x}_N \in W$. 由 (2) 得,

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

这就证明了对于任意 $\hat{x} \in \hat{X}$ 的每个 ε -邻域都包含 W 的一个元素. 因此, W 在 \hat{X} 里稠密.

(c) 证明 \hat{X} 的完备性. 设 (\hat{x}_n) 是 \hat{X} 中任意 Cauchy 序列. 由于 W 在 \hat{X} 中稠密, 所以, 对于每个 \hat{x}_n 存在 $\hat{z}_n \in W$, 使得,

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < \frac{1}{n} \quad (4)$$

由三角不等式, 有,

$$\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) \leq \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n)$$

$$< \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \frac{1}{n}$$

因为 (\hat{x}_n) 是 Cauchy 序列. 当 m, n 足够大时, 上式可小于任意给定的 $\varepsilon > 0$. 因此, (\hat{z}_n) 是 Cauchy 序列. 由于 $T: X \rightarrow W$ 是等距的且 $\hat{z}_n \in W$ 则 (z_n) 是 X 中 Cauchy 序列, 其中 $z_n = T^{-1} \hat{z}_n$. 令 $\hat{x} \in \hat{X}$ 是 (z_n) 所属的类. 我们证明 \hat{x} 是 (\hat{x}_n) 的极限. 由 (4) 式, 有,

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) \leq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) \quad (5)$$

$$< \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x})$$

由于 $(z_n) \in \hat{x}$, 且 $\hat{z}_n \in W$, 因此, $(z_n, z_n, \dots) \in \hat{z}_n$. 不等式 (5) 变为.

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} d(z_n, z_m)$$

只要 n 足够大, 右端可比任意给定的 $\varepsilon > 0$ 还要小, 所以任意Cauchy序列 $(\hat{x}_n) \subset \hat{X}$ 在 \hat{X} 中都有极限, 于是 \hat{X} 是完备的.

(d) 在等距意义下, 证明 \hat{X} 的唯一性. 若 $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ 是 X 的另一个完备化空间, 则 X 等距于 \tilde{X} 的一稠密子空间. 从度量角度看, 等距空间是不加区别的. 因此, 我们将 X 看成 \hat{X} 的子空间也看成 \tilde{X} 的子空间, 且视 X 在 \hat{X} 和 \tilde{X} 中稠密. 从而, 对于每个 $\tilde{x} \in \tilde{X}$, 必有序列 $(x_n) \subset X$, 使得在 \tilde{X} 中, $x_n \rightarrow \tilde{x}$, 所以, (x_n) 是 X 中Cauchy序列, 同时也是 \hat{X} 中Cauchy序列, 故在 \hat{X} 中必收敛于某个元素 \hat{x} . 而且, 当 \tilde{x} 给定时, \hat{x} 是唯一确定的并与 (x_n) 的选择无关. 事实上, 若还有, $(x'_n) \subset X$, 使在 \tilde{X} 中, $x'_n \rightarrow \tilde{x}$, 但在 \hat{X} 中, $x'_n \rightarrow \hat{x}' \in \hat{X}$, 则有,

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}') = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$$

所以, $\hat{x} = \hat{x}'$. 于是作 \tilde{X} 到 \hat{X} 的映射 $T_0: T_0 \tilde{x} = \hat{x}$, 下面证明 T_0 是满射. 对于任意 $\hat{y} \in \hat{X}$, 必有 $y_n \in X$, 使得在 \hat{X} 中, $y_n \rightarrow \hat{y}$, 因此, (y_n) 是 X 中也是 \tilde{X} 中的Cauchy序列, 故在 \tilde{X} 中必收敛于某 \tilde{y} . 显然有, $T_0 \hat{y} = \tilde{y}$. 从而证得 T_0 是满射. 此外,

$\hat{d}(T_0 \tilde{x}, T_0 \tilde{y}) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$
即 T_0 是一对一的等距映射又是满射. 因此 \tilde{X} 与 \hat{X} 等距.

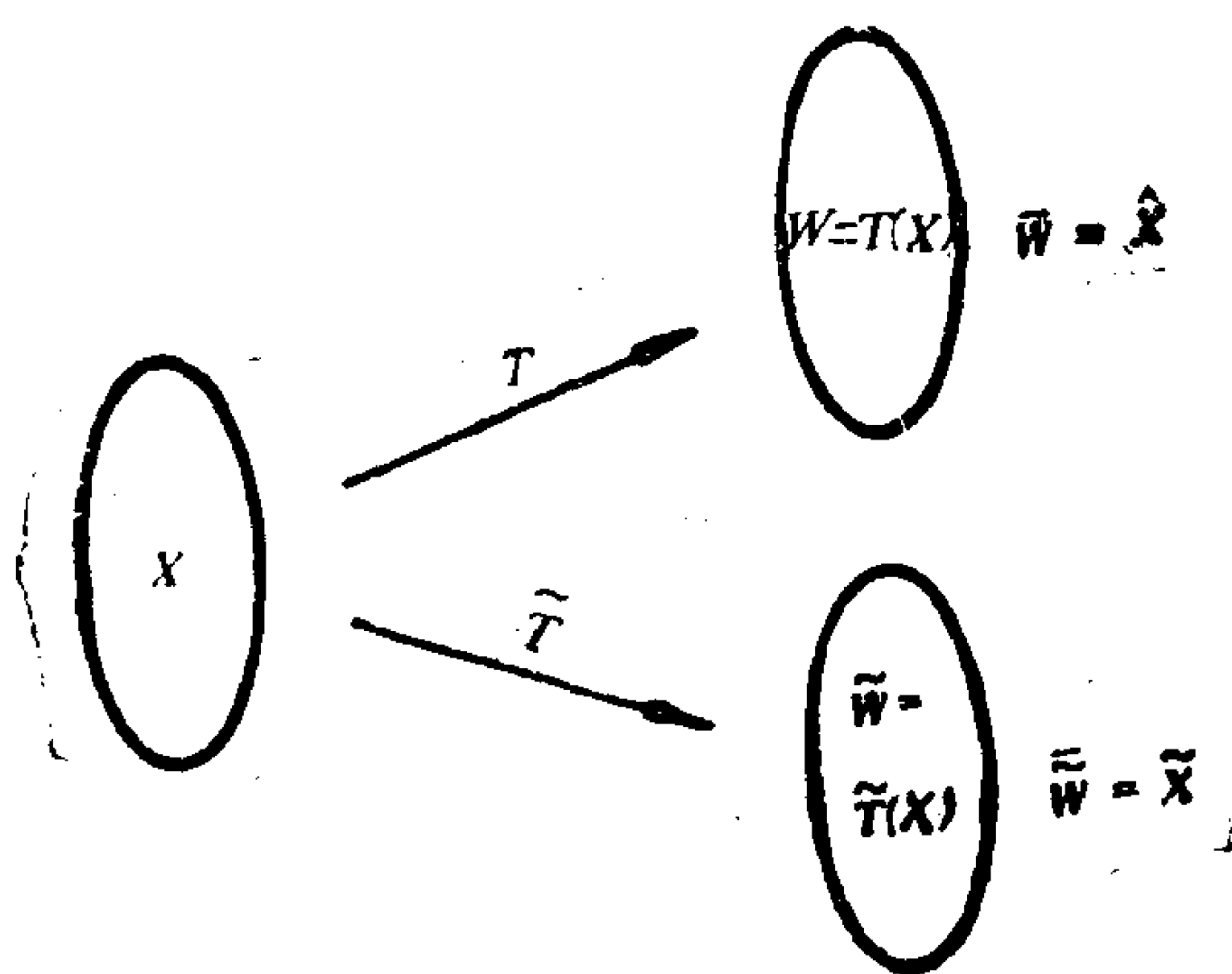


图4 定理1.6-2的图示

习 题 1.6

1. 如果 Y 是由有限多个点组成的度量空间的子空间, 试证 Y 是完备的.

2. 设 X 是一切有理数所成之集, 试问按度量 $d(x, y) = |x - y|$ 构成的度量空间 (X, d) 之完备化空间是什么?

3. 离散度量空间 X 的完备化空间是什么? (参图1.1-2中例5).

4. 若 X_1 与 X_2 是等距的, 且 X_1 是完备的, 证明 X_2 是完备的.

5. (同胚) 如果一个连续的双射 $T: X \rightarrow Y$, 其逆映射是连续的, 则称 T 是一个同胚, 此时度量空间 X 与 Y 称做同胚的. (a) 证明如果 X 与 Y 是等距的, 则它们是同胚的. (b) 举例说明一完备的与一非完备的度量空间可以是同胚的.

6. 证明 $C[0, 1]$ 与 $C[a, b]$ 是等距的.

7. 如果 (X, d) 是完备的, 且 $\tilde{d} = d/(1 + d)$, 试证 (X, \tilde{d}) 是完备的.

8. 证明习题7中, (\tilde{X}, d) 的完备性蕴涵 (X, d) 的完备性.
9. 如果 (X, d) 中的 (x_n) 及 (x_n') 满足定理1.6-2中的(1), 且 $x_n \rightarrow l$, 证明 (x_n') 收敛并有极限 l .
10. 如果 $(x_n), (x_n')$ 是度量空间 (X, d) 中的收敛序列, 且有相同的极限 l , 证明它们满足定理1.6-2中的(1).
11. 证明定理1.6-2中的(1) 在 X 的所有Cauchy序列组成之集上定义了一等价关系.
12. 如果 (x_n) 是 (X, d) 中的Cauchy序列, 并与 X 中的 (x_n') 满足定理1.6-2中的(1), 证明 (x_n') 是 X 中的Cauchy序列.
13. (伪度量). 如果函数 $d: X \times X \rightarrow R$ 满足§1.1中的 $(M1)$ 、 $(M3)$ 、 $(M4)$ 及 $(M2^*)$ $d(x, x) = 0$.

则称 d 是集 X 上的一伪度量. 试问度量和伪度量之间有什么不同? 证明 $d(x, y) = |\xi_1 - \eta_1|$ 是有序实数对全体所成之集上的伪度量. 这里 $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$.

14. 设 $d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$, 如果 X 是:

- (1) $[a, b]$ 上所有实值连续函数所成之集.
- (2) $[a, b]$ 上全体Riemann可积实值函数组成之集.

试问 d 是 X 上的度量? 或是伪度量?

15. 若 (X, d) 是伪度量空间, 称集.

$$B(x_0; r) = \{x | d(x, x_0) < r, x \in X\}$$

为 X 中以 x_0 为中心, r 为半径的开球.

试问习题13中半径为1的开球是什么?

第二章 赋范空间、巴拿赫(Banach)空间

在第一章中研究了度量空间，在那里只涉及到空间的度量性质，度量属于集的几何结构。但第一章的很多空间同时可以定义元素的加法和数乘运算，构成一定的代数系统，这是集的代数结构。本章所要研究的赋范空间就是度量与代数结构有机结合的产物，它具有更大的优越性。赋范空间、特别是Banach空间（完备的赋范空间）以及在其上定义的线性算子的理论是泛函分析中最重要、最基本的内容。

重要概念、主要内容的概述

赋范空间(2.2-1)是度量依范数定义的向量空间(2.1-1)。范数是平面上或三维空间中向量长度的推广。Banach空间(2.2-1)是完备的赋范空间。任何赋范空间必有一Banach空间为其完备化度量空间(2.3-2)。

在赋范空间中，可以定义和使用无穷级数(§ 2.3)

本章另一个重要概念是定义在赋范空间上的线性算子，算子是赋范空间 X 到赋范空间 Y 中的映射。从赋范空间 X 到数域 R 或 C 中的映射称做泛函。其中特别重要的是有界线性算子(§ 2.7)和有界线性泛函(§ 2.8)，定理2.7-13指出线性算子是连续的当且仅当它是有界的。

从赋范空间 X 到赋范空间 Y 中的有界线性算子全体可构成一赋范空间 (§ 2.7), 记作 $B(X, Y)$, 类似地, X 上所有有界线性泛函亦构成一赋范空间, 称做 X 的对偶空间, 记为 X^* (§ 2.8).

有穷维赋范空间比无穷维赋范空间简单, 有穷维向量空间上的线性算子可用矩阵来表示 (§ 2.6).

§2.1 向 量 空 间

向量空间在很多数学分支和它的应用中起着重要作用. 在研究某些理论和实际问题时, 只有收敛概念是不够的, 例如, 考察极限过程, 若没有代数结构, 只能研究序列的收敛. 一旦与代数运算结合起来, 就可以研究无穷级数的敛散性, 这不仅在内容上大大丰富了极限理论而且也是某些应用的理论基础. 下面我们引进向量空间的概念.

2.1-1 定义 (向量空间). 数域 K 上的向量空间 X (或称做线性空间) 是在其上定义了元素 (向量) 的两个代数运算的非空集合. 这两个代数运算是:

向量加法. 是指从 $X \times X$ 到 X 中的映射: $(x, y) \rightarrow x + y$ ($x + y$ 称做 x 与 y 的和), 并满足

$$x + y = y + x \quad x, y \in X \quad (\text{加法交换律})$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad x, y, z \in X. \quad (\text{加法结合律})$$

X 中存在零向量 θ , 使得对每个 $x \in X$, 有

$$x + \theta = x \quad \text{成立}$$

对于每个 $x \in X$, 存在 $-x \in X$, 使得

$$x + (-x) = \theta$$

数量 α (K 中元素) 与 X 中向量 x 的乘法(简称数乘), 是指从 $K \times X$ 到 X 中的映射:

$(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ (αx 称为 α 与 x 的乘积). 并满足,

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad \alpha, \beta \in K, \quad x \in X \quad (\text{乘法结合律})$$

对于每个 $x \in X$, $1 \in K$, 有

$$1 \cdot x = x$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \\ (\alpha+\beta)x &= \alpha x + \beta x \end{aligned} \right\} \quad \alpha, \beta \in K \quad x, y \in X \quad (\text{分配律})$$

在泛函分析中, 数域 K 是实数域 R 或复数域 C . 若 $K = R$ 时, 则称 X 是实向量空间; 若 $K = C$ 时, 则称 X 是复向量空间.

读者可以证明, 对于任意 $x \in X$, $\alpha \in K$, 有

$$0x = \theta \tag{1a}$$

$$\alpha\theta = \theta \tag{1b}$$

$$(-1)x = -x \tag{2}$$

2.1-2 例题

【例1】 在 R^n 中如果加法和数乘定义如下:

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_n)$$

这里 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R^n$, $\alpha \in R$.

那么, R^n 成为一实向量空间.

类似地, C^n 可以成为一个复向量空间.

【例2】 $C[a, b]$ 是实向量空间, 这里不考虑其几何结构一度量. 只考虑代数结构, 两个代数运算定义为,

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \quad (\alpha \in R)$$

因为 x, y 是 $[a, b]$ 上的连续函数, α 是实数, 从而, $x + y, \alpha x$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数。即此空间关于加法和数乘运算是封闭的。并可以验证它们满足向量空间定义中的诸公理。

【例 3】 空间 $l^p (p \geq 1)$, 如果在 l^p 中定义两个代数运算

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots)$$

$$\alpha x = (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \dots)$$

这里, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^p, \alpha \in K (K = R \text{ 或 } K = C)$, 则由 $\sum |\alpha \xi_k|^p = |\alpha|^p \sum |\xi_k|^p < +\infty$, 知, $\alpha x \in l^p$ 由 Minkowski 不等式可得 $x + y \in l^p$, 即在 l^p 中关于加法和数乘运算是封闭的。向量空间诸公理成立是容易验证的, 因此, l^p 是向量空间。

此外, $l^\infty, B(A)$ 按通常的加法、数乘运算均构成向量空间。

现在, 我们来介绍与向量空间有关的几个概念。

设 X 是数域 K 上的向量空间, Y 是 X 的非空子集, 如果对于所有 $x, y \in Y$, 及任意 $\alpha, \beta \in K$, 有, $\alpha x + \beta y \in Y$, 则称 Y 是 X 的向量子空间例如, R^3 中过原点的直线和过原点的平面均是 R^3 的向量子空间。 l^p 是 l^∞ 的向量子空间。特别是当 $Y = X$ 时, Y 称做 X 的假子空间, 当 $Y \neq X (X \neq \{\theta\})$ 时, Y 称做 X 的真子空间。每个向量空间 X 都有一个特殊的子空间 $Y = \{\theta\}$ 。值得注意的是向量空间的非空子集并非都是向量子空间, 看其是否关于两个代数运算封闭。如, R 不是 C 的向量子空间, 这是因为 R 在复数域上关于数乘运算不封闭。

设 X 是数域 K 上的向量空间, x_1, \dots, x_n 是 X 中的 m 个 (有限) 向量, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, 称向量

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$$

为向量 x_1, \cdots, x_m 的一个线性组合, 或称 x 可用 x_1, \cdots, x_m 线性表示。

对于非空子集 $M \subset X$, M 中向量的线性组合的全体称做 M 的张成。记作 $\text{Span} M$ 。显然, $M \subset \text{Span} M$, 且 $\text{Span} M$ 是 X 的一向量子空间。

2.1-3 定义 (线性相关和线性无关) 设 X 是向量空间, $M = \{x_1, \cdots, x_r\} \subset X$, 如果 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ 是使

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = \theta \quad (3)$$

成立的唯一的 r 个数, 那么称 M 是线性无关的, 如果存在不全为零的某 r 个数使 (3) 也成立, 则称 M 是线性相关的。

设 M 是 X 的任意子集, 如果 M 的每个非空有限子集都是线性无关的, 则称集 M 是线性无关集。否则, 称 M 是线性相关的。

若 $M = \{x_1, \cdots, x_r\}$ 是线性相关的, 那么, M 至少有一个向量可表示成其他向量的线性组合。事实上, 若 M 线性相关, 至少有一个 $\alpha_j \neq 0$ 由 (3) 可解出,

$$x_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} x_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} x_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_j} x_r$$

下面我们用线性无关与线性相关的概念定义向量空间的维数。

2.1-4 定义 (有穷维与无穷维向量空间) 设 X 是向量空间, 如果存在正整数 n , 使得 X 中有 n 个向量 x_1, \cdots, x_n 线性无关, 而 X 的任何 $n+1$ 个向量均线性相关, 则称 X 是有穷维

向量空间，其维数为 n ，记作 $\dim X = n$ 。特别地，若 $X = \{\theta\}$ ，规定 X 为有穷维向量空间，且 $\dim\{\theta\} = 0$ ，非有穷维向量空间称为无穷维向量空间。记 $\dim X = \infty$

例如， R^n 、 C^n 都是 n 维向量空间。 $C[\alpha, b]$ 、 l^2 均是无穷维向量空间。

如果 $\dim X = n$ ， $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 中一线性无关集，则称 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基。

一般地，如果 B 是向量空间 X （不必是有穷维的）的线性无关子集，且 $\text{Span } B = X$ ，则称 B 为 X 的一个Hamel基。

例如， R^n 中， $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ， $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ， \dots ， $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ 则 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 R^n 中一个基。设 $p[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上多项式的全体与数0构成的向量空间，那么， $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ 是 $p[a, b]$ 的一Hamel基。

每个向量空间 $X \neq \{\theta\}$ 都存在一Hamel基，对于有穷维向量空间，这个结论容易证明。对于无穷维向量空间，可用第四章的Zorn引理证明。

向量空间的Hamel基不是唯一的，但每个Hamel基的基数都是相同的（因为证明中需要集论中一些较深的知识，故证略），这个基数称为 X 的维数。这里的定义既包含了定义2.1-4，又是它的推广。

2.1-5 定理（子空间的维数） 设 X 是 n 维向量空间，则 X 的任一真子空间 Y 的维数小于 n 。

证明。若 $n = 0$ ，则 $X = \{\theta\}$ ，这时 X 没有真子空间。若 $n \neq 0$ ， $\dim Y = 0$ 。则 $Y = \{\theta\}$ ，且 $\dim Y < \dim X$ 。若 $n \neq 0$ ， $\dim Y \neq 0$ 。由于， $\dim Y \leq \dim X = n$ 。只须证 $\dim Y \neq n$ ，假定 $\dim Y = n$ ，那么， Y 的每个基也是 X 的基，由 X 的每一元

素 x 均可由该基线性表示及 Y 为一子空间,故 $x \in Y$, 于是 $Y = X$. 这与 Y 是 X 的真子空间矛盾。因此, $\dim Y < n$.

习 题 2.1

1. 证明实数全体按通常的加法和数乘运算构成一维实向量空间.
复数全体构成一维复向量空间.

2. 证明课文中的(1a)、(1b)、及(2).

3. 写出 R^3 中 $M = \{(1, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ 的张成.

4. 指出下列 R^3 的子集哪些能构成 R^3 的子空间, 这里, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

(a) $\xi_1 = \xi_2, \xi_3 = 0$ 的所有 x ;

(b) $\xi_1 = \xi_2 + 1$ 的所有 x ;

(c) $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \xi_3 > 0$ 的一切 x ;

(d) $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = k$ (k 为常数)的 x 全体;

5. 证明 $\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i = t^i$ 是 $C[a, b]$ 中一线性无关集. $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

6. 试证在 n 维向量空间 X 中, 任意 $x \in X$, 可唯一地表示成已知基向量 e_1, \dots, e_n 的线性组合.

7. 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是复向量空间 X 的基, 找一个基使 X 成为实向量空间. 试问在这两种情况下, X 的维数是什么?

8. 若 M 是复向量空间 X 的线性相关集, 当 X 按习题7的方法成为一实向量空间时, 试问 M 在 X 中是否线性相关?

9. 定义在区间 $[a, b] \subset R$ 上的所有次数不超过 n 的实系数多项式及 $x=0$ 组成的集 $p[a, b]$, 证明以通常的加法及与实数的乘法构成一个 $n+1$ 维的实向量空间. $x=0$ 与次数不超过 n 的 $[a, b]$ 上的复系数多项式全体构成一复向量空间 \tilde{X} , $p[a, b]$ 是 \tilde{X} 的子空间吗?

10. 设 Y 和 Z 都是向量空间 X 的子空间, 证明 $Y \cap Z$ 是 X 的子空间. $Y \cup Z$ 是否是 X 的子空间? 举例说明.

11. 设 $M \neq \emptyset$ 是向量空间 X 的任一子集, 证明 $\text{Span } M$ 是 X 的子空间.

12. 证明所有实二阶方阵构成一向量空间 X . X 中的零向量是什么? 确定 $\dim X$, 求出 X 的一个基. 给出 X 的子空间例子. 所有对称矩阵 $x \in X$ 能否形成子空间? 所有降秩矩阵能构成子空间吗?

13. (乘积), 证明同一数域上的两个向量空间的笛卡儿乘积 $X = X_1 \times X_2$, 其上定义代数运算

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

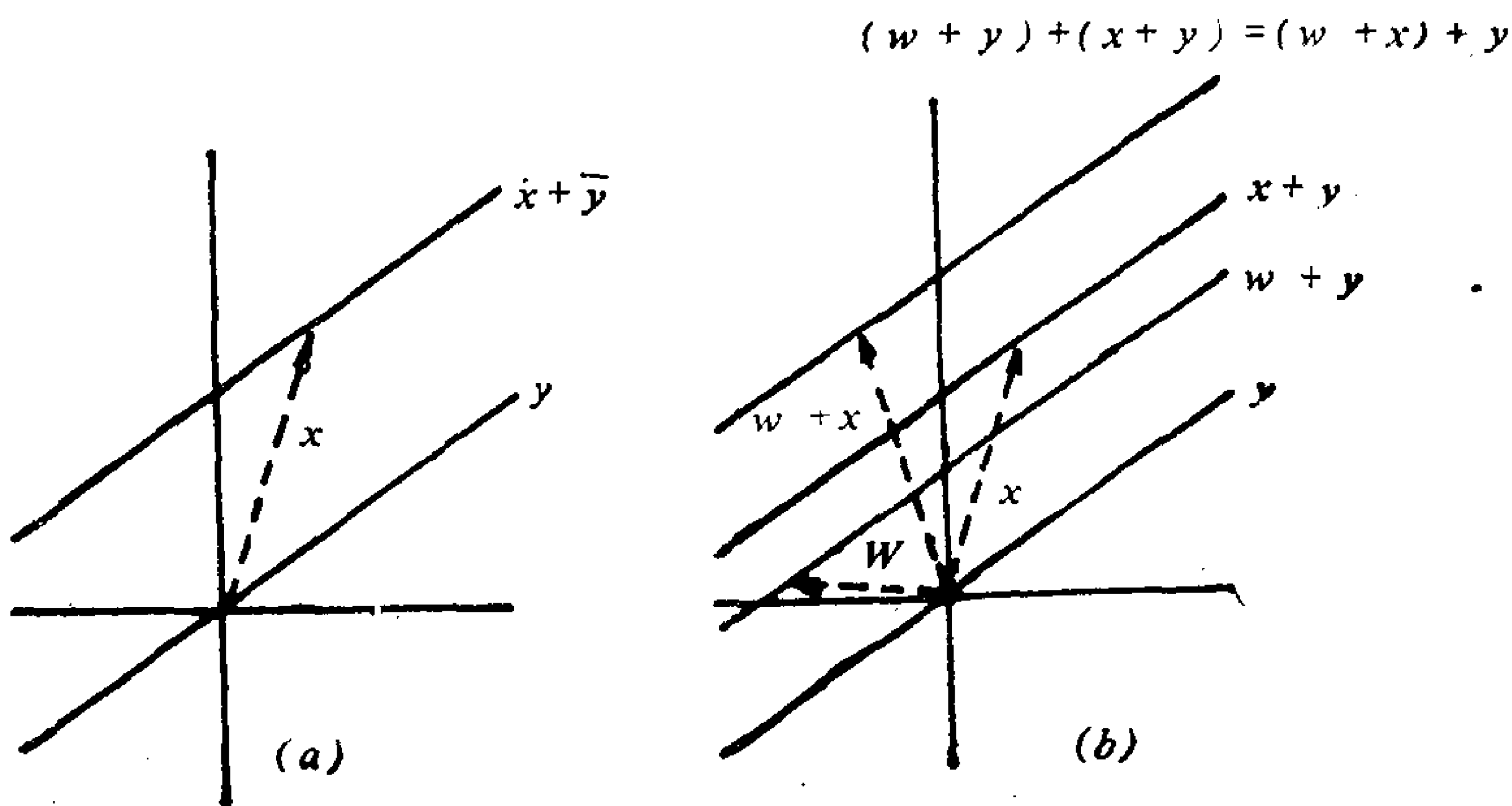
后成为一向量空间.

14. (商空间、余维数) 设 Y 是向量空间 X 的子空间, $x \in X$, 称 $x + Y = \{v | v = x + y, y \in Y\}$ 是 x 关于 Y 的陪集. 证明这些不同的陪集形成 X 的一个划分, 并证明在下列代数运算下,

$$(x + Y) + (w + Y) = (x + w) + Y$$

$$\alpha(x + Y) = \alpha x + Y$$

以陪集作为元素构成一向量空间, 称做 X 关于 Y 的商空间, 记作 X/Y . $\dim(X/Y)$ 称为 Y 的余维数, 记为 $\text{codim } Y = \dim(X/Y)$.



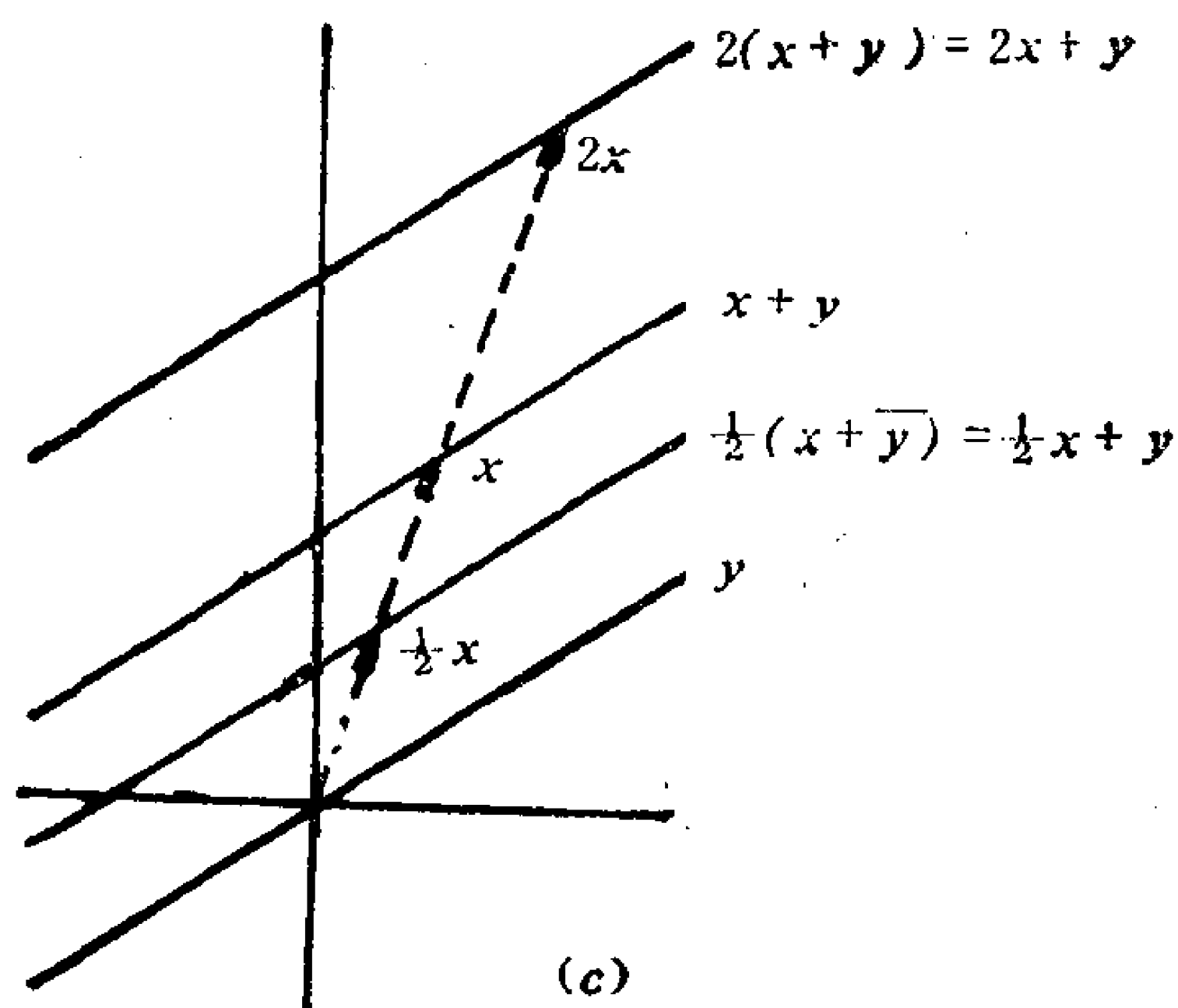


图 5 . (a) $x+Y$ 的图示, (b) 商空间中, 向量加法图示
(c) 商空间中, 向量数乘运算的图示

15. 设 $X = R^3$, $Y = \{(\xi_1, 0, 0) | \xi_1 \in R\}$, 求 X/Y , X/X , $X/\{0\}$

§2.2 赋范空间、Banach空间

向量空间很多也是度量空间. 为使度量与代数运算结合起来, 我们在向量空间上建立向量的范数, 它是平面上和三维空间中向量模的概念的自然推广. 并由范数定义向量空间的度量, 从而产生了赋范空间, 若在这种度量下赋范空间是完备的, 称为Banach空间.

2.2-1 定义(赋范空间、Banach空间) 设 X 是数域 K 上的向量空间, 在 X 上定义映射 $X \rightarrow R: x \mapsto \|x\|$, 对于任意 $x, y \in X$, $\alpha \in K$ 若满足

$$\|x\| \geq 0 \quad (N1)$$

$$\|x\| = 0 \text{ 当且仅当 } x = \theta \quad (N2)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (N3)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (N4)$$

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数. 称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间 (或赋范向量空间), 简记作 X .

在 X 上定义度量

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (1)$$

若 X 在度量 (1) 下是完备的, 则称 X 是 Banach 空间.

(1) 也称做由范数导出的度量.

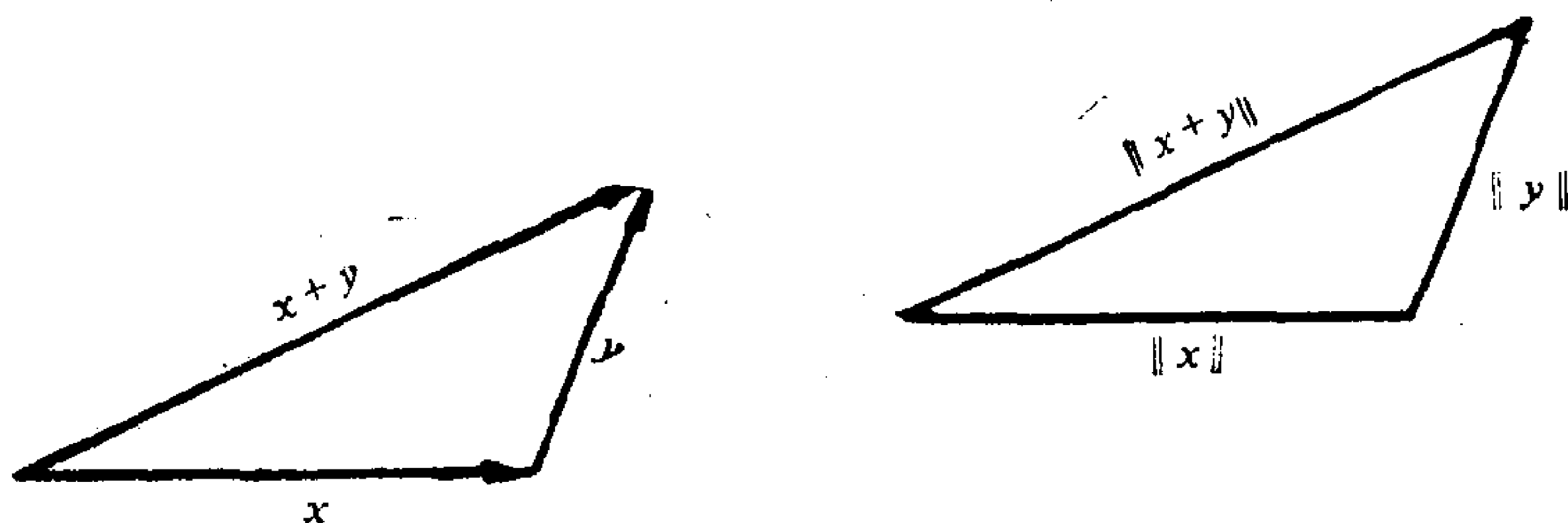


图 6 三角不等式 (N4) 的图示

2.2-2 欧几里得空间 R^n 及酉空间 C^n . 对于 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 定义范数

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2} \quad (2)$$

易验证 (N1)、(N2)、(N3) 成立, (N4) 可由 *Minkowski* 不等式证得. 由范数导出的度量是 1.1-2 中的度量 (4),

$y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

在 1.5-1 中已证明在此度量下 R^n 和 C^n 是完备的. 因此, R^n 、 C^n 均是 Banach 空间.

特别是在 R^3 中,

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

这表明向量的范数是向量长度这个初等概念的推广.

2.2-3 空间 l^p ($p \geq 1$). 在 l^p 上定义范数,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} \quad x = (\xi_i) \in l^p. \quad (3)$$

易验证(3) 满足范数公理(N1)至(N4), 由(3) 导出的度量

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p}$$

l^p 在这个度量下是完备的(1.5-4中已证明).

故 l^p 是Banach空间

2.2-4 空间 l^∞ 是Banach空间. 容易证明

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i| \quad x = (\xi_i) \in l^\infty$$

是 l^∞ 上向量的范数, 并且度量

$$d(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| \quad x = (\xi_i), y = (\eta_i) \in l^\infty$$

是由这个范数导出的. l^∞ 的完备性已在1.5-2中证得.

2.2-5 空间 $C[a, b]$ 是Banach空间. 在 $C[a, b]$ 上定义

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \quad x \in C[a, b] \quad (4)$$

可以验证(4) 满足(N1)至(N4). 并在(4) 的导出度量下, $C[a, b]$ 的完备性在1.5-5中已证明.

2.2-6 非完备的赋范空间. 可以证明 $[0, 1]$ 上实值连续函数全体, 按其范数

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt \quad (5)$$

成为一赋范空间. 在范数(5) 的导出度量下, 是非完备的

(在1.5-8中已证明)

还可以证明, $[a, b]$ 上实值连续函数全体, 按范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (6)$$

构成一非完备的赋范空间.

赋范空间是度量空间, 其度量由(1)给出, 有了度量, 就可以研究收敛概念.

设 (x_n) 是赋范空间 X 中的序列, $x \in X$, 如果,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

则称 x_n 依范数收敛于 x , 记作, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 或, $x_n \rightarrow x$.

由定义2.2-1中的(N4), 可得如下不等式

$$| \|y\| - \|x\| | \leq \|y - x\| \quad (7)$$

证明留给读者(参看习题3), 不等式(7)蕴涵范数的连续性.

在赋范空间中, 加法运算和数乘运算均是连续的. 设 X 是数域 K 上的赋范空间. (x_n) 、 (y_n) 是 X 中的序列, $x, y \in X$, 且 $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. 则,

$$x_n + y_n \rightarrow x + y.$$

若 (α_n) 是 K 中数列, $\alpha_n \rightarrow \alpha \in K$, $x_n \rightarrow x$, 则

$$\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x.$$

证明, 由于 $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0$

因此 $x_n + y_n \rightarrow x + y$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &\leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha x\| \\ &= |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \end{aligned}$$

并且 (a_n) 是收敛数列, 故有界, 于是,

$$a_n x_n \rightarrow ax.$$

每个赋范空间都是度量空间, 但是, 并非任何度量空间的度量都是由范数导出的. 由范数导出的度量需满足下面两个性质.

2.2-7 引理. 设 X 是赋范空间, d 是由范数导出的度量, 对于所有 $x, y, a \in X$, 每个 $a \in K$, 则有,

$$(a) \quad d(x+a, y+a) = d(x, y) \quad (\text{平移不变性})$$

$$(b) \quad d(ax, ay) = |a| d(x, y) \quad (\text{绝对齐次}) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad d(x+a, y+a) &= \|(x+a) - (y+a)\| = \|x-y\| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\| = |a| \|x - y\| = |a| d(x, y).$$

例如, 序列空间 S , 1.2-5中我们曾证明过 S 是度量空间. 其度量为,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

这里, $x = (\xi_i)$, $y = (\eta_i)$.

不难看出 d 不满足 (8) 中的 (b), 因此, d 不是由范数导出的度量, 即 S 不是赋范空间.

习 题 2.2

1. 证明赋范空间中向量 x 的范数 $\|x\|$ 是从 x 到 θ 的距离.
2. 验证平面上和三维空间中向量长度满足范数公理 (N1) 至 (N4).
3. 若 X 是赋范空间, $x, y \in X$, 则,

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$$

4. 证明: “由 $\|x\|=0$ 推出 $x=0$ ”可代替(N2)
5. 验证2.2-2中的(2)满足(N1)至(N4)。
6. 设 X 是所有有序实数对 $x=(\xi_1, \xi_2)$, $y=(\eta_1, \eta_1), \dots$, 组成的向量空间, 证明,

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$$

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|\xi_1|, |\xi_2|\}$$

均是 X 上的范数。

7. 验证2.2-3中的(3)满足(N1)至(N4)。

8. 证明,

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \dots + |\xi_n|$$

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \dots + |\xi_n|^p)^{1/p} \quad (1 < p < +\infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_n|\}$$

均是 n 个复数有序组全体所组成的向量空间上的范数。

9. 验证2.2-5中的(4)满足(N1)至(N4)。

10. (单位球面) 在赋范空间 X 中, 称集

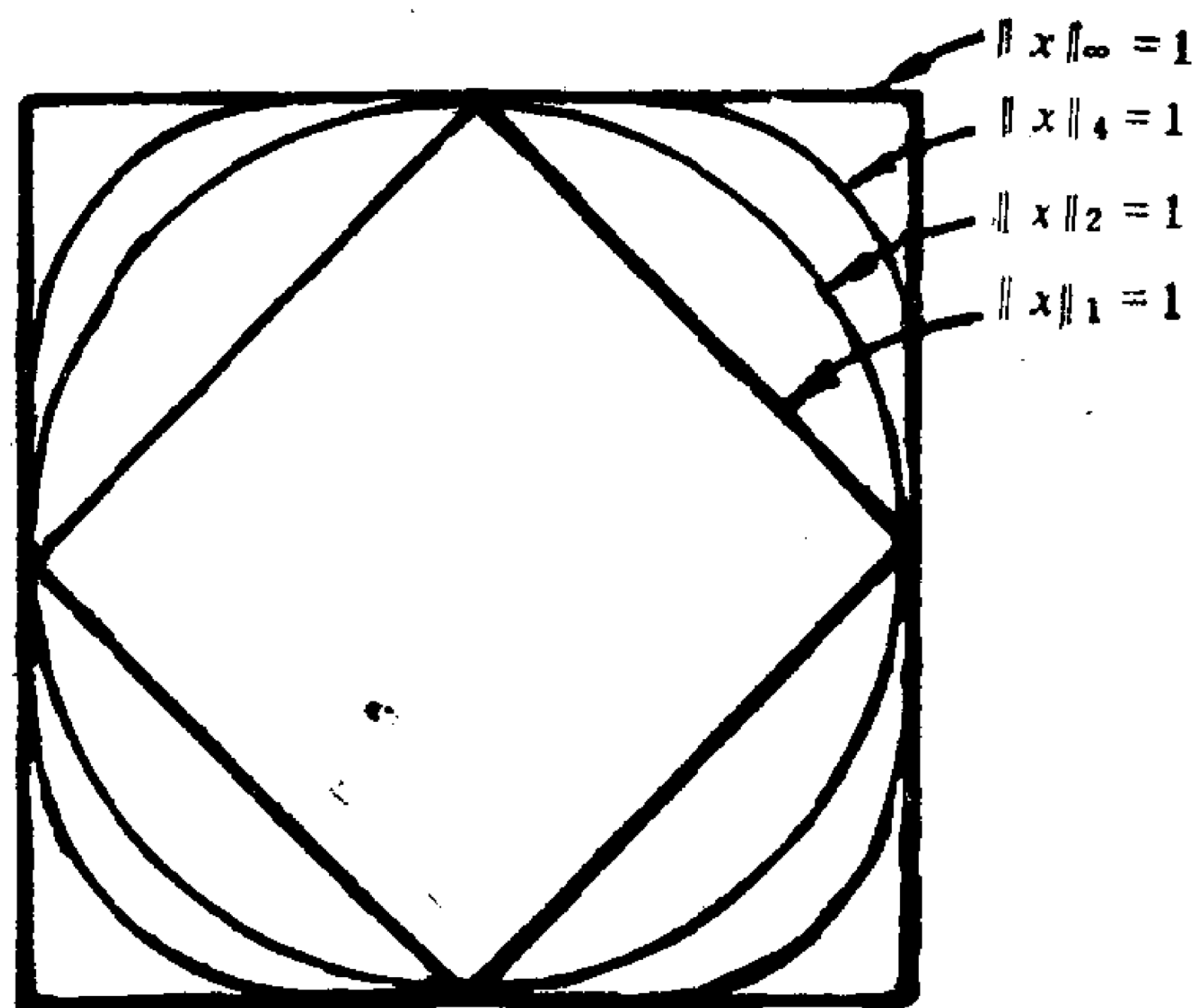


图7 习题10中的单位球面

$$S(\theta, 1) = \{x \mid \|x\| = 1, x \in X\}$$

为单位球面. 试证由习题 6 中各范数及

$$\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{1/4}$$

所确定的单位球面分别如图 7 所示.

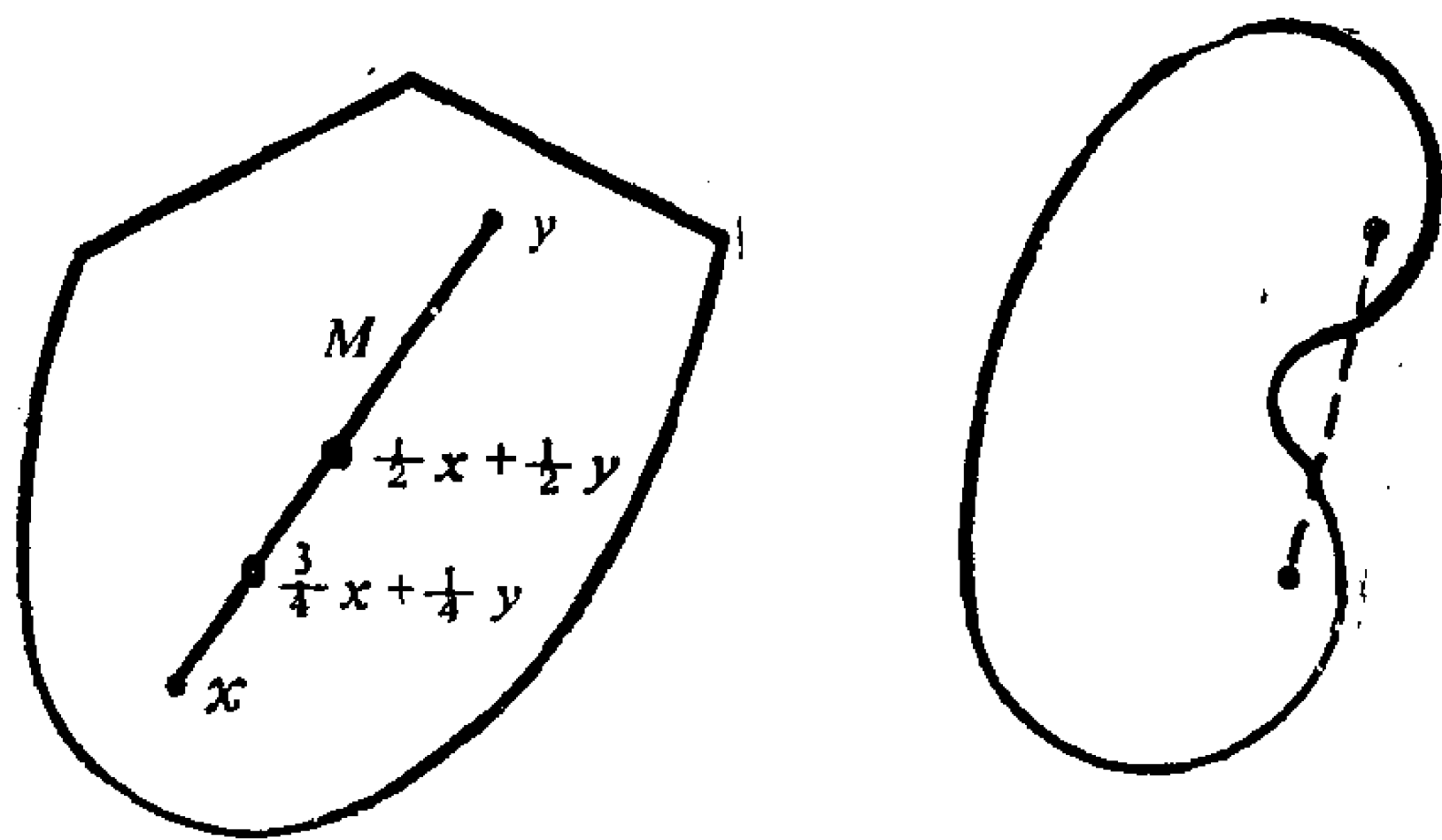
11. (凸集、线段) 设 A 是向量空间 X 的子集, 如果 $x, y \in A$ 蕴涵

$$M = \{z \mid z = ax + (1-a)y, 0 \leq a \leq 1\} \subset A$$

则 A 称为凸集. M 称做以 x, y 为端点的闭线段. 试证在赋范空间中, 闭单位球

$$\widetilde{B}(\theta, 1) = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$$

是凸的.



(a) 凸集 (b) 非凸

图 8 凸集与非凸集的图示

12. 利用习题 11, 证明

$$\varphi(x) = (\sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|})^2$$

不是有序实数对 $x = (\xi_1, \xi_2)$ 所组成的向量空间上的范数 (请参照图 9 中 $\varphi(x) = 1$ 的图形).

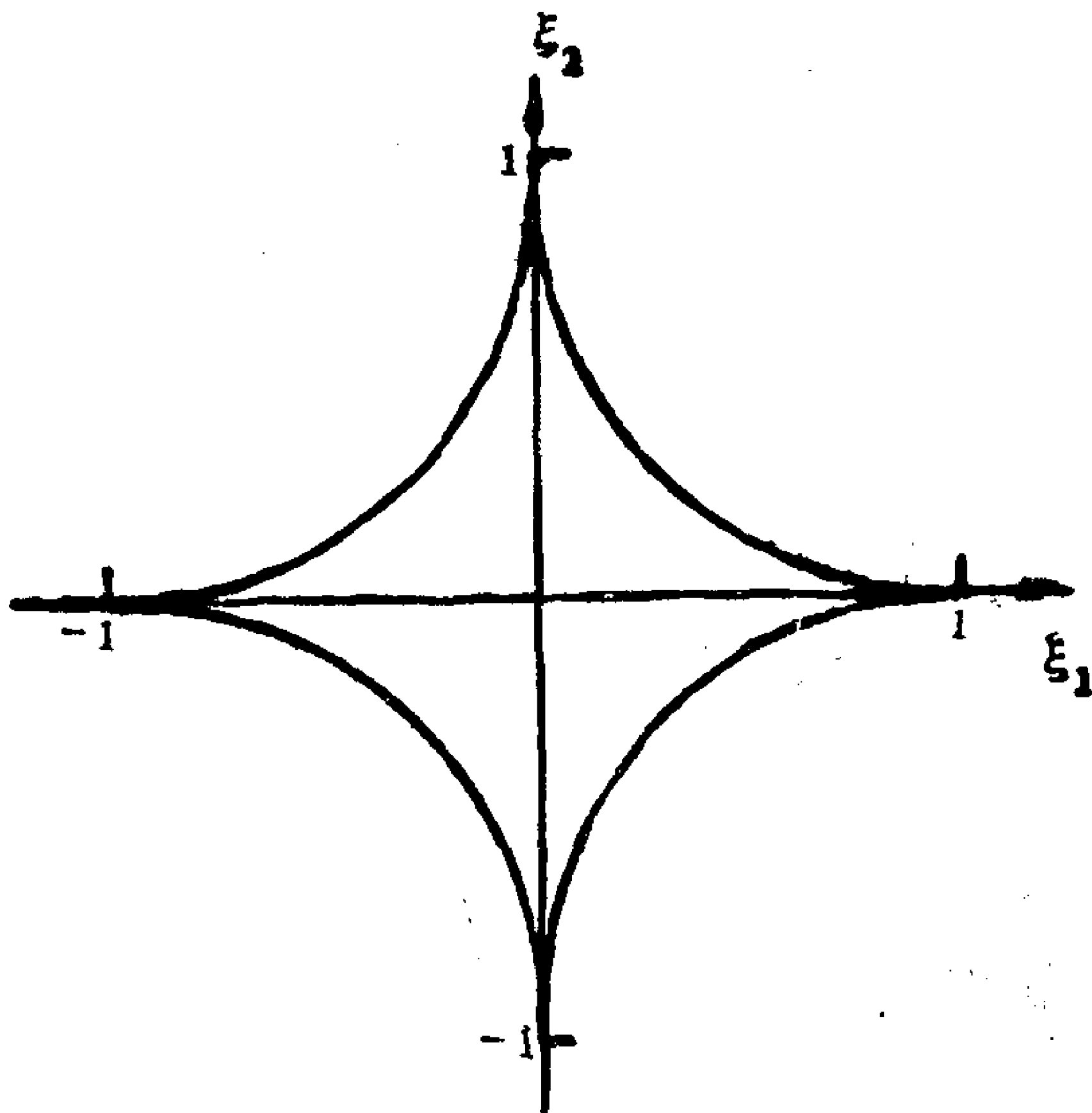


图 9 习题12中 $\varphi(x) = 1$ 的图形

13. 证明向量空间 $X \neq \{\theta\}$ 上的离散度量不能由范数导出。(参阅1.1-2中的例5)

14. 如果 d 是由空间 $X \neq \{\theta\}$ 的范数导出的, 证明

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ d(x, y) + 1 & x \neq y \end{cases}$$

不能由范数导出。

15. (有界集) 证明赋范空间 X 的子集 M 为有界的充要条件是: 存在一个正数 C , 使得对于每个 $x \in M$, 有

$$\|x\| \leq C$$

(有界的定义见习题1.2中的第6题)

§2.3 赋范空间的另一些性质

在赋范空间中, 既有代数运算, 又有极限运算, 因此可

以引进无穷级数的概念.

设 (x_n) 是赋范空间 X 中的序列, 表示式,

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \quad (1)$$

称做赋范空间 X 的无穷级数.

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

称做级数 $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ 的部分和. 如果存在 $S \in X$, 使得

$\|S - S_n\| \rightarrow 0$, 则称级数收敛于 S , S 叫做级数 $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ 的和, 记

作 $S = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$.

如果数项级数 $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ 绝对收敛.

我们提醒读者, 在赋范空间 X 里, 绝对收敛蕴涵收敛当且仅当 X 是完备的 (参看本节习题 5 至 7).

设 (e_n) 是赋范空间 X 中的序列, 如果对于每个 $x \in X$, 存在唯一的数列 (α_n) , 使得

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \rightarrow 0$$

则称 (e_n) 为赋范空间 X 的 Schauder 基.

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

称做 x 关于 (e_n) 的展开.

例如, l^p 有一个 Schauder 基 (e_n) , 这里, $e_n = (\delta_{nj})$, 即 e_n 的第 n 项为 1, 其余各项都为零.

具有 Schauder 基的赋范空间一定是可分的 (参看习题 8), 反之, 可分的赋范空间不一定有 Schauder 基. P. Enflo 于 1973 年构造了一个没有 Schauder 基的可分的 Banach

空间.

因为赋范空间是度量空间, 那么, 关于度量空间完备性的一些结论在赋范空间中仍然成立.

赋范空间 X 的子空间 Y 是指 X 作为向量空间的子空间, 并且 Y 上的范数是 X 的范数在 Y 上的限制. 若 Y 在 X 中是闭的, 则称 Y 是 X 的闭子空间.

Banach空间 X 的子空间 Y 是指 X 作为赋范空间的子空间, 不要求 Y 完备. 利用定理1.4-8得到如下的定理.

2.3-1 定理 (Banach空间的子空间) Banach空间 X 的子空间 Y 为完备的充要条件是集 Y 在 X 中是闭的.

赋范空间 X 中的 (x_n) 是Cauchy序列必须且只须对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad (2)$$

成立.

2.3-2 定义 (同构向量空间、同构的赋范空间) 设 X, Y 是同一数域 K 上的两个向量空间, 如果存在 X 到 Y 的双射 T , 使得对任意 $x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in K$ 有,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 \quad (3)$$

则称 X 与 Y 是同构的向量空间.

同构的赋范空间是指保持范数不变的同构的向量空间, 即, $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ 和(3)都成立.

2.3-3 定理 (完备化) 设 $X = (X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 那么, 存在一个Banach空间 \hat{X} , 使得 X 与 \hat{X} 的一个稠密子空间 W 同构. 且在同构的意义下, \hat{X} 是唯一的.

证明 根据度量空间完备化定理1.6-2, 存在一完备度

量空间 $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$ 和它的一个稠密子集 W , 并存在一等距映射 $A: X \rightarrow W$. 因为这里的 X 是赋范空间, 首先要把 \hat{X} 变成向量空间, 使其 W 为 \hat{X} 的向量子空间; 然后, 在 \hat{X} 上定义范数, 成为赋范空间.

对于 $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$, \hat{x}, \hat{y} 是 X 中 Cauchy 序列的等价类, 任取 $(x_n) \in \hat{x}, (y_n) \in \hat{y}$, 令 $z_n = x_n + y_n$, 由于

$\|z_n - z_m\| = \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$ 则 (z_n) 是 X 中的 Cauchy 序列, 于是 (z_n) 属于某个等价类 \hat{z} . 定义 \hat{x} 与 \hat{y} 的和为,

$$\hat{x} + \hat{y} = \hat{z}$$

\hat{z} 与 \hat{x}, \hat{y} 中代表 $(x_n), (y_n)$ 的选择无关.

类似地, 定义数 α 与 \hat{x} 的数乘为

$$\alpha \hat{x} = \hat{\omega} \quad (\alpha x_n) \in \hat{\omega}$$

$\hat{\omega}$ 与 \hat{x} 中的代表 (x_n) 的选择无关.

不难验证 \hat{X} 是一向量空间. 下面验证 W 是 \hat{X} 的向量子空间且 X 与 W 是同构的向量空间.

对于任意 $\hat{x}, \hat{y} \in W$, $\alpha, \beta \in K$, 则存在 $x, y \in X$ 使得 $(x, x, \dots) \in \hat{x}, (y, y, \dots) \in \hat{y}$, 由 \hat{X} 上两个代数运算的定义知, $(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y, \dots) \in \alpha \hat{x} + \beta \hat{y}$. 从而 $\alpha \hat{x} + \beta \hat{y} \in W$. 即 W 是 \hat{X} 的向量子空间.

对于任意 $x, y \in X, \alpha, \beta \in K$, 映射 $A: X \rightarrow W$ 满足:
 $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. 因此, X 与 W 是同构的向量空间.

在子空间 W 上定义范数

$$\|\hat{x}\|_1 = \hat{d}(\hat{x}, \hat{\theta}) \quad \hat{x} \in W.$$

则 $\|\hat{x}\|_1 = \hat{d}(\hat{x}, \hat{\theta}) = d(x, \theta) = \|x\| \quad x \in X$.

故 X 与 W 是同构的赋范空间. [$\|\cdot\|_1$ 显然满足 (N1) 至 (N4)]

今将 W 上的范数 $\|\cdot\|_1$ 扩充到全空间 \hat{X} . 对于 $\hat{x} \in \hat{X}$, 定义

$$\|\hat{x}\|_2 = \hat{d}(\hat{x}, \hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \theta)$$

$(x_n) \in \hat{x}$,

$\|\cdot\|_2$ 显然满足 (N1) 和 (N2). 由于度量 d 是由范数导出的. 因此, $\|\alpha \hat{x}\|_2 = \hat{d}(\alpha \hat{x}, \hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\alpha x_n, \alpha \theta)$

$= |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \theta) = |\alpha| \|\hat{x}\|_2$, 这里, $(x_n) \in \hat{x}$, 于是

(N3) 得证. 由范数 $\|\cdot\|$ 的三角不等式, 得,

$$\begin{aligned} \|\hat{x} + \hat{y}\|_2 &= \hat{d}(\hat{x} + \hat{y}, \hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n + y_n, \theta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \theta) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, \theta) \\ &= \|\hat{x}\|_2 + \|\hat{y}\|_2, \end{aligned}$$

这里, $(x_n) \in \hat{x}, (y_n) \in \hat{y}$ 故 (N4) 成立. 由于

$$\begin{aligned}
\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n - y_n, \theta) \\
&= \hat{d}(\hat{x} - \hat{y}, \hat{\theta}) \\
&= \|\hat{x} - \hat{y}\|_2
\end{aligned}$$

所以, \hat{d} 是由 $\|\cdot\|_2$ 导出的, 因而, \hat{X} 是一个 *Banach* 空间. 并且

可以证明, 在同构的意义下, \hat{X} 是唯一的

例如, $[a, b]$ 上实值连续函数全体其范数为

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

构成的赋范空间的完备化空间是 *Banach* 空间 $L^2[a, b]$.

对于熟悉 Lebesgue 积分的读者, 我们要指出, $L^2[a, b]$ 也可以用直接方法得到, 即 $L^2[a, b]$ 是由 $[a, b]$ 上 $x(t)^2$ 的 Lebesgue 积分存在且有限的 Lebesgue 可测函数 $x(t)$ 的全体组成的. $L^2[a, b]$ 的元素是函数的等价类, x 等价于 y 是指 $[x(t) - y(t)]^2$ 在 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 积分等于零.

习 题 2.3

1. 证明空间 c 是空间 l^∞ 的向量子空间 (参看 1.5-3), 并且收敛于零的数列全体组成的空间 c_0 也是 l^∞ 的向量子空间.
2. 证明 c_0 是 l^∞ 的闭子空间, 因此 c_0 是完备的.
3. 在 l^∞ 中, 设 Y 是由仅含有限个非零项的序列组成的子集, 证明 Y 是 l^∞ 的子空间, 但不是闭子空间.
4. 证明赋范空间 X 的子空间 Y 的闭包 \overline{Y} 还是 X 的向量子空间.
5. (绝对收敛) 举例说明在一般赋范空间中, 级数的绝对收敛 $\|y_1\| + \|y_2\| + \cdots$ 不蕴涵级数 $y_1 + y_2 + \cdots$ 的收敛. (提示: 考虑习题

8 中的 Y 和 (y_n) , 这里, $y_n = (\eta_i^{(n)})$, $\eta_n^{(n)} = \frac{1}{n^2}$, $\eta_j^{(n)} = 0$,

$(j \neq n)$.

6. 如果在赋范空间 X 中, 任何级数的绝对收敛总蕴涵级数收敛, 证明 X 是完备的.

7. 证明在巴拿赫空间中, 绝对收敛的级数必收敛.

8. (Schauder基) 证明若赋范空间有一Schauder基, 则此空间可分.

9. 设 $e_n = (\delta_{ni})$, 证明 (e_n) 是 l^p 的Schauder基 (这里 $p \geq 1$).

10. (拟范数) 向量空间 X 上拟范数是一映射 $p: X \rightarrow R$, 且满足 §2.2 中的 (N1)、(N3)、(N4), 证明

$$p(\theta) = 0$$

$$|p(y) - p(x)| \leq p(y - x).$$

(因此, 若 $p(x) = 0$ 蕴涵 $x = \theta$, 则 p 是一个范数.)

11. 证明在习题10中, 使得 $P(x) = 0$ 的元素 $x \in X$, 构成 X 的一子空间 N , 并证明, 对于 $\hat{x} \in X/N$, (参见 § 1.2 习题14) $x \in \hat{x}$, $\|\hat{x}\|_0 = P(x)$ 是定义在 X/N 上的范数.

12. (商空间) 设 Y 是赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的闭子空间, 证明. 对于 $\hat{x} \in X/Y$

$$\|\hat{x}\|_0 = \inf_{x \in \hat{x}} \|x\|$$

是 X/Y 上的一个范数.

13. (赋范空间的乘积), 如果 $(Y_1, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X_2, \|\cdot\|_2)$ 是赋范空间, 证明

$$\|x\| = \max \{ \|x_1\|_1, \|x_2\|_2 \} \quad x = (x_1, x_2) \text{ 是乘积空}$$

间 $X = X_1 \times X_2$ 上的范数 $\|\cdot\|$

§2.4 有穷维赋范空间及其子空间

有穷维赋范空间比无穷维赋范空间简单,它具有某些无穷维空间所没有的性质,这些性质对研究许多问题(例如,逼近论、谱论)是很有用的.

下面的引理是推导其他定理的基础.

2.4-1 引理(线性组合) 设 X 为一赋范空间, $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 X 中一线性无关向量集, 则存在一常数 $C > 0$, 使得对于任意一组数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 有

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq C(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) \quad (1)$$

证明. 令 $S = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$, 若 $S = 0$, 则对任意常数 C , (1) 均成立. 设 $S > 0$, 那么, (1) 等价于

$$\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n\| \geq C (\beta_i = \alpha_i / S, \sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1) \quad (2)$$

因此, 只须证 (2) 成立.

用反证法证, 若 (2) 不成立, 则存在序列 (y_m)

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \dots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}| = 1$$

$$\|y_m\| < \frac{1}{m} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

由于 $\sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}| = 1$, 有 $|\beta_i^{(m)}| \leq 1$, ($i = 1, 2, \dots, n$),

即对于每个固定的 $j = 1, 2, \dots, n$, 序列,

$$(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \dots)$$

有界, 根据Bolzano-Weierstrass定理, $(\beta_1^{(m)})$ 有一收敛子序列 $(\beta_1^{(m_k)})$, 令 $\beta_1^{(m_k)} \rightarrow \beta_1$ ($k \rightarrow \infty$), 并令 $(y_{1,m})$ 表示 (y^m) 的相应子序列. 同理 $(\beta_2^{(m_k)})$ 也有一个收敛的子序列, 令 β_2 表示这个子序列的极限, $(y_{2,m})$ 表示 $(y_{1,m})$ 中相应于 $(\beta_2^{(m_k)})$ 的收敛子序列的子列. 这样进行 n 次后, 得到 (y_m) 的子序列 $(y_{n,m})$,

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^n r_j^{(m)} x_j, \quad \sum_{j=1}^n |r_j^{(m)}| = 1$$

这里, $r_j^{(m)} \rightarrow \beta_j$ ($m \rightarrow \infty$) 因此,

$$y_{n,m} \rightarrow y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$$

由 $\sum_{j=1}^n |r_j^{(m)}| = 1$, 得 $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$, 故 β_j ($j=1, 2, \dots, n$) 不全为零,

因为 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 线性无关, 于是, $y \neq \theta$, 另一方面, 由范数连续性, 得 $\|y_{n,m}\| \rightarrow \|y\|$. 但 $\|y_m\| \rightarrow 0$, 所以 $\|y_{n,m}\| \rightarrow 0$, 由数列极限的唯一性, 有 $\|y\| = 0$. 因而, $y = \theta$, 这与 $y \neq \theta$ 矛盾. 因此, 引理得证.

2.4-2 定理(完备性) 赋范空间 X 的每个有穷维子空间 Y 是完备的. 特别是, 有穷维赋范空间是完备的.

证明. 设 $\dim Y = n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 Y 的一个基, (y_m) 是 Y 中任意Cauchy序列. 则每个 y_m 可唯一地表示为

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

由 (y_m) 是Cauchy序列, 故对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 N , 当 $m, r > N$ 时, 有

$$\|y_m - y_r\| < \varepsilon$$

根据引理2.4-1, 存在常数 $c > 0$, 使得

$$c \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| = \|y_m - y_r\| < \varepsilon$$

$(m, r > N)$

因此, 对于每个 j ($j=1, 2, \dots, n$), 有,

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \quad (m, r > N)$$

即 n 个序列

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \dots) \quad j=1, 2, \dots, n$$

中的每一个都是 \mathbf{R} 或 \mathbf{C} 中的 Cauchy 序列, 令 $\alpha_j^{(m)} \rightarrow a_j$ ($m \rightarrow \infty$), 利用这 n 个极限 a_1, \dots, a_n 定义,

$$y = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

则 $y \in Y$, 且,

$$\begin{aligned} \|y_m - y\| &= \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - a_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - a_j| \|e_j\| \\ &\rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

即 $y_m \rightarrow y$, 这就证明了 Y 中任意 Cauchy 序列均在 Y 中收敛, 因此, Y 是完备的.

根据定理 2.4-2 和定理 1.4-8, 立即得出下面定理,

2.4-3 定理 (闭性). 赋范空间 X 的每个有穷维子空间在 X 中是闭的.

值得注意的是, 无穷维子空间不一定是闭的. 例如, $X = C[0, 1]$, $Y = \text{Span}\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ 是所有多项式组成的集, Y 是 $C[0, 1]$ 的子空间但 Y 在 $C[0, 1]$ 中不是闭的 (参看 1.5-7),

有穷维向量空间 X 的另一个重要性质是其上所有范数导出的 X 的拓扑 (参看 § 1.3) 均是相同的, 即 X 上所有开子

集, 与 X 上范数选择无关, 这可从下面看到,

2.4-4 定义(等价范数) 设 X 是向量空间, $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_0$ 是 X 上的两个范数, 如果存在正数 a 和 b , 使得, 对于所有 $x \in X$, 有

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0. \quad (3)$$

则称范数 $\|\cdot\|$ 与范数 $\|\cdot\|_0$ 等价.

2.4-5 定理(等价范数) 在有穷维向量空间 X 上, 任何两个范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_0$ 都是等价的.

证明 设 $\dim X = n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基. 则, 每个 $x \in X$ 可唯一地表示为

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

根据引理2.4-1, 存在常数 $C > 0$, 使得,

$$\|x\| \geq C(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$$

另一方面, 有

$$\|x\|_0 \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leq K \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \quad K = \max_{1 \leq j \leq n} \|e_j\|_0$$

合起来 得

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \quad a = \frac{C}{K}$$

再将两范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_0$ 的位置互换, 就得到(3)中的后一个不等式, 故证得 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_0$ 等价.

这个定理蕴涵有穷维空间中序列的敛散性与范数的选择无关.

习 题 2.4

1. 举出 l^∞ 和 l^2 的非闭子空间的例子.

2. 如果 $X = R^2$, $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1)$; 若 $X = R^3$
 $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1)$, 试分别求出(1)
 中 c 的最大可能值.

3. 在定义2.4-4中, 证明等价关系的诸公理成立.

4. 证明向量空间上由等价范数导出的拓扑是相同的.

5. 若 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_0$ 是向量空间 X 上的等价范数, 证明 $(X, \|\cdot\|)$
 和 $(X, \|\cdot\|_0)$ 中的 Cauchy 序列是相同的.

6. 证明习题2.2的第8题中 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 是等价的 (用定义
 2.4-4直接证明)

7. 设 $\|\cdot\|$ 是习题2.2的第8题中向量空间 X 上的任意范数, 证
 明 (不用定理2.4-5) 存在一个常数 $b > 0$, 使得对所有 $x \in X$, 有
 $\|x\| \leq b \|x\|_2$

8. 证明习题2.2第8题中的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的, 且
 满足,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

9. 如果向量空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_0$ 是等价的, 证
 明 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ 蕴涵 $\|x_n - x\|_0 \rightarrow 0$ (反之亦然).

10. 证明所有复的 $m \times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 构成一 mn 维的向 量
 空间 Z . 证明 Z 上所有范数是等价的. 对于空间 Z , 类似于习题2.2第8题
 中的 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ 都是什么?

§2.5 紧性及有穷维数

有穷维赋范空间及其子空间的另外几个基本性质是与紧
 性有关的, 首先引进紧性的概念.

2.5-1 定义(紧性). 设 X 是度量空间, 如果 X 中的每

① 精确地说 X 是列紧的. 这是分析中最重要一种紧性. 还有另外两种紧性,
 但在度量空间中, 这三种概念是一致的. 参看附录 A1, 5-

个序列都有一个收敛的子序列, 则称 X 是紧①空间, 设 M 是 X 的子集, 若 M 是 X 的紧子空间, 即, M 中的每个序列都有一个收敛的子序列, 其极限是 M 中的一个元素. 则称 M 是紧集.

2.5-2 引理(紧性). 如果 M 为度量空间 X 中的紧子集, 则 M 在 X 中为有界的闭集,

证明 (a) 证 M 为闭的. 对于每个 $x \in \overline{M}$, 根据定理1.4-7 (a), M 中必存在序列 (x_n) , 使得, $x_n \rightarrow x$, 因为 M 是紧的. 则 $x \in M$, 故 M 为闭的.

(b) 证 M 有界, 若 M 无界, 对于固定的 $y_0 \in M$ 和自然数 n , 存在 $y_n \in M$, 使得 $d(y_n, y_0) > n$, 即 (y_n) 是 M 中的无界序列, 根据定理1.4-2, (y_n) 不含任何收敛的子序列, 这与 M 是紧集矛盾, 因而, M 有界.

例如, R 中的区间 $(0, 1)$ 是非紧集. R 中的自然数集 $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 也是非紧集. 而区间 $[0, 1]$ 是 R 中的紧集.

对于有穷维赋范空间, 引理2.5-2的逆亦成立.

2.5-3 定理(紧性). 在有穷维赋范空间 X 中, 任何子集 M 为紧的充要条件是 M 为有界闭集.

证明 只须证有界闭性蕴涵紧性. 设 $\dim X = n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基, (x_m) 是 M 中任意序列则 x_m 有唯一表示式

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \dots + \xi_n^{(m)} e_n$$

因为 M 有界, 对所有 m , 有, $\|x_m\| \leq K$ (K 是常数), 由引理2.4-1, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$C \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(m)}| \leq \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j^{(m)} e_j \right\| = \|x_m\| \leq K$$

因此, 对于每个固定的 j , 数列 $(\xi_j^{(m)})$ 是有界的, 根据Bolzano-

Weierstrass-定理, 存在一聚点 $\xi_j, 1 \leq j \leq n$. 令 $z = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, 和证明引理2.4-1一样. (x_n) 有一子序列收敛于 z , 因为 M 是闭的, 于是 $z \in M$, 这就证明了 M 是紧的.

对于无穷维赋范空间, 有界闭集不一定是紧的, 例如, l^2 中的点集 $\{e_n\}$, $e_n = (\delta_{nj})$, 因为 $\|e_n\| = 1$, 故 $\{e_n\}$ 有界. 对于任意自然数 $m, n, m \neq n$, 那么, $\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$. 所以 $\{e_n\}$ 没有聚点, 于是 $\{e_n\}$ 是闭集, 但不是紧集.

还有一些结果是从F. Riesz引理推导出来的, 为此, 先介绍F. Riesz引理.

2.5-4 黎斯(F. Riesz)引理. 设 X 是赋范空间(X 是任意维的), Y 和 Z 是 X 的子空间, Y 是闭的, 且 Y 又是 Z 的真子空间, 那么, 对于区间 $(0, 1)$ 内的每个实数 θ , 存在 $z \in Z, \|z\| = 1$, 使得

$$\|z - y\| \geq \theta \quad \text{所有 } y \in Y$$

证明 任意 $v \in Z - Y$ 到 Y 的距离为

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|$$

由于 Y 是闭的, 则 $a > 0$, 根据下确界定义, 存在一个 $y_0 \in Y$, 使得,

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta} \quad (1)$$

令, $z = c(v - y_0)$, $c = \|v - y_0\|^{-1}$, 于是, $\|z\| = 1$ 对于每个 $y \in Y$,

$$\|z - y\| = \|c(v - y_0) - y\| = c \|v - y_0 - \frac{1}{c} y\|$$

$$= c \|v - y_1\|$$

这里, $y_1 = y_0 + \frac{1}{c} y \in Y$, 因此, $\|v - y_1\| \geq a$,

$$\|z - y\| = c \|v - y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq \frac{a}{a/\theta} = \theta$$

对于所有 $y \in Y$ 均成立. 从而, 引理证毕.

由 F. Riesz 引理可得
出下面这个十分有用的定理.

2.5-5 定理 (有穷维数). 赋范空间 X 中的闭单位球 $\tilde{B} = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ 如果是紧的, 则 X 是有穷维的.

证明 假定 \tilde{B} 是紧的, $\dim X = \infty$, 选 $x_1 \in X$ $\|x_1\| = 1$, 令由 x_1 生成的 X 的真子空间为 X_1 ,

根据定理 2.4-3, X_1 是闭的. 因为 $\dim X = \infty$, 由 F. Riesz 引理, 必存在 $x_2 \in X$, $\|x_2\| = 1$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2},$$

令由 x_1, x_2 生成的 X 的二维闭的真子空间为 X_2 , 再利用 F. Riesz 引理, 存在 $x_3 \in X$, $\|x_3\| = 1$, 使得对于所有 $x \in X_2$, 有,

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$$

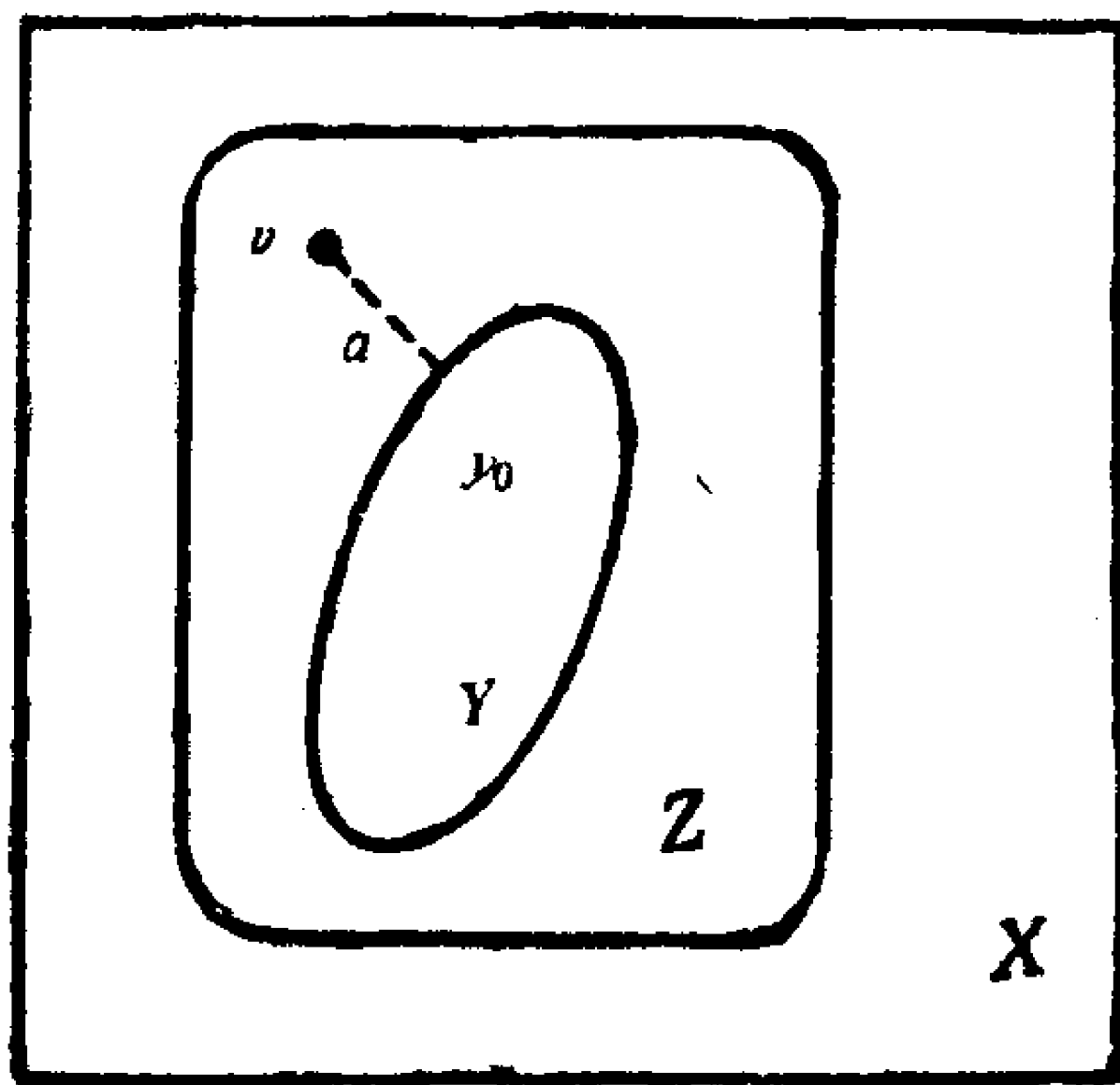


图10 Riesz引理证明图示

特别地,

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$$

$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$$

依此类推, 可得序列 $(x_n) \subset \tilde{B}$. 当 $m \neq n$ 时,

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$$

因此, (x_n) 不可能有收敛的子序列, 这与 \tilde{B} 是紧的矛盾, 于是证得 $\dim X < \infty$

紧集有些很好的属性, 与连续映射有关的一个基本性质是紧集有紧的映象.

2.5-6定理 (连续映射). 设 X, Y 是度量空间, $T: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 则 X 的紧子集 M 的象 $T(M)$ 在 Y 中是紧的.

证明 设 (y_n) 是 $T(M)$ 中任意序列, 必存在 $x_n \in M$, 使得, $y_n = Tx_n$, 因为 M 是紧的, (x_n) 有一个子序列 (x_{n_k}) 在 M 中收敛, 由于 T 是连续的, 利用定理 1.4-9, 则 (Tx_{n_k}) 是 (y_n) 的子序列且在 $T(M)$ 中收敛. 故 $T(M)$ 是紧的.

分析中, 闭区间上的连续函数取得最大、最小值这一性质可以移植到度量空间的紧集上.

2.5-7 推论 (最小值和最大值). 设 X 是度量空间, M 是 X 的紧子集, $T: M \rightarrow R$ 是连续映射, 则 T 在 M 上取得最小、最大值.

证明. 根据定理 2.5-6, $T(M)$ 是 R 中的紧集, 由引理

2.5-2, $T(M)$ 是有界闭集. 因此, $\inf T(M)$ 、 $\sup T(M)$ 存在且 $\inf T(M) \in T(M)$, $\sup T(M) \in T(M)$, 即存在 $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, 使得, $\inf T(M) = Tx_1$, $\sup T(M) = Tx_2$. 于是证得 Tx 在 x_1 、 x_2 处分别取最小、最大值.

习 题 2.5

1. 证明 R^n 和 C^n 不是紧空间.
2. 证明由无穷多个点组成的离散度量空间 (参看 1.1-2 中例 5) X 不是紧空间.
3. 在 R^2 平面上, 举出紧和非紧曲线的例子.
4. 证明序列空间 S 中的无穷子集 M 为紧的必要条件是: 存在数 v_1, v_2, \dots , 使得对于所有 $x = (\xi_k(x)) \in M$, 有 $|\xi_k(x)| \leq v_k$ (可以证明此条件也是 M 为紧的充分条件.)
5. (局部紧) 如果度量空间 X 的每个点都有一个紧邻域, 则称 X 是局部紧的. 证明 R, C, R^n, C^n 均是局部紧空间.
6. 证明紧度量空间是局部紧的.
7. 在 Riesz 引理 2.5-4 中, 若 $\dim Y < \infty$, 证明 θ 也可以选为 1.
8. 在习题 2.4 第 7 题中, 直接证明 (不用 2.4-5) 存在 $\alpha > 0$, 使得 $\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|$ (利用 2.5-7)
9. 如果 X 是紧度量空间, M 是 X 的闭子集, 证明 M 是紧的.
10. 设 X, Y 是度量空间, X 是紧的, $T: X \rightarrow Y$ 是连续的双射, 证明 T 是一同胚 (习题 1.6 第 5 题)

§2.6 线 性 算 子

在微积分中, 我们曾研究过实直线 R 上 (或 R 的子集上) 的实值函数, 这样的函数是从它的定义域到 R 中的映射. 在泛函分析中, 我们要研究一般空间之间的映射.

向量空间到向量空间的映射称做算子。其中我们特别感兴趣的是保留向量空间两种代数运算的算子，这就是本节所要讨论的线性算子。

2.6-1 定义(线性算子) 设 X 、 Y 是同一数域 K 上的两个向量空间，如果算子 T 满足：

(i) T 的定义域 $D(T)$ 是 X 的向量空间， T 的值域 $R(T)$ 包含在 Y 中。

(ii) 对于所有 $x, y \in D(T)$ ，任意 $\alpha \in K$ ，有，

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

(1)

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

成立，则称 T 是线性算子。

公式(1)表明线性算子 T 是从一个向量空间(T 的定义域)到另一个向量空间中的同态。即 T 在下述意义下保留了向量空间的两个运算，先在(1)的左边作向量空间的运算(加法和数乘)然后将所得向量映射到 Y 中。而在右边，先将向量 x 、 y 映射到 Y 中，后在 Y 中作向量运算其结果相等，这一性质非常重要。

公式(1)等价于，

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad x, y \in D(T), \alpha, \beta \in K \quad (2)$$

我们给出线性算子的例子，算子的线性性质留给读者验证。

2.6-2 恒等算子. 设 X 是向量空间，称映射

$$I : x \mapsto x$$

是 X 上的恒等算子。 I 是线性算子。

2.6-3 零算子. 设 X 是向量空间，称映射

$$0: x \mapsto \theta$$

是零算子, 零算子是线性算子.

2.6-4 微分算子. 设 $P[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上所有多项式组成的向量空间. 微分算子

$$T: x(t) \mapsto \frac{dx}{dt}$$

是 $P[a, b]$ 上的一个线性算子.

2.6-5 积分. 通过

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau \quad t \in [a, b]$$

定义一个从 $C[a, b]$ 到自身中的线性算子 T .

2.6-6 用 t 作的乘法. 通过

$$Tx(t) = tx(t)$$

定义的算子 $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 是线性的.

2.6-7 R^3 上的叉积和点积. 设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 R^3 中一固定向量, 对任一向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 由

$$T_1 x = \alpha \cdot x = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3$$

$$T_2 x = \alpha \times x$$

定义的算子 $T_1: R^3 \rightarrow R$ 和算子 $T_2: R^3 \rightarrow R^3$ 都是线性算子.

2.6-8 矩阵. 一个 r 行 n 列矩阵 $A = (a_{ij})$ 通过

$$y = Ax, \quad x = (\xi_j) \in R^n, \quad y = (\eta_j) \in R^r$$

定义的算子 $T: R^n \rightarrow R^r$ 是线性算子.

现在, 我们来讨论线性算子的一些性质.

首先, 讨论有穷维向量空间到有穷维向量空间的线性算子与矩阵的关系.

设 X, Y 是同一数域 K 上的向量空间, 且 $\dim X = n$,

$\dim Y = r$, 那么,

(i) 任何 $r \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示一个 n 维向量空间 X 到 r 维向量空间 Y 的线性算子.

(ii) n 维向量空间 X 到 r 维向量空间 Y 的线性算子可用一个 $r \times n$ 矩阵表示.

证明. (i) 在 X 中选定一个基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 在 Y 中选定一个基 $\{b_1, \dots, b_r\}$, 对于 $x \in X$, 有 $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, 利用矩阵乘法.

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

求得 r 个数 η_1, \dots, η_r , 定义

$$Tx = y = \sum_{i=1}^r \eta_i b_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right) b_i$$

根据矩阵乘法的线性性, 则 T 是 X 到 Y 的线性算子.

(ii) 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{b_1, \dots, b_r\}$ 分别是 X , Y 的一个固定基 (其顺序也是固定的) 则,

$$Te_j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} b_i, \quad \text{对 } x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j, \quad Tx = y = \sum_{i=1}^r \eta_i b_i,$$

由

$$Tx = \sum_{j=1}^n \xi_j Te_j = \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\sum_{i=1}^r \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right) b_i$$

得, $\eta_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \xi_j, \quad i=1, 2, \dots, r$. 即 T 可用 $A = (\alpha_{ij})$ 表示

在(1)中取 $\alpha = 0$, 得出线性算子的第二个性质: $T\theta = \theta$
但一般地, $Tx = \theta$ 不一定有 $x = \theta$.

$$N(T) = \{x \mid Tx = \theta, x \in D(T)\}.$$

称为线性算子 T 的零空间.

线性算子的另一个性质是其值域和零空间都是向量空间.

2.6-9 定理 (值域和零空间). 设 T 是线性算子, 那么,

(a) 值域 $R(T)$ 是向量空间.

(b) 若 $\dim D(T) = n < \infty$, 则,

$$\dim R(T) \leq n.$$

(c) 零空间 $N(T)$ 是向量空间.

证明. (a) 任取 $y_1, y_2 \in R(T)$, $\alpha, \beta \in K$, 存在 $x_1, x_2 \in D(T)$, 使得, $y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2$, 由于 $D(T)$ 是向量空间, 得, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$, 于是 $T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T)$.
因为 T 是线性的, 有

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

因此, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$. 这就证明了 $R(T)$ 是向量空间.

(b) 任取 $R(T)$ 中 $n+1$ 个向量 y_1, \dots, y_{n+1} , $D(T)$ 中存在 x_1, \dots, x_{n+1} , 使得 $y_1 = Tx_1, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$, 由于 $\dim D(T) = n$, 集 $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ 必线性相关, 因此, 存在不全为零的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, 使得

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \theta$$

由于 T 是线性的, 且 $T\theta = \theta$, 有

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = \theta$$

即, $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ 是线性相关的, 根据定义,
 $\dim R(T) \leq n$.

(c) 任取 $x_1, x_2 \in N(T)$, 则, $Tx_1 = \theta$, $Tx_2 = \theta$. 对于任何数 α, β , 因为 T 是线性的, 有

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \theta \quad (3)$$

即, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$. 因此, $N(T)$ 是向量空间

下面我们来研究线性算子的逆, 如果线性算子 $T: D(T) \rightarrow Y$ 对于任意 $x_1, x_2 \in D(T)$, 有

$$x_1 \neq x_2 \text{ 蕴涵 } Tx_1 \neq Tx_2 \quad (4)$$

则称 T 是单射的或称一对一的.

显然 (4) 等价于

$$Tx_1 = Tx_2 \text{ 蕴涵 } x_1 = x_2 \quad (4^*)$$

此时 T 的逆算子

$$T^{-1}: R(T) \rightarrow D(T) \quad (5)$$

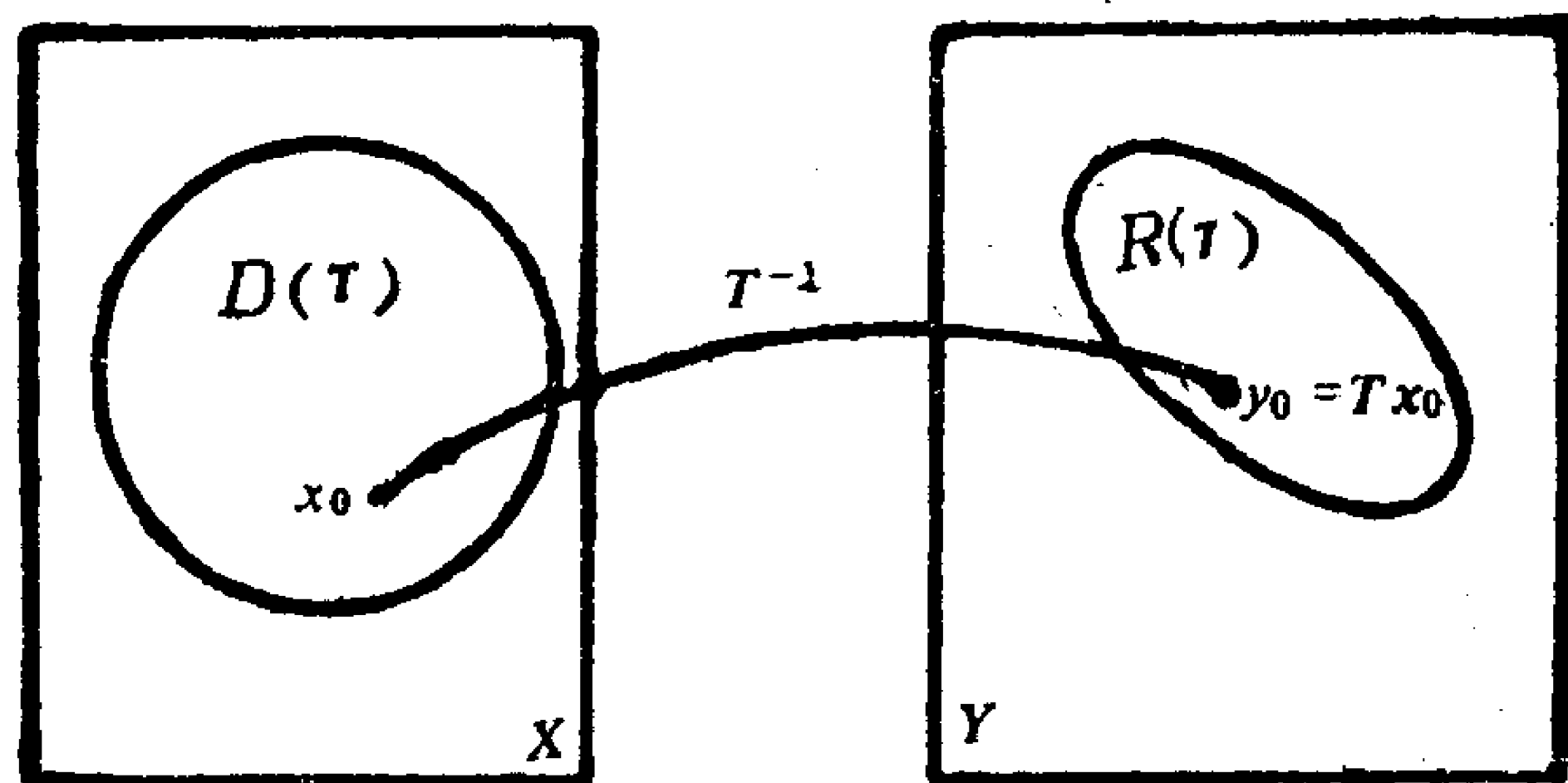


图11 (5) 中逆映射的表示

$$y \longmapsto x \quad Tx = y$$

存在.

由(5)得,

$$T^{-1}Tx = x, \quad \text{对于每个 } x \in D(T)$$

$$TT^{-1}y = y \quad \text{对于每个 } y \in R(T).$$

对于向量空间的线性算子, 其逆存在的充要条件是零空间仅由零向量组成.

2.6-10 定理 (逆算子). 设 X, Y 是同一数域 K 上的向量空间. $T: D(T) \rightarrow Y$ 是线性算子, 其值域 $R(T)$ 包含在 Y 中, 定义域 $D(T) \subset X$, 那么,

(a) $T^{-1}: R(T) \rightarrow D(T)$ 存在的充要条件是

$$Tx = \theta \text{ 蕴涵 } x = \theta.$$

(b) 若 T^{-1} 存在, 则 T^{-1} 是线性的.

(c) 若 $\dim D(T) = n < \infty$. T^{-1} 存在, 则,

$$\dim R(T) = \dim D(T)$$

证明 (a) 假设 $Tx = \theta$ 蕴涵 $x = \theta$, 设, $Tx_1 = Tx_2$, 由于 T 是线性的, 有

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = \theta$$

由假设知, $x_1 - x_2 = \theta$, 即 $x_1 = x_2$, 因此,

$Tx_1 = Tx_2$ 蕴涵 $x_1 = x_2$, 由 (4*) 知 T^{-1} 存在. 反之, 若 T^{-1} 存在, 则 (4*) 成立, 在 (4*) 中令 $x_2 = \theta$ 得, $Tx_1 = \theta$ 蕴涵 $x_1 = \theta$. 因此 (a) 得证.

(b) 假定 T^{-1} 存在, 任取 $y_1, y_2 \in R(T)$. 则存在 $x_1, x_2 \in D(T)$, 使得, $y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2$. 于是, $x_1 = T^{-1}y_1, x_2 = T^{-1}y_2$, 对于任意数 α, β . 由于 T 是线性的, 有,

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

因此,

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$$

又 T^{-1} 的定义域 $D(T^{-1}) = R(T)$ 是向量空间[根据定理2.6-9(a)], 故证得 T^{-1} 是线性算子.

(c) 由定理2.6-9(b), 有, $\dim R(T) \leq \dim D(T)$, 对于 T^{-1} , 有 $\dim R(T^{-1}) \leq \dim D(T^{-1})$, 而 $\dim R(T^{-1}) = \dim D(T)$, $\dim D(T^{-1}) = \dim R(T)$. 因此, 证得, $\dim R(T) = \dim D(T)$.

最后, 我们给出线性算子乘积的逆的公式.

2.6-11 定理 (算子乘积的逆). 设 X, Y, Z 是向量空间, $T: X \rightarrow Y$ 和 $S: Y \rightarrow Z$ 是双射线性算子, 那么, 乘积 ST 的逆 $(ST)^{-1}$ 存在, 且, (6)

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

证明. 由于 T, S 都是双射线性算子, 则 T^{-1}, S^{-1} , 均存在, 且 ST 也是双射的, 于是 $(ST)^{-1}$ 存在,

$$ST(ST)^{-1} = I_Z$$

这里, I_Z 是空间 Z 上的恒等算子.

因此, 得,

$$\begin{aligned} S^{-1}ST(ST)^{-1} \\ = S^{-1}I_Z = S^{-1}, \text{ 由} \end{aligned}$$

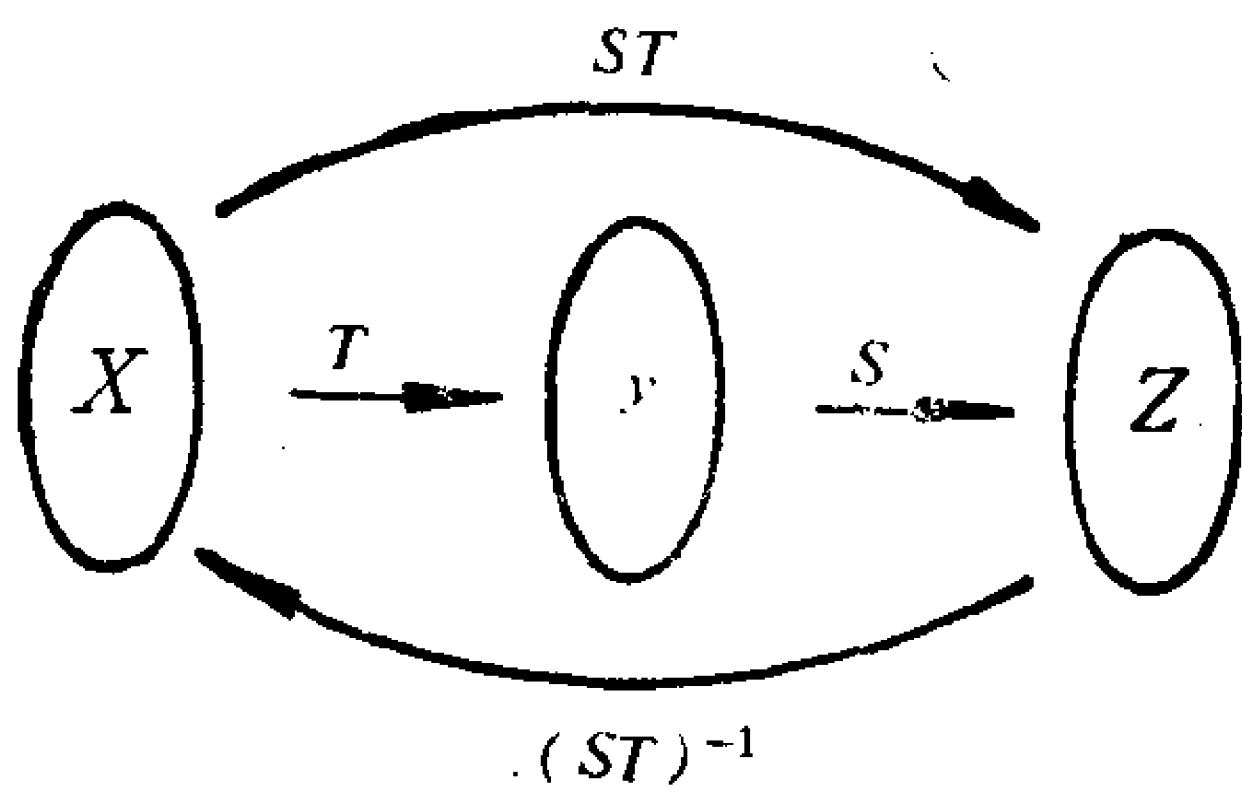
$$S^{-1}S = I_Y$$

有, $T(ST)^{-1} = S^{-1}$

图12 定理2.6-11的图示

再将 T^{-1} 左乘上式两边, 利用 $T^{-1}T = I_X$, 从而证得,

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$



习 题 2.6

1. 验证2.6-2, 2.6-3和2.6-4中的算子均是线性的.

2. 证明, 分别由

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (0, \xi_2)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, \xi_1)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (r\xi_1, r\xi_2)$$

定义的从 R^2 到 R^2 中的算子 T_1, \dots, T_4 均是线性的, 并从几何上解释这些算子.

3. 指出习题2中的 T_1, T_2, T_3 的定义域、值域和零空间都是什么?

4. 分别指出习题2中的 T_4 , 2.6-4中的 T , 2.6-7中的 T_1 和 T_2 的零空间都是什么?

5. 设 V, W 分别是向量空间 X, Y 的向量子空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 证明 $T(V)$ 和 $T^{-1}(W)$ 均是向量空间.

6. 若两个线性算子的积存在, 证明它是线性的.

7. (可交换性) 设 X 是向量空间, $S: X \rightarrow X, T: X \rightarrow X$ 是任意算子, 若 $ST = TS$, 则称 S 和 T 是可交换的. 试问习题2中的 T_1 和 T_3 可交换吗?

8. 用2行2列的方阵表示习题2中的各算子.

9. 在2.6-8中, 用分量形式写出 $y = Ax$, 并证明 T 是线性的.

10. 设 X 是由所有 2×2 阶的复矩阵组成的向量空间, $b \in X$ 是一固定矩阵, 用乘积 $Tx = bx$ 定义 $T: X \rightarrow X$, 证明 T 是线性的, T^{-1} 在什么条件下存在?

11. 2.6-4中的 T^{-1} 存在吗?

12. 设 $T: D(T) \rightarrow Y$ 是线性算子, 其逆存在, 如果 $\{x, \dots, x_n\}$ 是 $D(T)$ 中的线性无关集, 证明 $\{Tx_1, \dots, Tx_n\}$ 也是线性无

关的.

13. 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 并且, $\dim X = \dim Y = n < \infty$, 证明 $R(T) = Y$ 的充要条件是 T^{-1} 存在.

14. 设 X 是 R 上处处具有所有阶导数的实值函数构成的向量空间, 用 $y = Tx = x'(t)$, 定义 $T: X \rightarrow X$, 证明 $R(T) = X$, 但 T^{-1} 不存在. 对照习题13解释之.

§2.7 有界线性算子

前一节介绍的算子, 只与空间的代数运算有关, 现在, 我们考虑算子与范数的联系.

2.7-1 定义(有界线性算子) 设 X, Y 是同一数域 K 上的赋范空间, $T: D(T) \rightarrow Y$ 是线性算子, $D(T) \subset X$. 如果存在常数 $c > 0$, 使得对于一切 $x \in D(T)$, 有,

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad (1)$$

或简记为, $\|Tx\| \leq c \|x\|$.

那么, 称 T 是有界线性算子. 否则称 T 为无界算子.

值得注意的是有界算子的定义与微积分中函数有界的定义是不一致的. 微积分中, 有界函数是指值域有界而言. 这里的有界线性算子是指 $D(T)$ 中的有界集其象在 Y 中亦为有界集的那种算子. 例如, $f(x) = x$ 是 R 到 R 的有界线性算子, 但不是 R 上的有界函数.

由(1)式, 有 $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$. ($x \neq \theta$) 因此, 数集

$\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \in D(T), x \neq 0 \right\}$ 存在上确界, 且,

$\sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < +\infty$, 将此数定义成 T 的范数, 即

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (2)$$

如果 $D(T) = \{\theta\}$, 我们定义 $\|T\| = 0$, 此时, $T = 0$.

由(2)得, $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$, 从而, 有

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \quad x \in D(T) \quad (3)$$

对于 $x, y \in D(T)$, 利用下列不等式,

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x \neq \theta \\ \|x\| \leq 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \geq$$

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{y \neq \theta} \left\| T \frac{y}{\|y\|} \right\| = \|T\|.$$

从而, 得

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \quad (4)$$

2.7-2 恒等算子. 赋范空间 $X \neq \{\theta\}$ 上的恒等算子 I :

$X \rightarrow X$ 是有界算子且易证 $\|I\| = 1$.

2.7-3 零算子. 赋范空间 X 上的零算子 0 是有界的且范数 $\|0\| = 0$.

2.7-4 积分算子. 通过

$$y(t) = Tx = \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

定义一积分算子 $T: \hat{C}[0, 1] \rightarrow \hat{C}[0, 1]$. 这里的 $K(t, \tau)$ 是定义在 $G = J \times J$ 上的连续函数, $J = [0, 1]$. 由于 $K(t, \tau)$ 在闭域 G 上连续, 则它有界, 即存在常数 k_0 , 使得对一切 $(t, \tau) \in G$, 有

$$|K(t, \tau)| \leq k_0.$$

又
$$|x(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| = \|x\|.$$

因此,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \max_{t \in J} \left| \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \max_{t \in J} \int_0^1 |K(t, \tau)| \|x(\tau)\| d\tau \\ &\leq k_0 \|x\|. \end{aligned}$$

从而, T 是有界的.

2.7-5 矩阵. r 行 n 列实矩阵 $A = (\alpha_{jk})$ 通过,

$$y = Ax \quad x = (\xi_j) \in R^n, \quad y = (\eta_j) \in R^r \quad (5)$$

定义一算子 $T: R^n \rightarrow R^r$. 下面证明 T 有界.

R^n 上的范数为

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^{1/2}$$

用分量形式表示 (5), 得,

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k \quad (5')$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{j=1}^r \eta_j^2 = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k \right)^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^r \left[\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right)^{1/2} \right]^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2 \right) \|x\|^2$$

令, $C^2 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2$, 则, $\|Tx\| \leq C\|x\|$. 证毕.

不是所有线性算子都是有界的, 今举一个无界的线性算子.

2.7-6 微分算子. 设 $P[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上所有多项式(包括0)构成的赋范空间, 其范数为

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$$

通过,

$$Tx(t) = x'(t)$$

在 $P[0,1]$ 上定义微分算子是线性的, 但不是有界的. 事实上, 选 $x_n(t) = t^n$, 则, $\|x_n\| = 1$, 且

$$Tx_n(t) = x'_n(t) = nt^{n-1}$$

于是, $\|Tx_n\| = n$, $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n$, 这说明不存在固定的正数 c ,

使得, $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \leq c$. 故 T 无界.

有界线性算子有下面一些性质.

2.7-7 定理. 设 X, Y 是赋范空间, $T: D(T) \rightarrow Y$ 是线性算子, 这里 $D(T) \subset X$. 那么, T 为有界的充要条件是 T 将 $D(T)$ 中的每一个有界集映成 Y 中的有界集.

证明 必要性, 设 $B \subset D(T)$ 是有界集, 即存在常数 $K > 0$, 对于任意 $x \in B$. 有, $\|x\| \leq K$. 由于 T 有界, 有常数 $c > 0$, 使得对于每一个 $x \in B$, 下式成立.

$$\|Tx\| \leq c \|x\| \leq cK$$

故, $T(B)$ 有界.

充分性. 假设 T 将 $D(T)$ 中的每一个有界集映成 Y 中的有界集. 由于单位球面

$$S = \{x \mid \|x\| = 1, x \in D(T)\}$$

是 $D(T)$ 中的有界集, 因此, 有,

$$\|Tx\| \leq c \quad \text{任意 } x \in S.$$

这里的 c 为常数. 从而对于任意 $x \in D(T)$, $x \neq \theta$

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq c.$$

成立. 由于 T 是线性的, 于是

$$\|Tx\| \leq c \|x\|$$

对于 $x = \theta$ 此式也成立. 因而, T 有界.

2.7-8 定理(有穷维数). 如果赋范空间 X 是有穷维的, 则 X 上的每一个线性算子均是有界的.

证明. 设 T 是 X 上的任意一个线性算子, $\dim X = n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基, 对于任意 $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, 由于 T 是线性的, 有,

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j| \|T e_j\|$$

$$\leq \max_K \|T e_K\| \sum_{j=1}^n |\xi_j|$$

根据引理2.4-1, 存在常数 $c > 0$, 使得

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|$$

因此,

$$\|Tx\| \leq K \|x\| \quad K = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

故 T 是有界的.

2.7-9 定理 (连续性). 设 X, Y 是赋范空间, T 是 $D(T) \subset X$ 到 Y 的线性算子, 如果 T 在某一点 $x_0 \in D(T)$ 连续, 则 T 在 $D(T)$ 上是连续的.

证明 对于任意 $x \in D(T)$. 若 $x_n \in D(T)$, $x_n \rightarrow x$, 那么, $x_n - x \rightarrow \theta$, $x_0 + (x_n - x) \rightarrow x_0$. 由于 T 在 x_0 连续, 于是, $\|T[x_0 + (x_n - x)] - Tx_0\| \rightarrow 0$, 因为 T 为线性, 即有 $\|T(x_n - x)\| = \|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$, 从而证得,

$x_n \rightarrow x$ 蕴涵 $Tx_n \rightarrow Tx$, 根据定理1.4-9, T 在 x 点连续, 由于 $x \in D(T)$ 是任意的. 因此, T 是连续的.

2.7-10 定理 (连续性与有界性). 设 X, Y 是赋范空间, T 是 $D(T) \subset X$ 到 Y 的线性算子, 则 T 为连续的充要条件是 T 有界.

证明 必要性. 假设 T 在 $D(T)$ 上连续, 那么, T 在 $\theta \in D(T)$ 是连续的. 因此对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得满足 $\|x - \theta\| = \|x\| < \delta$ 的所有 $x \in D(T)$, 有

$$\|Tx - T\theta\| = \|Tx\| < \varepsilon$$

任取 $y \in D(T)$, $y \neq \theta$, 令 $x = \frac{\delta}{2\|y\|} y$ 则

$\|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, 由于 T 是线性的, 于是

$$\|Tx - T\theta\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|y\|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\| < \varepsilon$$

即 $\|Ty\| \leq c\|y\| \quad c = \frac{2\varepsilon}{\delta}$

对于 $y = \theta$ 上述等式亦成立. 故证得 T 有界.

充分性. 设 T 有界, 存在常数 $c > 0$, 对于一切 $x \in D(T)$, 有, $\|Tx\| \leq c\|x\|$, 任取 $(x_n) \in D(T)$, $x_n \rightarrow \theta$, 则 $\|Tx_n\| \leq c\|x_n\| \rightarrow 0$. 由 $T\theta = \theta$, 即, $\|Tx_n - T\theta\| \rightarrow 0$. 因此, T 在 $\theta \in D(T)$ 连续, 根据定理 2.7-9, T 连续.

定理 2.7-10 揭示了线性算子的一个重要性质——连续性和有界性是等价的.

2.7-11 推论 (零空间). 设 T 是有界线性算子, 则零空间 $N(T) \subset D(T)$ 是闭的.

证明 对于每个 $x \in \overline{N(T)} \subset D(T)$, 根据定理 1.4-7 (a). 存在 $(x_n) \subset N(T)$, 使得 $x_n \rightarrow x$, 由于 T 有界, 利用定理 2.7-10, T 是连续的, 故 $Tx_n \rightarrow Tx$, 又, $Tx_n = \theta$. 所以, $Tx = \theta$. 即, $x \in N(T)$. 从而证得 $N(T)$ 是闭的.

2.7-12 定理 (有界线性扩张). 设 X 是赋范空间, Y 是巴拿赫空间, T 是 $D(T) \subset X$ 到 Y 的有界线性算子, 则 T 具有有界线性扩张

$$\tilde{T}: \overline{D(T)} \rightarrow Y.$$

且, $\|\tilde{T}\| = \|T\|.$

证明 对于任意 $x \in \overline{D(T)}$, 根据定理 1.4-7 (a), 存在 $(x_n) \subset D(T)$. 使得 $x_n \rightarrow x$. 因为 T 是有界线性算子, 则,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|$$

即, (Tx_n) 是 Y 中的 Cauchy 序列, 由于 Y 是完备的. 于是存

在 $y \in Y$, 使得

$$Tx_n \rightarrow y.$$

我们通过

$$\tilde{T}x = y$$

定义算子 \tilde{T} .

首先证明对于固定的 $x \in \overline{D(T)}$, $\tilde{T}x$ 有确定的意义, 即 $\tilde{T}x$ 与 $D(T)$ 中收敛于 x 的序列的选择无关. 假定 $x_n \rightarrow x$, $z_n \rightarrow x$, 则

$$(v_m) = (x_1, z_1, x_2, z_2, \dots)$$

收敛, 于是 (Tv_m) 在 Y 中收敛, 而且两个子序列 (Tx_n) , (Tz_n) 一定有相同的极限.

\tilde{T} 是线性的这是显然的, 并且.

$$\tilde{T}x = Tx \quad \text{对于每个 } x \in D(T)$$

因此, \tilde{T} 是 T 的线性扩张. 下面证明 \tilde{T} 的有界性. 由于 T 有界, 有

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$$

因为 $Tx_n \rightarrow \tilde{T}x$, 利用范数的连续性, 得.

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\| \quad x \in \overline{D(T)}.$$

从而 \tilde{T} 是有界的. 并且, $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. 另一方面, 算子的范数是用上确界定义的, 因此, $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$ 故,

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

前面我们讨论了有界线性算子的一般性质, 下面我们考

察定义在赋范空间 X 上的值域包含在赋范空间 Y 中的有界线性算子的全体所具有的性质.

2.7-13 定理〔空间 $B(X, Y)$ 〕. 设 X, Y 是数域 K 上的赋范空间. $B(X, Y)$ 是定义在全空间 X 上的、值域在 Y 中的有界线性算子全体, 如果在 $B(X, Y)$ 上定义如下的代数运算:

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)x &= T_1x + T_2x & T_1, T_2 \in B(X, Y), x \in X \\ (\alpha T)x &= \alpha Tx & \alpha \in K, T \in B(X, Y), x \in X.\end{aligned}\tag{6}$$

并定义范数

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\tag{7}$$

那么, $B(X, Y)$ 构成一赋范空间.

证明 (a) 证 $B(X, Y)$ 是向量空间, 即证(6)式定义的 $T_1 + T_2, \alpha T$ 均是 X 上的有界线性算子.

对于任意 $x_1, x_2 \in X, \alpha \in K$, 有.

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x_1 + x_2) &= T_1(x_1 + x_2) + T_2(x_1 + x_2) \\ &= T_1x_1 + T_1x_2 + T_2x_1 + T_2x_2 \\ &= (T_1x_1 + T_2x_1) + (T_1x_2 + T_2x_2) \\ &= (T_1 + T_2)x_1 + (T_1 + T_2)x_2 \\ (T_1 + T_2)(\alpha x_1) &= T_1(\alpha x_1) + T_2(\alpha x_1) \\ &= \alpha(T_1x_1 + T_2x_1) \\ &= \alpha(T_1 + T_2)x_1\end{aligned}$$

而且, $\|(T_1 + T_2)x\| = \|T_1x + T_2x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|)\|x\|.$

$$\|(\alpha T)x\| = |\alpha| \|Tx\| \leq |\alpha| \|T\| \|x\|$$

因此, $T_1 + T_2 \in B(X, Y), \alpha T \in B(X, Y)$, 故 $B(X, Y)$ 是

向量空间.

(b) 证 $B(X, Y)$ 是赋范空间. 由 (a) 知 $B(X, Y)$ 是向量空间, 下面只须证 (7) 式满足范数公理.

$$(N1). \quad \|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq 0$$

$$(N2). \quad \|T\| = 0, \text{ 当且仅当对于每个 } x \in X, \|Tx\| = 0 \\ \text{而 } \|Tx\| = 0, x \in X, \text{ 必须且只须 } T = 0$$

$$(N3). \quad \|\alpha T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|(\alpha T)x\| = |\alpha| \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \\ = |\alpha| \|T\|.$$

$$(N4). \quad \|T_1 + T_2\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|(T_1 + T_2)x\| \\ \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T_1x\| + \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T_2x\| \\ = \|T_1\| + \|T_2\|$$

因此, $B(X, Y)$ 是赋范空间.

2.7-14 定理 (完备性). 如果 Y 是 Banach 空间, 则, $B(X, Y)$ 亦是一 Banach 空间.

证明 设 (T_n) 是 $B(X, Y)$ 中任意 Cauchy 序列, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$. 使得

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad (m, n > N)$$

因此, 对于任意给定的 $x \in X$ 及 $\tilde{\varepsilon} > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\|x\|}$ (这里假设 $x \neq 0$), 有

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \\ < \varepsilon \|x\| = \tilde{\varepsilon} \quad (m, n > N) \quad (8)$$

对于 $x = \theta$, (8) 式亦成立. 即 $(T_n x)$ 是 Y 中的 Cauchy 序列. 由于 Y 完备, 所以, $T_n x \rightarrow y \in Y$, y 是由 x 确定的, 这就定义了一个算子 $T: X \rightarrow Y$,

$$y = Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \quad x \in X.$$

因为 T_n 是线性的, 有

$$\begin{aligned} T(ax_1 + \beta x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(ax_1 + \beta x_2) \\ &= a \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_1 + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_2 \\ &= aTx_1 + \beta Tx_2 \end{aligned}$$

即, T 是线性算子.

在 (8) 中令 $m \rightarrow \infty$, 利用范数的连续性得,

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\| \quad n > N, x \in X. \quad (9)$$

因此, 当 $n > N$ 时, $(T_n - T)$ 是有界线性算子, 由于 T_n 有界, $B(X, Y)$ 是向量空间, 所以, $T = T_n - (T_n - T)$ 有界, 即, $T \in B(X, Y)$. 由 (9) 可得

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad (n > N)$$

故 $T_n \rightarrow T$ (按范数收敛)

习 题 2.7

1. 证明通过 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \mapsto (\xi_1/1, \xi_2/2, \dots, \xi_n/n, \dots)$ 定义的算子 $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ 是线性有界的.
2. 证明有界线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 的值域 $R(T)$ 在 Y 中不一定是闭的. (提示: 利用习题 1 中的 T)
3. 设 T 是从赋范空间 X 到赋范空间 Y 上的有界线性算子, 如果存在正数 b , 使得, 对于所有 $x \in X$ 有: $\|Tx\| \geq b\|x\|$, 证明 T^{-1} 存在并有界.

4. 证明有界线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 的逆 $T^{-1}: R(T) \rightarrow X$ 不一定是有的. (利用习题1中的 T)

5. 设 $T: C(0,1) \rightarrow C(0,1)$ 是通过

$$y(t) = Tx = \int_0^1 x(\tau) d\tau$$

定义的. 求 $R(T)$ 及 $T^{-1}: R(T) \rightarrow C(0,1)$. T^{-1} 是否有界.

6. 在 $C(0,1)$ 上分别由

$$T_1 x = y(s) = s \int_0^1 x(\tau) d\tau$$

$$T_2 x = y(s) = s x(s)$$

定义算子 T_1 和 T_2 , T_1 与 T_2 可以交换吗? 求 $\|T_1\|$, $\|T_2\|$, $\|T_1 T_2\|$, $\|T_2 T_1\|$.

7. 设 X 是 R 上所有有界实值函数构成的赋范空间, 其范数为 $\|x\| = \sup_{t \in R} |x(t)|$. 设 $T: X \rightarrow X$ 是由 $Tx = y(t) = x(t + \Delta)$ 定义的. 其中 $\Delta > 0$ 是一常数. 问 T 是否线性有界. (见图13)

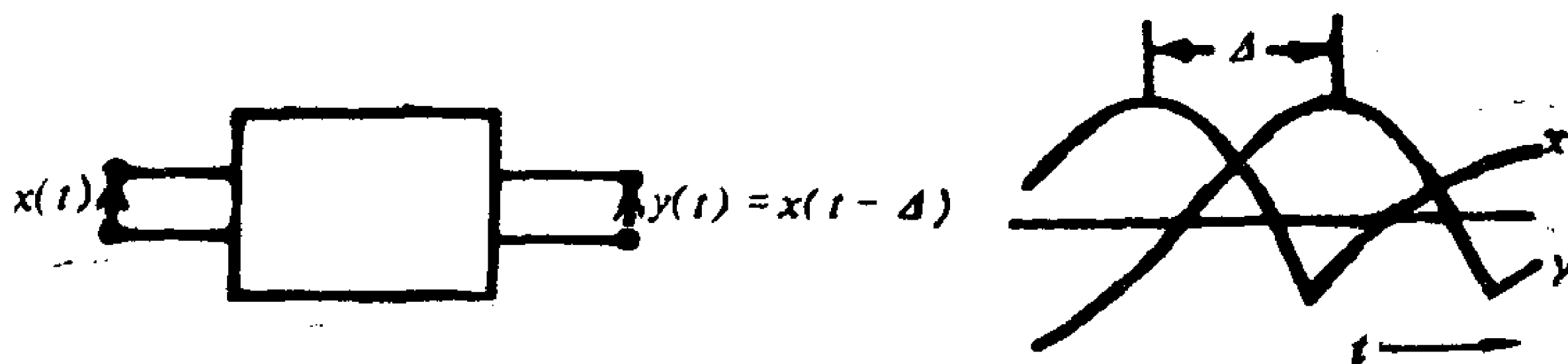


图13 电延迟线图形

8. 设 X 是由所有 n 个实数有序组所组成的向量空间, Y 是由 r 个实数的有序组全体构成的向量空间. $r \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 定义一个从 X 到 Y 中的线性算子, 设 Z 是所有 $r \times n$ 实矩阵所成的向量空间. $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 分别是 Z , X , Y 上的范数,

如果, $\|Ax\|_2 \leq \|A\| \|x\|_1$

则称 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 相容, 证明由

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

定义的范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 相容, 这个范数叫做由 $\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 定义的自然范数, 若取 $\|x\|_1 = \max_j |\xi_j|$, $\|y\|_2 = \max_j |\eta_j|$, 试证自然范数为

$$\|A\| = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

9. 证明在2.7-5中, $r=n$ 时, 由

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \right)^{1/2}$$

定义一相容范数, 但对于 $n>1$ 这不是由 R^n 上的 Euclidean 范数定义的自然范数.

10. 如果在习题8中, 选,

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |\xi_j| \quad \|y\|_2 = \sum_{k=1}^r |\eta_k|$$

$$\|A\| = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$$

证明 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 相容.

11. 证明在习题10中, 当 $n=r$ 时, $\|\cdot\|$ 是由 $\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 定义的自然范数.

12. 确定由 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示的算子 $T: R^3 \rightarrow R^2$ 的零空间.

13. 设 $T: R^3 \rightarrow R^3$ 是通过 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (\xi_1, \xi_2, -\xi_1 - \xi_2)$ 定义的算子, 求 $R(T)$ 、 $N(T)$ 及表示 T 的矩阵.

14. 向量空间 $B(X, Y)$ 的零元素是什么? $T \in B(X, Y)$ 的负元素是什么?

15. 设 X, Y 是赋范空间, $T_n: X \rightarrow Y$ ($n=1, 2, \dots$) 是有界线性算子. 证明如果 $T_n \rightarrow T$, 则对每一个 $\epsilon > 0$, 存在 N , 使得对于所有 $n > N$ 及任何给定闭球中的一切 x , 有, $\|T_n x - T x\| < \epsilon$.

§2.8 有界线性泛函与对偶空间

泛函是值域位于实数域或复数域的算子, 经常用小写字母 f, g, h , 等表示, $f(x)$ 表示 f 在点 x 的值.

本节要讨论的是有界线性泛函.

2.8-1 定义(线性泛函). 从向量空间 X 的子空间 $D(f)$ 到 X 的数域 K 的线性算子 f 称做线性泛函. $D(f)$ 称做 f 的定义域. f 的值域记作 $R(f) = \{f(x) | x \in D(f)\}$.

2.8-2 定义(有界线性泛函). 设 X 是数域 K 上的赋范空间, f 是从 $D(f) \subset X$ 到 K 的线性算子, 如果存在一个常数 $C > 0$, 使得对于所有 $x \in D(f)$ 有,

$$|f(x)| \leq C \|x\| \quad (1)$$

则称 f 是有界线性泛函.

$f: D(f) \rightarrow K$ 的范数定义为,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)| \quad (2)$$

由(2) 可得,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad \text{对所有 } x \in D(f). \quad (3)$$

2.8-3 空间 R^3 中的点积. 设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$ 是一固定向量, 通过

$$f(x) = \alpha \cdot x = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R_3$$

定义一泛函 $f: R^3 \rightarrow R$, 则 f 是有界线性泛函, 且, $\|f\| = \|\alpha\|$.

证明 f 为线性的这是显而易见的. 下面证 f 是有界的. 由Cauchy-schwarz不等式, 有

$$|f(x)| = |\alpha \cdot x| \leq \|\alpha\| \|x\|$$

因此, f 是有界的, 且, $\|f\| \leq \|a\|$. 另一方面, 当 $x = a$ 时 (假定 $a \neq \theta$, 若 $a = \theta$ 时, $f = 0$) 得

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

从而证得, $\|f\| = \|a\|$.

2.8-4 定积分. 在空间 $C[a, b]$ 上通过定积分

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt$$

定义的泛函 $f: C[a, b] \rightarrow R$ 是线性有界的, 且, $\|f\| = b - a$.

证明 显然, f 是线性的. 只证有界性,

$$\begin{aligned} \text{由于, } |f(x)| &= \left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq (b-a) \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \\ &= (b-a) \|x\|. \end{aligned}$$

因此, f 有界且, $\|f\| \leq b - a$, 另外, 取 $x_0 = 1$

$$\text{那么, } \|x_0\| = 1, \|f\| \geq |f(x_0)| = \int_a^b dt = b - a, \text{ 从而,}$$

$$\|f\| = b - a.$$

2.8-5 空间 $C[a, b]$. 选固定的 $t_0 \in J = [a, b]$, 由

$$f_1(x) = x(t_0) \quad x(t) \in C[a, b]$$

定义的泛函 $f_1: C[a, b] \rightarrow R$ 是线性、有界的, 且 f_1 的范数为 $\|f_1\| = 1$.

证明 显然 f_1 是线性的. 只证 f_1 有界, 由

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\| \quad \text{对于每个 } x \in C[a, b]$$

知 f_1 有界且 $\|f_1\| \leq 1$. 另一方面, 取 $x_0 = 1$, 得 $\|x_0\| = 1$,

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1, \text{ 因此, } \|f_1\| = 1.$$

2.8-6 空间 l^2 . 取一固定的 $\alpha = (\alpha_j) \in l^2$, 由

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i, \quad x = (\xi_i) \in l^2$$

定义的泛函 $f: l^2 \rightarrow C$ 是线性、有界的，且 $\|f\| = \|\alpha\|$ 。

证明 由Cauchy-Schwarz不等式可得级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ 绝对收敛，又 l^2 完备，所以此级数收敛，即 f 是 l^2 上的一泛函。线性是显然的，下面证 f 是有界的。再利用一次Cauchy-Schwarz不等式，得，

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \xi_i| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2} = \|\alpha\| \|x\| \end{aligned}$$

从而， f 有界且， $\|f\| \leq \|\alpha\|$ 。

另一方面，取 $x = \bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_i) \in l^2$ (假定 $\alpha \neq 0$ ，若 $\alpha = 0$ ，则

$$f=0)，于是，\|f\| \geq \frac{|f(\bar{\alpha})|}{\|\bar{\alpha}\|} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|} = \|\alpha\| \text{ 因此证得}$$

$$\|f\| = \|\alpha\|.$$

以上各泛函均是线性的，下面举一个非线性泛函的例子。

2.8-7 范数. 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个非线性泛函。

有界线性泛函是有界线性算子，因此前面介绍的有界线性算子的性质对有界线性泛函来说亦成立。

2.8-8 定理 (连续性与有界性). 定义域 $D(f)$ 在赋范空间 X 中的线性泛函 f 为连续的充要条件是 f 有界。此外，线性泛函 f 在 $D(f)$ 中某一点连续，则 f 在 $D(f)$ 上连续。

定义在向量空间 X 上的线性泛函全体, 按如下代数运算

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x)\end{aligned}\tag{4}$$

构成一向量空间, 称做 X 的代数对偶空间, 记作 X' , X' 的代数对偶空间 X'' 称做 X 的第二代数对偶空间. 今考察 X 与 X'' 之间的关系.

对于每个固定的 $x \in X$, 由

$$g(f) = g_x(f) = f(x)\tag{5}$$

得到一个定义在 X' 上的泛函 g_x . g_x 是线性的. 事实上, 对于任何 $f_1, f_2 \in X'$ 及任意数 α, β , 有

$$\begin{aligned}g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) &= (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) \\ &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \\ &= \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2)\end{aligned}$$

因此, $g_x \in X''$. 定义映射

$$C: X \rightarrow X''$$

$$x \mapsto g_x$$

C 称做 X 到 X'' 中的标准映射 (也称为 X 到 X'' 中的标准嵌入).

C 的定义域 X 是向量空间, 并且,

$$\begin{aligned}[C(\alpha x + \beta y)](f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha (Cx)(f) + \beta (Cy)(f)\end{aligned}$$

从而, C 是线性映射.

如果 C 是双射, 则 X 与 $R(c) = X''$ 是同构的向量空间. 此时称 X 是代数自反空间.

设 X 是 n 维向量空间, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基, 利用§ 2.6中有穷维向量空间上线性算子与矩阵的关系(i)与(ii), X 上的每个线性泛函 f 确定一个 $1 \times n$ 矩阵 $(f(e_1), \dots, f(e_n))$, 反之, 每个 $1 \times n$ 矩阵 (a_1, \dots, a_n) , 由

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \xi_j \quad x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j, \quad f(e_j) = a_j \quad (6)$$

定义 X 上一线性泛函 f .

特别由下列 n 个 $1 \times n$ 矩阵

$$(1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

定义 n 个线性泛函 f_1, \dots, f_n , f_k 在 e_j 处具有值

$$f_k(e_j) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (7)$$

$\{f_1, \dots, f_n\}$ 称为 X 基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的对偶基.

2.8-9 定理(X' 的维数). 设 X 是 n 维向量空间 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基. 那么由(7)确定的 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是 X 的代数对偶空间 X' 的一个基. 且 $\dim X' = \dim X = n$

证明 设

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x) = 0 \quad \text{对于每个 } x \in X \quad (8)$$

取 $x = e_j$, 有

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(e_j) = \beta_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

因此, 集 $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ 线性无关.

对于每个 $f \in X'$, 记 $f(e_j) = \alpha_j$, 则有,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i, \quad \text{每个 } x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in X$$

根据(7), $f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_j$,

从而, $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x)$, 对于每个 $x \in X$.

即 X 上的每个线性泛函 f 可唯一地表示成 f_1, \dots, f_n 的线性组合, 于是证得 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是 X' 的一个基, 且 $\dim X' = \dim X = n$.

2.8-10 引理 (零向量). 设 X 是 n 维向量空间, $x_0 \in X$, 如果对于所有 $f \in X'$, 有 $f(x_0) = 0$, 则, $x_0 = \theta$.

证明 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基, $x_0 = \sum_{i=1}^n \xi_i^0 e_i$ 根据假定, 对于每个 $f \in X'$, 有

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n \xi_i^0 f(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi_i^0 \alpha_i = 0$$

今取用 $(\bar{\xi}_1^0, \dots, \bar{\xi}_n^0)$ 通过(6)定义的泛函 f_0 代入上式, 于是得 $\xi_j^0 = 0, j = 1, 2, \dots, n$. 即 $x_0 = \theta$.

2.8-11 定理 (代数自反性) 有穷维向量空间 X 是代数自反的.

证明 首先标准映射 $C: X \rightarrow X''$ 是线性的. 设 $Cx_0 = 0$, 则对于所有 $f \in X'$, 有

$$(Cx_0)(f) = g_{x_0}(f) = f(x_0) = 0$$

由引理2.8-10知, $x_0 = \theta$. 因此 C 是一对一的映射, C^{-1} :

$R(C) \rightarrow X$ 存在. 根据定理 2.6-10, $\dim R(C) = \dim X$. 由定理 2.8-9 得,

$$\dim X'' = \dim X' = \dim X$$

从而, $\dim R(C) = \dim X''$. 因为 $R(C)$ 是 X'' 的向量子空间, 从定理 2.1-5 知 $R(C)$ 不是 X'' 的真子空间, 因此, $R(C) = X''$, 即证得 X 是代数自反空间.

现在我们讨论赋范空间 X 上有界线性泛函全体构成的赋范空间.

2.8-12 定义 (对偶空间). 设 X 是赋范空间, X 上有界线性泛函全体按代数运算 (4) 以及 (2) 式定义的范数所构成的赋范空间 X^* 称为 X 的对偶空间

R 和 C 按通常的度量是完备的, 利用定理 2.7-14 立即得出下面定理.

2.8-13 定理 (对偶空间). 任何赋范空间 X 的对偶空间 X^* 均是 Banach 空间 (不论 X 是否是 Banach 空间).

对于空间的研究常常要和它们的对偶空间的研究联系起来, 因此, 有必要找出某些重要空间的对偶空间.

2.8-14 空间 R^n 的对偶空间是 R^n .

证明 根据定理 2.7-8, 有 $(R^n)' = (R^n)^*$, 每个 $f \in (R^n)'$, 具有下列表示式

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j r_j, \quad r_j = f(e_j)$$

这里 $e_j = (\delta_{j,k})$ 是 $1 \times n$ 矩阵, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 R^n 的基.

$x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$. 定义算子

$$T: (R^n)^* \rightarrow R^n$$

$$f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n))$$

对任意数 α , 所有 $f, g \in (R^n)^*$, 有,

$$\begin{aligned} T(f+g) &= ((f+g)(e_1), \dots, (f+g)(e_n)) \\ &= \{(f(e_1) + g(e_1)), \dots, (f(e_n) + g(e_n))\} \\ &= (f(e_1), \dots, f(e_n)) + (g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= Tf + Tg. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\alpha f) &= ((\alpha f)(e_1), \dots, (\alpha f)(e_n)) \\ &= (\alpha f(e_1), \dots, \alpha f(e_n)) \\ &= \alpha(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &= \alpha Tf. \end{aligned}$$

因此, T 是线性的.

对于每个 $(r_1, \dots, r_n) \in R^n$, 通过 (6) 确定一个 $f \in (R^n)^*$, 且 $f(e_j) = r_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, 即

$$(r_1, \dots, r_n) = (f(e_1), \dots, f(e_n)) = Tf.$$

因此 T 是满射.

若 $Tf = \theta$, 那么, $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (0, \dots, 0)$ 即, $f(e_j) = 0, j = 1, 2, \dots, n$. 从而对于每个 $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in R^n$, 有

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i) = 0$$

故 $f = 0$, 因此, T 是一对一的.

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i r_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right)^{1/2} \|x\|$$

从而, $\|f\| \leq \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right)^{1/2}$. 取 $x = (r_1, \dots, r_n)$

有,

$$\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right)^{1/2}.$$

因此, 证得 f 的范数是 Euclidean 范数, 即,

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i)^2 \right)^{1/2}. \quad [f(e_1), \dots, f(e_n)] \in R_n.$$

$$\text{于是, } \|Tf\| = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i)^2 \right)^{1/2} = \|f\|$$

故, T 是保范的. 这就证明了 $(R^n)^*$ 与 R^n 是同构的赋范空间. 所以, 在同构意义下, $(R^n)^* = R^n$.

2.8-15 空间 l^1 的对偶空间是 l^∞

证明 令 $e_k = (\delta_{kj}) \in l^1$, 由 § 2.3 知, (e_k) 是 l^1 的 Schauder 基, 因此, 每个 $x \in l^1$, 可唯一地表示为,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \quad (9)$$

对于任意 $f \in (l^1)^*$, 因为 f 是线性有界的, 有,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k r_k, \quad r_k = f(e_k), \quad (10)$$

由于, $\|e_k\| = 1$, 得,

$$\begin{aligned} |f(e_k)| &\leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|. \\ \sup |f(e_k)| &\leq \|f\|. \end{aligned} \quad (11)$$

因此, $(f(e_k)) \in l^\infty$, 通过

$$Tf = (f(e_k))$$

定义算子 $T: (l^1)^* \rightarrow l^\infty$.

显然 T 是线性的. 且对于每个 $(\alpha_k) \in l^\infty$, 通过,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k \quad x = (\xi_k) \in l^1$$

得 l^1 上一泛函 g , 并有,

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \alpha_k| \leq \sup_j |\alpha_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \\ = \sup_j |\alpha_j| \|x\|.$$

从而, g 是有界线性泛函, 即, $g \in (l^1)^*$ 因此, T 是满射.

从 (10) 得,

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k r_k| \leq \sup_j |r_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \\ = \sup_j |f(e_j)| \|x\| \\ \|f\| \leq \sup_j |f(e_j)|$$

由 (11) 有, $\|f\| \geq \sup_j |f(e_j)|$. 所以, $\|f\| = \sup_j |f(e_j)|$

故 f 的范数是空间 l^∞ 上的范数, 并且.

$$\|Tf\| = \|f\| = \sup_j |f(e_j)|$$

从而证得 T 又是保范的、有界的、一对一的, 因此, $(l_1)^*$ 与 l^∞ 是同构的赋范空间, 即在同构的意义下, $(l_1)^* = l^\infty$.

2.8-16 空间 l^p 的对偶空间是 l^q . ($1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} +$

$$\frac{1}{q} = 1)$$

证明 令 $e_k = (\delta_{kj}) \in l^p$, 则 (e_k) 是 l^p 的 Schauder 基, 每个 $x = (\xi_k) \in l^p$, 有唯一的表达式

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \quad (12)$$

对于任意 $f \in (l^p)^*$, 因为 f 是线性有界的, 有,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k r_k \quad r_k = f(e_k) \quad (13)$$

今证 $(r_k) \in l^q$. 取 $x_n = (\xi_k^{(n)}) \in l^p$

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |r_k|^q / r_k & k \leq n, \text{ 且 } r_k \neq 0 \\ 0 & k > n \text{ 或 } r_k = 0 \end{cases} \quad (14)$$

将 $x_n = (\xi_k^{(n)})$ 代入 (13), 得,

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} r_k = \sum_{k=1}^n |r_k|^q$$

利用 (14) 及 $(q-1)p = q$, 有,

$$\begin{aligned} |f(x_n)| &\leq \|f\| \|x_n\| = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |r_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |r_k|^q \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\text{因此, } f(x_n) = \sum_{k=1}^n |r_k|^q \leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |r_k|^q \right)^{1/p}$$

$$\text{从而, } \left(\sum_{k=1}^n |r_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|$$

因为 n 是任意正整数, 令 $n \rightarrow \infty$, 得.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\| \quad (15)$$

即, $(r_k) \in l^q$.

定义算子 T ,

$$\begin{aligned} T: (l^p)^* &\rightarrow l^q \\ f &\mapsto (f(e_k)) \end{aligned}$$

显然, T 是线性的,

对于任意 $(\alpha_k) \in l^q$, 定义

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k$$

得到 l^p 上一线性泛函 g , 由Hölder不等式, 有

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \alpha_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^q \right)^{1/q} \|x\| \end{aligned}$$

所以 g 有界, $\alpha_k = g(e_k)$, $(\alpha_k) = Tg$, 因此, T 是满射.

由(13)及Hölder不等式, 有

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k r_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^q \right)^{1/q} \|x\|.$$

从而, $\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^q \right)^{1/q}$, 再由(15), 得

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)|^q \right)^{1/q}$$

因此, $\|Tf\| = \|f\|$. 故 T 是保范的, 且是一对一的. 在同构的意义下, $(l^p)^* = l^q$.

以上几例给出的三个重要空间上有界线性泛函的一般形式, 这在实际中是十分有用的, 有关 $C[a, b]$ 上的泛函, 以及赋范空间 X 的第二对偶空间 X^{**} 将在第四章中讨论.

习 题 2.8

1. 证明由

$$f_1(x) = \int_a^b x(t) y_0(t) dt \quad y_0 \in C[a, b] \text{ 固定}$$

$$f_2(x) = \alpha x(a) + \beta x(b) \quad \alpha, \beta \text{ 是固定的数, 定义的 } C[a, b] \text{ 上}$$

的两个泛函 f_1 、 f_2 是线性有界的.

2. 求通过

$$f(x) = \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt$$

定义的 $C[-1, 1]$ 上的线性泛函 f 的范数.

3. 证明通过

$f(x) = \xi_n$ (n 是固定的), $x = (\xi_j) \in l^\infty$. 定义 l^∞ 上一线性泛函, 问 f 有界吗?

4. 设 $C^1[a, b]$ 是 $J = [a, b]$ 上连续可微函数全体构成的赋范空间, 其范数为,

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| + \max_{t \in J} |x'(t)|$$

证明此范数满足范数公理, 令,

$$f(x) = x'(c), \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

证明 f 是 $C^1[a, b]$ 上的有界线性泛函. 如果将 f 看成 $C[a, b]$ 中所有连续可微函数组成的子空间上的泛函, 证明 f 是无界的.

5. 设 $f \neq 0$ 是向量空间 X 上的任意线性泛函, $x_0 \in X - N(f)$ 是任意固定的元素, 证明任意 $x \in X$, 有唯一的表示式

$$x = ax_0 + y, \quad y \in N(f).$$

6. 证明习题5中, X 里的两元素 x_1, x_2 属于商空间 $X/N(f)$ 的同一元素当且仅当, $f(x_1) = f(x_2)$; 并证 $\text{Codim } N(f) = 1$.

7. 证明定义在同一向量空间上且有同一零空间的两个线性泛函 $f_1 \neq 0$ 和 $f_2 \neq 0$ 是成比例的.

8. (超平面) 如果 Y 是向量空间 X 的子空间, 且 $\text{Codim } Y = 1$, 则 X/Y 的每个元素叫做平行于 Y 的超平面. 证明对于 X 上的任意线性泛函 $f \neq 0$, 集 $H_1 = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ 是平行于 $N(f)$ 的超平面.

9. 如果 Y 是向量空间 X 的子空间, f 是 X 上线性泛函. 并且 $f(Y)$ 不是 X 的整个数域. 证明对于所有 $y \in Y$, 有, $f(y) = 0$.

10. 证明赋范空间 X 上有界线性泛函 $f \neq 0$ 的范数等于原点到超平面 $H_1 = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ 距离 $\tilde{d} = \inf \{\|x\| \mid f(x) = 1\}$ 的倒数.

11. 设 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 是 R^3 基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的对偶基. 这里,

$e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, -1), e_3 = (1, -1, -1)$. 令 $x = (1, 0, 0)$, 求 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.

12. 如果 f 是 n 维向量空间 X 上的线性泛函, 那么零空间 $N(f)$ 可能有怎样的维数. 求由 $f(x) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3, a_1 \neq 0$ 定义的 R^3 上泛函 f 零空间 $N(f)$ 的一个基.

13. 如果 Z 是 n 维向量空间 X 的 $(n-1)$ 维子空间. 证明 Z 是 X 上一适当线性泛函 f 的零空间, f 在只差一个倍数的情况下, 是唯一确定的.

14. 设 Z 是 n 维向量空间 X 的真子空间, 令 $x_0 \in X - Z$, 证明在 X 上存在一线性泛函 f , 使得 $f(x_0) = 1$, 对于所有 $x \in Z$, 有 $f(x) = 0$.

15. 如果 f_1, \dots, f_p 是 n 维向量空间 X 上的 p 个线性泛函, 这里 $p < n$. 证明在 X 中存在一个 $x \neq \theta$, 使得 $f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0$.

16. (线性扩张) 设 Z 是 n 维向量空间 X 的真子空间, 设 f 是 Z 上一线性泛函. 证明 f 可以线性扩张到 X 上, 即 X 上存在一线性泛函 \tilde{f} , 使得 $\tilde{f}|_Z = f$.

17. 如果 X 是由 n 个实数的有序组构成的赋范空间, 其范数为 $\|x\| = \max_j |\xi_j|$, 这里, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, 问对偶空间 X^* 上相应的范数是什么?

18. 证明 C_0 的对偶空间是 l^1 (参看 2.3 节习题 1)

19. (零化子) 设 $M \neq \emptyset$ 是赋范空间 X 的任意子集, 称集 $M^\circ = \{f \in X^* | f(x) = 0, \text{ 每个 } x \in M\}$ 为 M 的零化子. 证明 M° 是 X^* 的闭向量子空间. 问 X° 和 $\{\theta\}^\circ$ 都是什么?

20. 如果 M 是 n 维赋范空间 X 的 m 维子空间, 证明 M° 是 X^* 的 $(n-m)$ 维子空间.

第三章 内积空间、希耳伯特 (Hilbert)空间

内积空间是特殊的赋范空间。内积空间的理论是D. Hilbert(1912)在积分方程的研究中开创的。它比一般的赋范空间历史更长、内容更丰富。内积空间是欧几里得空间的自然推广，并保持其很多特性，其核心概念是直交。由直交性产生了投影定理与Fourier级数的一般理论。这些性质在一般赋范空间中是不具备的，而内积空间所以具有如此性质，其关键是引进了新的结构——内积。本章着重介绍内积空间的概念及其基本性质。

重要概念、主要内容的概述

内积空间 X (3.1—1)是在向量空间上定义了内积 $\langle x, y \rangle$ ，而内积是三维欧氏空间中点积概念的推广。利用内积可以定义范数和直交。

Hilbert空间 H 是完备的内积空间。Hilbert空间主要特征是：

- (I) H 可表示为闭子空间与其直交补的直交和(3.2—5)
- (II) 标准直交集和序列，以及 H 中元素的对应表示。
(§ 3.3, § 3.4)
- (III) 有界线性泛函由内积的Riesz表示(§ 3.5)
- (IV) 有界线性算子 $T: H_1 \rightarrow H_2$ 的Hilbert伴随算子 T^*

的唯一存在. (§ 3.6)

利用Hilbert伴随算子定义自伴算子、酉算子、正规算子 (§ 3.7). 这些算子在实际应用中均十分重要.

§3.1 内积空间、Hilbert空间

3.1-1 定义 (内积空间、Hilbert空间). 设 X 是数域 K (R 或 C) 上的向量空间, 如果映射

$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow K$, 对于任意 $x, y, z \in X$, 及每个 $\alpha \in K$, 满足.

$$(I P1). \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

$$(I P2). \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(I P3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(I P4) \quad \langle x, x \rangle = 0, \text{ 当且仅当 } x = \theta.$$

则称 $\langle x, y \rangle$ 为 x, y 的内积. 定义了内积的向量空间 X 称做内积空间, 完备的内积空间称做Hilbert空间 (度量由内积通过下面公式(4)定义) ($I P3$) 中的上横表示复共轭, 若 X 是实内积空间, 那么,

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (\text{对称性})$$

由 ($I P1$) 至 ($I P3$) 得,

$$(a) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$(b) \quad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle. \quad (1)$$

$$(c) \quad \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

(1a) 表示内积对第一个因子是线性的. (1c) 表明内积对第二个因子是共轭线性的. 共轭线性也称做“半线性”因此, 内

积是“个半线性”。

3.1-2 引理 (Schwarz不等式). 设 X 是内积空间, 则对于任意 $x, y \in X$, 有.

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad (2)$$

证明 若 $y = \theta$, (2) 式中等号成立. 若 $y \neq \theta$, 对任一数 α , 有,

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha [\langle y, x \rangle - \overline{\alpha} \langle y, y \rangle]$$

令 $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, 代入上式得,

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle},$$

从而, (2) 式得证.

在内积空间 X 中, 对于任意 $x \in X$, 定义范数,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (3)$$

(3) 式满足 (N1) 和 (N2). 由 (IP2) 与 (IP3) 有,

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|, \quad \text{即}$$

(N3) 成立. 由 Schwarz 不等式

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

得,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

因此, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. 故(3)式是 X 上的范数.

由此可见, 内积空间必是赋范空间, 其由范数导出的度量为,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \quad (4)$$

3.1-3 欧几里得 (Euclidean) 空间 R^n 和 酉空间 C^n .

对于任意 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R^n$, 定义内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \quad (5)$$

对于任意 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in C^n$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in C^n$, 定义内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i} \quad (6)$$

易验证(5)、(6)满足内积公理(I P1)至(I P4). 故, R^n 、 C^n 均是内积空间, 并有度量.

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \left[\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right]^{1/2}$$

在此度量下, R^n 、 C^n 的完备性已在1.5-1中证明. 因此, R^n 与 C^n 是Hilbert空间.

3.1-4 连续函数空间. 设 X 是 $[a, b]$ 上复值连续函数全体, 其内积定义为,

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \quad (7)$$

可以证明(7)式是 X 上的内积. (参见习题8). 并有度量

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

在此度量下, X 是不完备的(自证). 所以, X 是内积空间,

而不是希尔伯特空间.

3.1-5 Hilbert空间 l^2 . 在 l^2 上定义内积,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j} \quad (8)$$

因为对于任意 $x, y \in l^2$, 由Cauchy-Schwarz不等式知(8)式右端级数收敛, 并满足(I P1)至(I P4). 在度量

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2 \right]^{1/2}$$

下 l^2 是完备的(在1.5-4中已证明).

l^2 是最早提出来的希尔伯特空间的一个典型空间, 它是由D. Hilbert(1912年)在积分方程著作中首先介绍的. 但是, 希尔伯特空间的公理化定义直到1927年才由J. Von. Neumann在关于“量子力学的数学基础”一篇论文中第一次给出. 那时的定义包含了可分性. 后来(1934)H. Löwig、F. Rellich和F. Riesz指出, 对于理论的绝大部分来说, 可分性是不必要的. 此后, 这个条件就从定义中去掉了.

内积空间的范数有下列重要性质.

3.1-6 引理(平行四边形等式). 设 X 是内积空间, $\|\cdot\|$ 是由内积通过(3)定义的范数. 则对于任意 $x, y \in X$, 有.

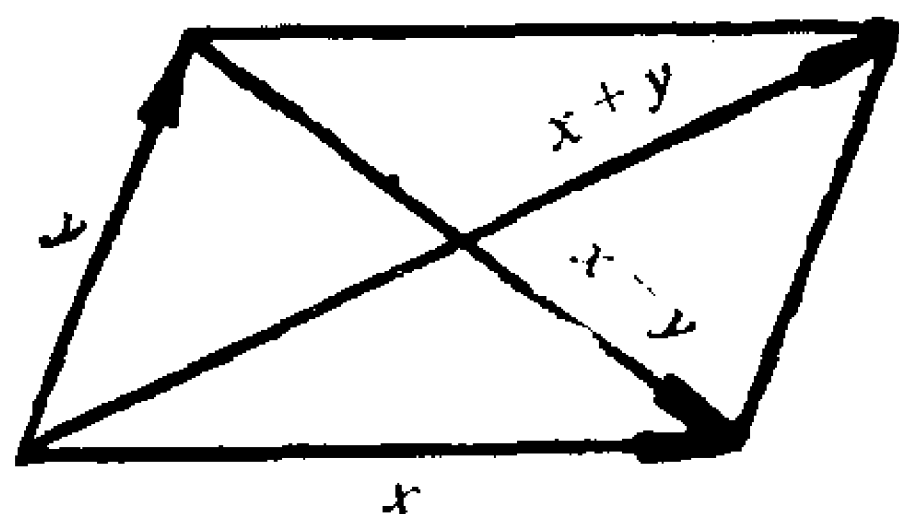
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (9)$$

(留作习题, 参看习题1)

如果 $X = R^2$, 等式(9)有明显的几何意义: 平行四边形两对角线长度的平方和等于四边长度的平方和. 因此, 对于内积空间, 等式(9)称做平行四边形等式.

引理3.1-6表明由内积定义的范数必满足平行四边形等

式(9). 不满足(9)的范数不能由内积导出. 由下列看出不是所有赋范空间都是内积空间.



3.1-7 空间 l^p ($p \neq 2$)

不是内积空间.

图 14 平面上边 x 与 y 的平行四边形

证明 取 $x = (1, 1, 0, 0, \dots) \in l^p$, $y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in l^p$ 那么, $\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$, $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$. 因为 $p \neq 2$, 所以, (9) 式不成立, l^p 的范数不能由内积导出, 故 l^p ($p \neq 2$) 不是内积空间.

3.1-8 $C[a, b]$ 不是内积空间.

证明 $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$, 取 $x(t) = 1$, $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$

则, $\|x\| = \|y\| = 1$ $x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$, $x(t) - y(t)$

$$= 1 - \frac{t-a}{b-a}, \quad \|x + y\| = 2, \quad \|x - y\| = 1. \text{ 于}$$

是, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5$, $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$, 即 $C[a, b]$ 上的范数不满足平行四边形等式(9). 因此, $C[a, b]$ 不是内积空间.

内积空间的内积可以用范数表示. 对于实内积空间, 有.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (10)$$

对于复内积空间, 有,

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (11)$$

$$\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

(10) 与(11)通常称为极化恒等式 (参看习题 4)

内积空间 X 的子空间 Y 是指赋范空间 X 的子空间, 并将 X 上的内积限制在 $Y \times Y$ 上.

Hilbert空间 H 的子空间 Y 定义为内积空间 H 的子空间. 不要求完备. 即 Y 不一定是Hilbert空间.

由定理2.3-1和2.4-2立即得出下面定理:

3.1-9 定理 (子空间). 设 Y 为Hilbert空间 H 的子空间, 那么,

(a) Y 为完备的充要条件是 Y 在 H 中闭.

(b) 若 Y 是有穷维的, 则 Y 是完备的.

(c) 若 H 是可分的, 则 Y 亦可分.

3.1-10 引理 (内积的连续性). 在内积空间中, 若 $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, 则 $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

证明 利用Schwarz不等式, 得,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

从本节例题看出, 内积空间有完备的, 也有非完备的. 对于非完备的内积空间可以完备化. 为此, 我们首先介绍内

积空间同构的概念.

3.1-11 定义(内积空间同构). 设 X, \tilde{X} 是同一数域 K 上的内积空间, 如果存在 X 到 \tilde{X} 上的线性双射 $T: X \rightarrow \tilde{X}$, 且保持内积不变

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

则称 X 与 \tilde{X} 为同构的内积空间. T 称做从内积空间 X 到内积空间 \tilde{X} 上的同构映射.

3.1-12 定理(完备化). 设 X 是内积空间, 则必存在一 Hilbert 空间 H 为 X 的完备化空间, 即 X 与 H 的稠密子空间 W 同构, 且在內积空间同构的意义下, H 是唯一的.

证明 由于内积空间 X 必是赋范空间, 利用定理 2.3-3, 存在一 Banach 空间 H , 使得 X 与 H 的稠密子空间 W 同构, 并有同构映射 $T: X \rightarrow W$.

首先在 W 上定义内积. 对于任意 $\hat{x}, \hat{y} \in W$, 存在 $x, y \in X$, 使得, $\hat{x} = Tx, \hat{y} = Ty$, 定义.

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \langle x, y \rangle. \quad (12)$$

由于 T 是线性双射, 易验证 (12) 左端满足 (IP1) 至 (IP4).

且 $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \|\hat{x}\| = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle}$

即 T 保持内积不变, 原范数和由内积 (12) 导出的范数一致.

因此, X 与 W 是同构的内积空间.

现在我们在 H 上定义内积. 由于 X 与 W 同构, 可视 X 在 H 中稠密. 对于任意 $\hat{x}, \hat{y} \in H$, 存在 $(x_n) \subset X, (y_n) \subset X$,

使得 $x_n \rightarrow \hat{x}$, $y_n \rightarrow \hat{y}$, 通过

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle \quad (13)$$

定义 H 上的内积. 可以证明 (13) 右端极限存在, 并且数值 $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ 与 (x_n) 、 (y_n) 的选择无关, 即这样定义的内积有唯一确定的意义. 利用内积的连续性. 易验证 $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ 满足 (IP1) 至 (IP4). 并有, $\|\hat{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\langle x_n, x_n \rangle}$

$= \sqrt{\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle}$. 故 H 上原来的范数与内积 (13) 导出的范数是一致的. 因此, H 是 Hilbert 空间.

如果 X 还有一个完备化空间 \tilde{H} , 利用定理 2.3-3 及内积的连续性, 可以证明 \tilde{H} 与 H 是同构的内积空间.

习 题 3.1

1. 证明公式 (9).
2. 若 X 是实内积空间, 证明 $\|x\| = \|y\|$ 蕴涵 $\langle x+y, x-y \rangle = 0$. 如果 $X = \mathbb{R}^2$ 这在几何上意味着什么? 如果 X 是复的其意味着什么?
3. (Appolonius 恒等式) 证明在内积空间 X 中, 对于任意 $x, y, z \in X$, 有,

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 &= \frac{1}{2} \|x-y\|^2 \\ &\quad + 2 \left\| z - \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \end{aligned}$$

并证明此恒等式亦能由平行四边形等式(9)推出.

4. 证明公式(10)和(11).

5. 在内积空间中, 若对所有 x , 有, $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$ 则, $u = v$.

6. 若 z_1, z_2 表示复数, 证明 $\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \overline{z_2}$ 是一内积. 其在复平面上产生通常的度量.

7. 设 X 为所有复数的有序对构成的向量空间, 在 X 上定义范数,

$$||x|| = |\xi_1| + |\xi_2|$$

这里 $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$, 试问 X 能成为内积空间吗?

8. 证明(7)满足内积公理(IP1)至(IP4).

9. 如果 X 为有穷维向量空间, 且 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基. 证明 X 上的内积完全由数值 $r_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ 确定. 我们能任意选择数 r_{ij} 吗?

10. 在 R^2 和 R^3 中, Schwarz不等式表示什么? 在这些情况下给出另外的证明.

11. 设 X 是由 $x=0$ 和 $[a, b]$ 上次数不超过2的实系数多项式组成, 并按(7)定义内积, 证明 X 是完备的. 若 Y 由 X 中满足 $x(a)=0$ 的 x 全体组成, Y 是 X 的子空间吗? $x \in X$ 且次数等于2的 x 全体能构成 X 的子空间吗?

12. 举出 l^2 子空间的例子.

13. 证明对于内积空间的序列 (x_n) , 条件.

$$||x_n|| \rightarrow ||x|| \text{ 和 } \langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle \text{ 蕴涵 } x_n \rightarrow x.$$

14. 设 V 为 $J=[a, b]$ 上连续复值函数全体所成的向量空间, 令 $X_1 = (V, ||\cdot||_\infty)$, $X_2 = (V, ||\cdot||_2)$

这里, $||x||_\infty = \max_{t \in J} |x(t)|$, $||x||_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt. \text{ 证明 } X_1 \text{ 到 } X_2 \text{ 的恒等映射}$$

$x \mapsto x$ 是连续的 (但不是同胚, X_2 不完备.)

15. (零算子) 设 $T: X \rightarrow X$ 是有界线性算子, X 为复内积空间.

若对所有 $x \in X$, 有 $\langle Tx, x \rangle = 0$ 成立, 则 $T = 0$. 证明在实内积空间中, 上述论断不成立. (提示: 考虑 Euclidean 平面上的旋转)

§3.2 直交与直交分解

在度量空间中, 从元素 x 到一非空子集 $M \subset X$ 的距离 δ 定义为

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} d(x, \tilde{y})$$

在赋范空间中, δ 定义为

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| \quad (1)$$

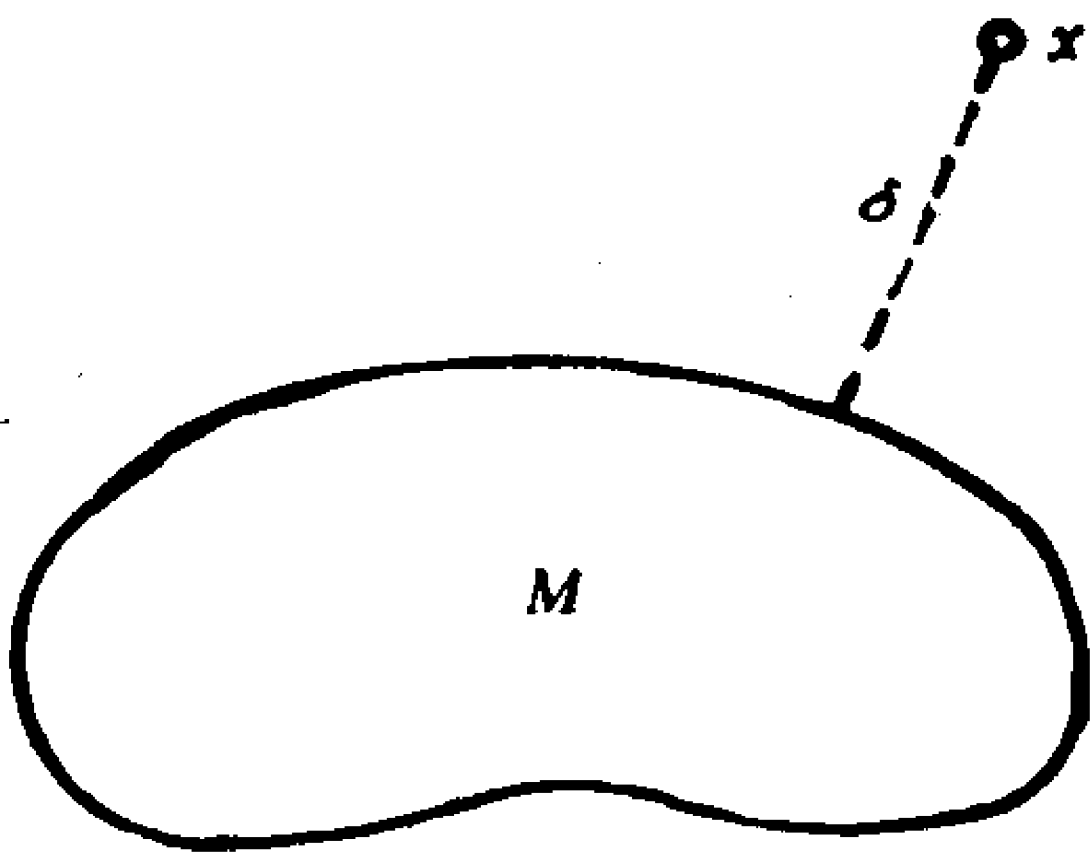


图 15 x 到 M 的距离

现在我们讨论 M 中能否唯一存在元素 y , 使得,

$$\delta = \|x - y\|. \quad (2)$$

这无论在理论上和实用上都是十分重要的. 例如其与函数逼近理论有密切联系.

图 16 表明即使在很简单的情况下, 如 Euclidean 平面 R^2

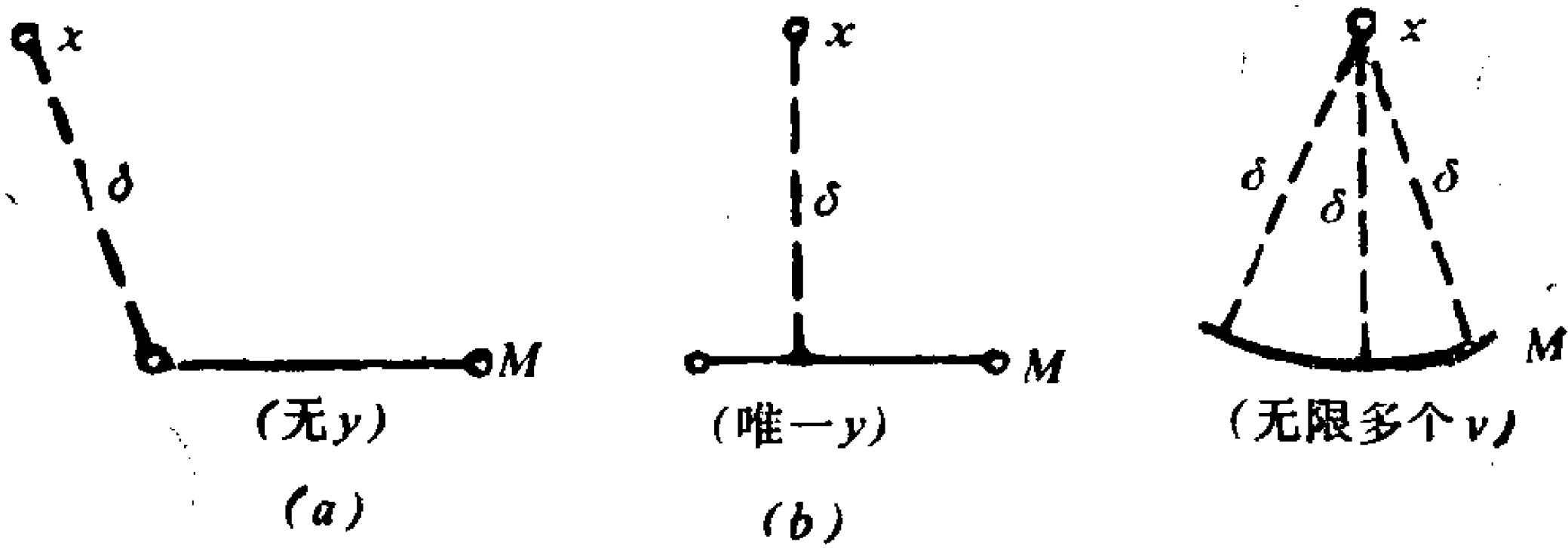


图 16 在 $M \subset R^2$ 的情况下, 满足 (2) 的 y 点存在性与唯一性, 其中 (a) 与 (b) 各为一开线段, (c) 为一圆弧,

上，满足 (2) 的 y 可能不存在、或恰好有一个、或有无穷多个。

关于 y 的存在性和唯一性问题，在一般的赋范空间情况更复杂。但在 Hilbert 空间中，相对的较为简单。这个事实使人感到惊异，并由此引出很多理论和实际结果。

为考察 Hilbert 空间这种点的存在性和唯一性问题，需要引进下列两个有关概念。

设 x, y 是向量空间 X 中给定的二向量，称集

$$\{z \mid z \in X, z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

为连接 x, y 的线段。

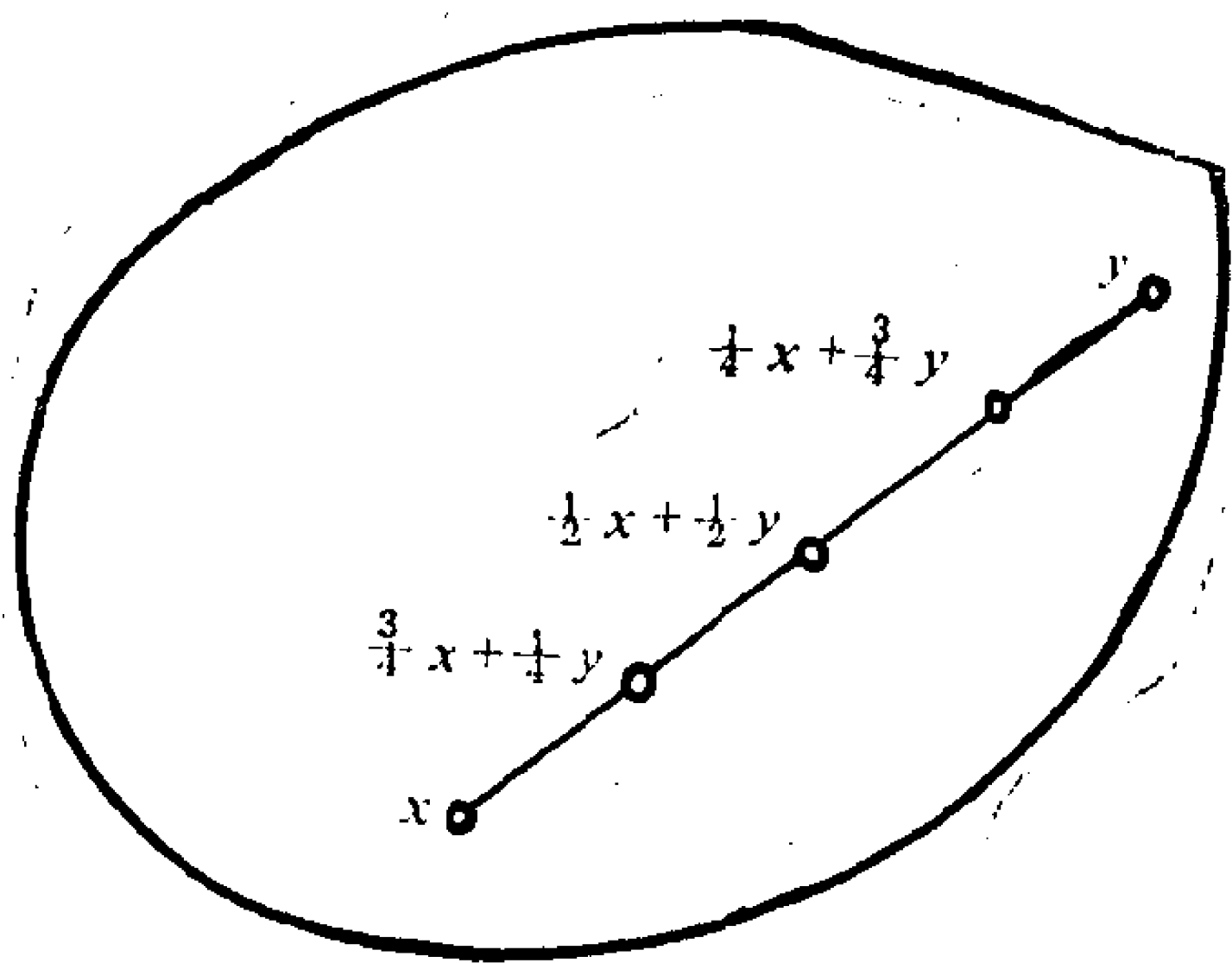


图 17 连接 x 与 y 的线段的图示

设 M 是 X 的子集，如果对于任意 $x, y \in M$ ，连接 x 与 y 的线段均包含在 M 中，则称 M 是凸集。

例如，向量空间 X 的任一子空间是凸的。凸集的交集仍为凸集。

3.2-1 定理(极小化向量). 设 X 是内积空间, $M \neq \emptyset$ 为 X 的完备凸子集. 则对于每一个给定的 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in M$, 使得.

$$\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\| = \|x - y\| \quad (3)$$

证明 (a) 存在性. 由下确界的定义, 对于每个 n , 存在 $y_n \in M$, 使得, $\delta \leq \|x - y_n\| \leq \delta + \frac{1}{n}$ 因此, $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$.

利用平行四边形等式, 由 M 是凸集, 有

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 \\ &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) \\ &\quad - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\ &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) \\ &\quad - 4\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \\ &\leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\delta^2 \rightarrow 0 \\ &\quad (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

即 (y_n) 是Cauchy序列. 因为 M 是完备的, 存在 $y \in M$, 使得 $y_n \rightarrow y$. 由于范数的连续性.

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - y\|$$

(b) 唯一性. 若还有 $y_0 \in M$, 使 $\delta = \|x - y_0\|$, 则由平行四边形等式,

$$\begin{aligned} \|y - y_0\|^2 &= \|(x - y_0) - (x - y)\|^2 \\ &= 2(\|x - y_0\|^2 + \|x - y\|^2) \\ &\quad - \|2x - (y_0 + y)\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_0 + y)\right\|^2 \\
&\leq 4\delta^2 - 4\delta^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

于是, $y = y_0$.

3.2-2 定义(直交). 设 x, y 是内积空间 X 中的两个向量, 如果,

$$\langle x, y \rangle = 0$$

则称 x 与 y 直交. 记作 $x \perp y$. 对于子集 $A, B \subset X$, 若 x 与所有 $a \in A$ 直交, 称 x 与 A 直交. 记作 $x \perp A$. 如果对任意 $a \in A$ 和任意 $b \in B$, 均有 $a \perp b$, 那么, 称 A 与 B 直交, 记作 $A \perp B$. 称集

$A^\perp = \{x \mid x \in X, x \perp A\}$ 为 A 的直交补.

3.2-3 引理(直交性). 设 Y 是内积空间 X 的子空间, 对于给定的 $x \in X$, 如果存在 $y \in Y$, 使得

$$\|x - y\| = \delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x - \tilde{y}\|, \text{ 则, } x - y \perp Y.$$

证明 因为, $\delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|$. 那么,

对于任意 $\tilde{y} \in Y, \tilde{y} \neq \theta$. 和任何数 λ . 有,

$$\begin{aligned}
\delta^2 &\leq \|x - (y + \lambda \tilde{y})\|^2 = \|(x - y) - \lambda \tilde{y}\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle \overline{\lambda} (x - y), \tilde{y} \rangle \\
&\quad + |\lambda|^2 \|\tilde{y}\|^2
\end{aligned}$$

取 $\lambda = \frac{\langle (x-y), \tilde{y} \rangle}{\|\tilde{y}\|^2}$ 代入上式, 得

$$\delta^2 \leq \delta^2 - 2 \frac{|\langle (x-y), \tilde{y} \rangle|^2}{\|\tilde{y}\|^2} + \frac{|\langle (x-y), \tilde{y} \rangle|^2}{\|\tilde{y}\|^2}$$

即,
$$0 \leq \frac{|\langle (x-y), \tilde{y} \rangle|^2}{\|\tilde{y}\|^2} \leq 0$$

于是, $\langle (x-y), \tilde{y} \rangle = 0$.

3.2-4 定义(直和). 设 X 是向量空间, Y, Z 是 X 的两个子空间. 若对于每个 $x \in X$ 可唯一地表示成,

$$x = y + z \quad y \in Y, z \in Z.$$

则 X 称为 Y 与 Z 的直和. 记作 $X = Y \oplus Z$. 如果 $Y \perp Z$, 则 $X = Y \oplus Z$ 称做 Y 与 Z 的直交和.

3.2-5 定理(直交和). 设 Y 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 则

$$X = Y \oplus Y^\perp \tag{4}$$

证明 因为 H 完备, Y 是闭的. 由定理 1.4-8, Y 是完备的. 由于子空间 Y 是凸集, 利用定理 3.2-1 和引理 3.2-4, 对于任意 $x \in H$, 存在唯一的 $y \in Y$, 使得 $z = x - y \perp Y$, 即 x 可唯一地表示成,

$$x = y + z, \quad y \in Y, z \in Y^\perp \tag{5}$$

于是, (4) 式得证.

(5) 式中的 y 称做 x 在子空间 Y 上的直交投影 (简称投影), 因此, 定理 3.2-5 亦称做投影定理.

利用(5)式可以定义一映射,

$$p: H \rightarrow Y \quad (6)$$

$$x \mapsto y = px.$$

p 称做 H 到 Y 的投影算子.

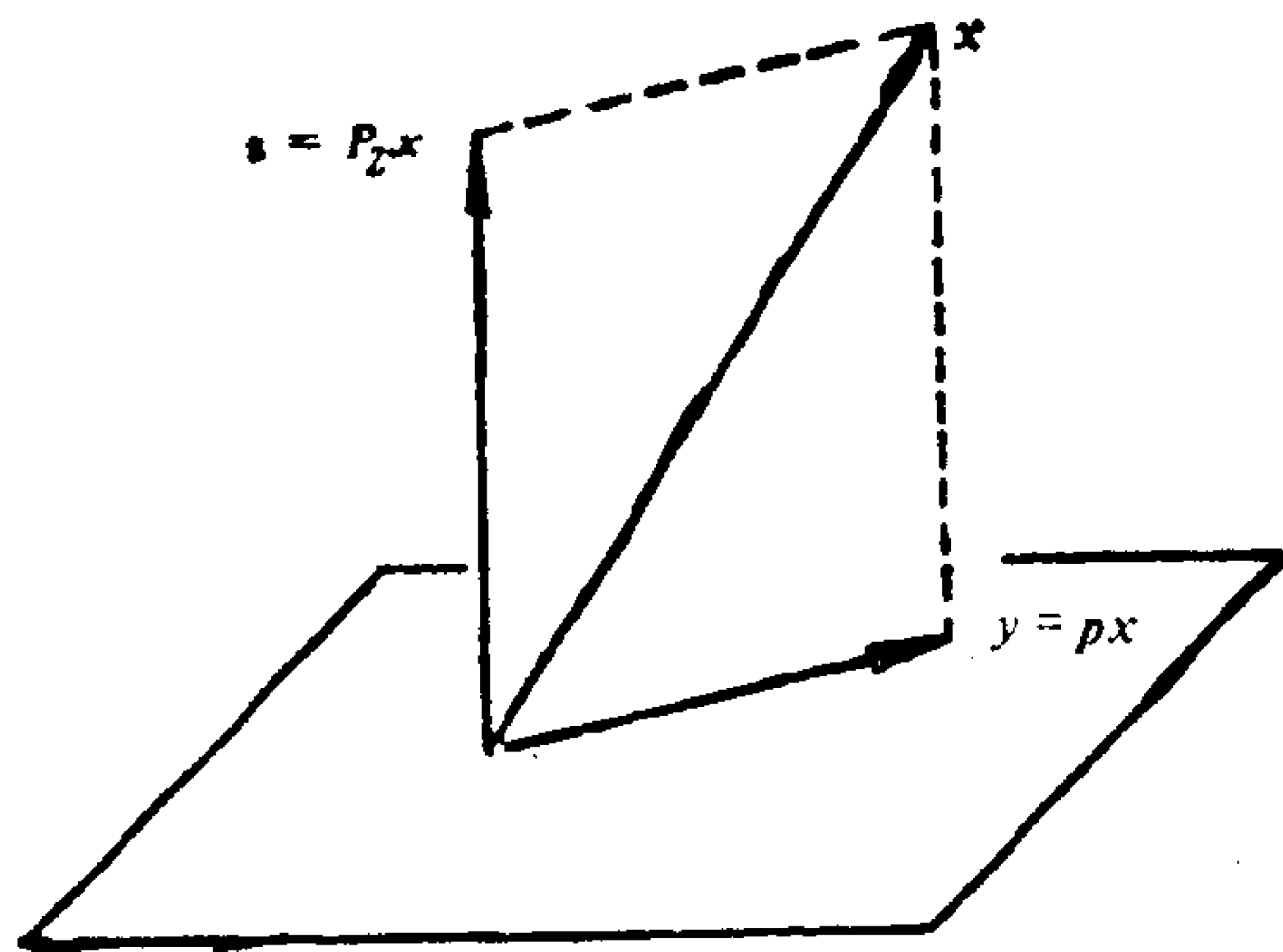


图18 定理3.2-5及公式(6)的图示

希尔伯特空间 H 到其闭子空间 Y 的投影算子 p 具有下列诸性质.

(a) p 的范数或是0、或是1.

证明 当 $Y = \{\theta\}$ 时, 对一切 $x \in H$, $px \in Y$. 因此, $px = \theta$, 即 p 是零算子. $\|p\| = 0$. 当 $Y \neq \{\theta\}$ 时, 对于任意 $x \in H$ 可唯一分解为3.2-5中 $x = px + z$, $px \in Y$, $z \in Y^\perp$. 所以, $\|x\|^2 = \|px\|^2 + \|z\|^2$. $\|px\| \leq \|x\|$, 于是, $\|p\| \leq 1$. 另

一方面, $x \in Y$, 有 $x = px$, $\|p\| \geq \frac{\|px\|}{\|x\|} = 1$ ($x \neq \theta$), 从而,

$$\|p\| = 1.$$

(b) p 必是有界线性算子.

证明 对任意 $x_1, x_2 \in H$, 有分解式 $x_1 = px_1 + z_1$,
 $x_2 = px_2 + z_2$. $z_1, z_2 \in Y^\perp$, 对于任意数 α, β ,

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha px_1 + \beta px_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)$$

这里, $\alpha px_1 + \beta px_2 \in Y$, $\alpha z_1 + \beta z_2 \in Y^\perp$, 由定理 3.2-5 直交分解的唯一性, 那么,

$$p(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha px_1 + \beta px_2.$$

即 p 是线性算子. 由性质 (a) 知 p 有界.

(c) p 是幂等的: $p^2 = p$.

证明 对于任意 $x \in H$, $p^2x = p(px) = px$.

(d) p 的零空间等于 Y 的直交补: $N(p) = Y^\perp$.

对于 Hilbert 空间 H 的子空间 Y , 有 $Y \subset (Y^\perp)^\perp = Y^{\perp\perp}$.
还可以证明 Y^\perp 是 H 的闭子空间 (参看本节习题 12). 由此可知, Y 不一定是 Y^\perp 的直交补 (因为 Y 不一定是闭的).

3.2-6 引理 (闭子空间). 设 Y 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 则, $Y = Y^{\perp\perp}$.

证明 对于任意 $x \in Y$, $x \perp Y^\perp$, 那么, $x \in Y^{\perp\perp}$, 故证得 $Y \subset Y^{\perp\perp}$. 设 $x \in Y^{\perp\perp} \subset H$, 则由定理 3.2-5, x 有唯一分解式 $x = y + z$, $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$, $z \in Y^\perp$, 因而, $x - y = z \in Y^\perp$. 另一方面, 由 $x, y \in Y^{\perp\perp}$, $Y^{\perp\perp}$ 是向量空间. 于是, $x - y \in Y^{\perp\perp}$. $x - y \perp Y^\perp$, 从而, 有 $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = 0$. 故 $x = y \in Y$. 因此, $Y^{\perp\perp} \subset Y$.

3.2-7 引理 (稠密集). 设 $M \neq \emptyset$ 是 Hilbert 空间 H 的子集, 那么, $\overline{\text{Span} M} = H$ 的充要条件是 $M^\perp = \{\theta\}$.

证明 (a) 必要性. 若 $\overline{\text{Span} M} = H$. 设 $x \in M^\perp$, 那

么, $x \in H = \overline{\text{Span}M}$, 由定理1.4-7, 存在 $x_n \in \text{Span}M$ 使 $x_n \rightarrow x$. 因为 $M^\perp \perp \text{Span}M$, 于是 $\langle x_n, x \rangle = 0$ 利用引理3.1-10 (内积的连续性), $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$ 因此, $x = \theta$, $M^\perp = \{\theta\}$.

(b) 充分性. 假设 $M^\perp = \{\theta\}$. 对于任意 $x \in \overline{\text{Span}M^\perp}$ 则, $x \perp M$. 即, $x \in M^\perp = \{\theta\}$, 所以, $x = \theta$.

$\overline{\text{Span}M^\perp} = \{\theta\}$. 取定理3.2-5的 $Y = \text{Span}M$, 于是, $H = Y \oplus Y^\perp = Y \oplus \{\theta\} = Y$. 故 $\overline{\text{Span}M} = H$.

习 题 3.2

1. (Pythagorean定理). 在内积空间 X 中, 若 $x \perp y$, 证明 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. 此公式可推广到 m 个互相直交向量的情形. 若 X 为实空间, 上述公式蕴涵 $x \perp y$, 举例说明若 X 为复空间时, $x \perp y$ 不一定成立.

2. 设 $x \neq \theta$, $y \neq \theta$, 是内积空间 X 的两个元素,

(a) 若 $x \perp y$, 则 $\{x, y\}$ 是线性无关的.

(b) 若 $x_i \neq \theta$, $x_i \perp x_j$ ($i \neq j$), $i, j = 1, 2, \dots, n$, 则集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是线性无关的.

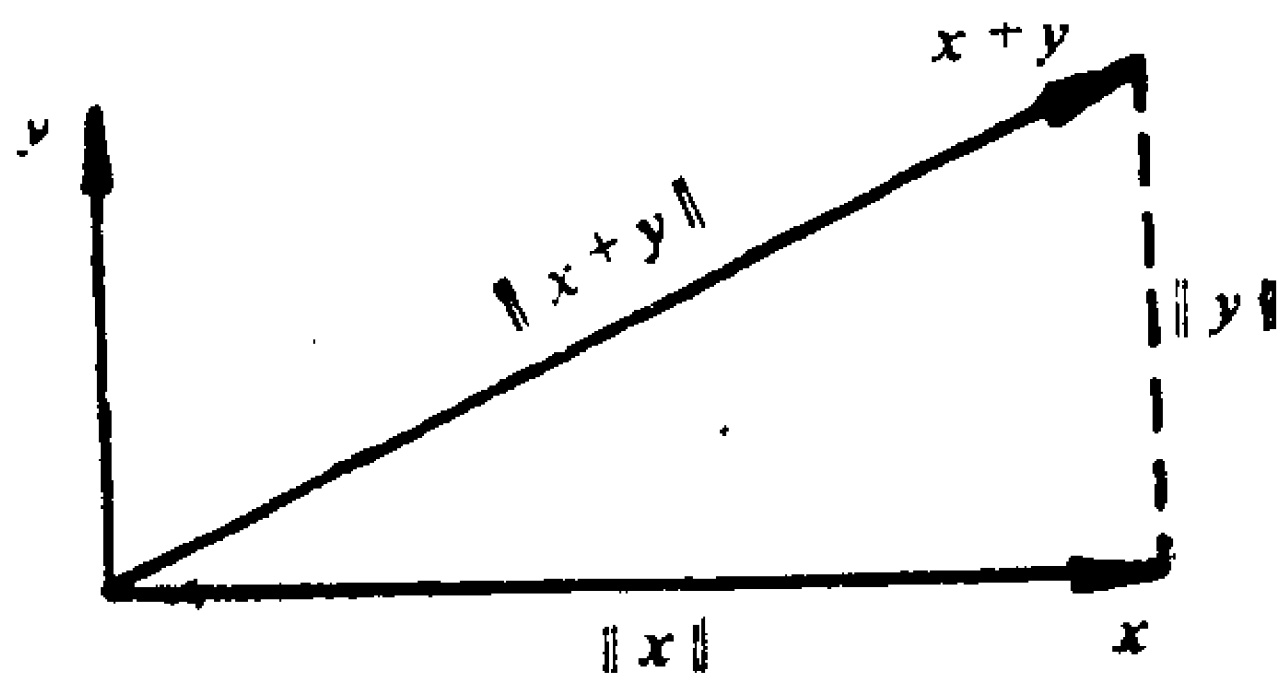


图19 pythagorean定理的说明

3. 证明在内积空间中, $x \perp y$ 的充要条件是对于所有数 a , $\|x + ay\| = \|x - ay\|$.

4. 证明在内积空间中, $x \perp y$ 的充要条件是对于所有 a , $\|x + ay\| \geq \|x\|$

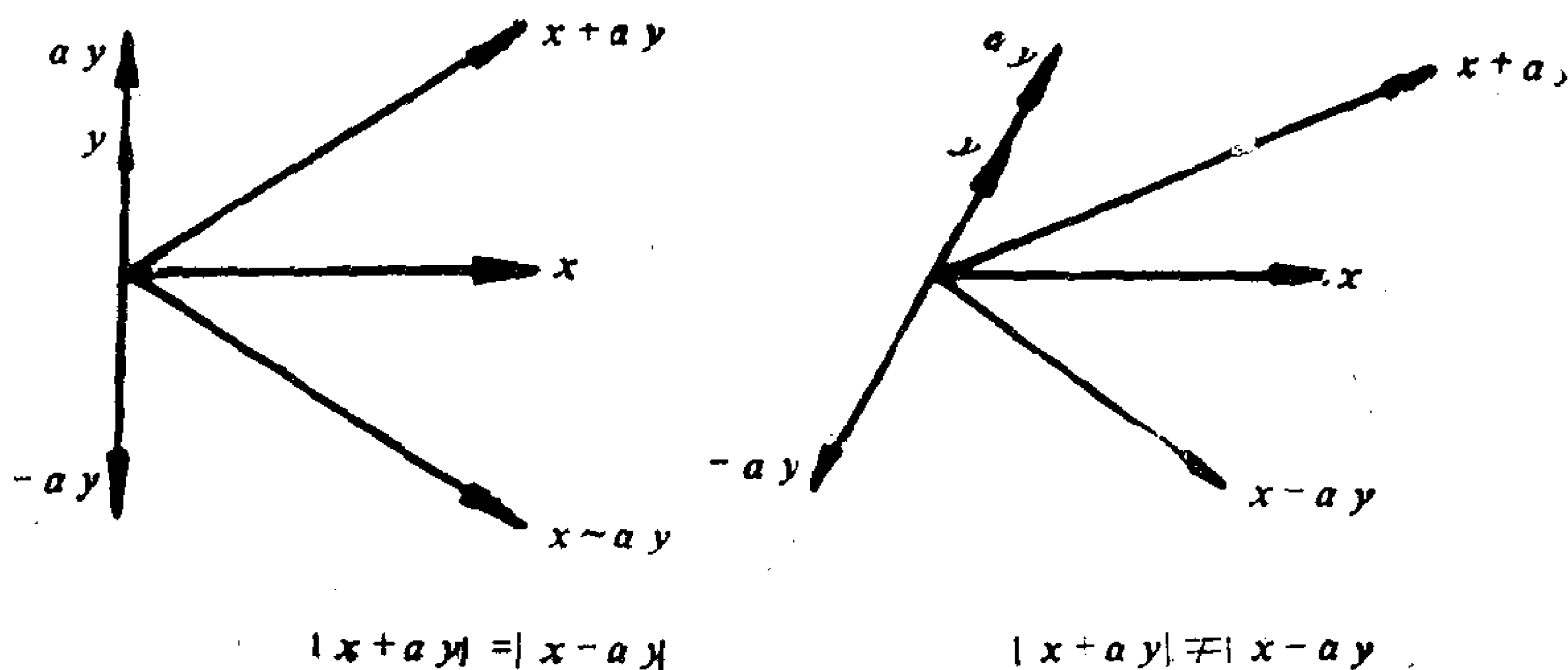


图20 欧几里得平面 R^2 中的习题3的图示

5. 设 H 是Hilbert空间, $M \subset H$ 为一凸子集, $\{x_n\} \subset M, ||x_n|| \rightarrow d = \inf ||x||$, 证明 (x_n) 在 H 中收敛, 试在 R^2 或 R^3 中给出具体例子 $x \in M$.

6. 证明 C^* 的子集 $M = \{y | y = (\eta_1, \dots, \eta_n), \sum_{i=1}^n \eta_i = 1\}$ 是完备的、凸的。在 M 中找出最小范数的向量。

7. 证明 $(-1, 1)$ 上所有实值连续函数所构成的向量空间 X 可以表示成 $(-1, 1)$ 上奇连续函数全体所成之集与偶函数全体所成之集的直和。

8. (a) 证明在 X 为Hilbert空间, M 为 X 的闭子空间时, 定理3.2-1仍成立。

(b). 能用Appolonius恒等式(习题3.1中的第3题)证明定理3.2-1吗?

9. 在 R^2 中, 若 (a) $M = \{x | x = (\xi_1, \xi_2) \neq \theta\}$, (b) M 为 R^2 中线性无关集 $\{x_1, x_2\}$, 分别求出 M^\perp 。

10. 证明 $Y = \{x | x = (\xi_j) \in l^2, \xi_{2n} = 0, n = 1, 2, \dots\}$ 为 l^2 的

一闭子空间, 并求 Y^\perp . 若 $Y = \text{Span} \{e_1, \dots, e_n\}$, $e_j = (\delta_{j,n}) \in l^3$, 则 Y^\perp 等于什么?

11. 设 A 与 B 为内积空间 X 的非空子集, 且 $A \subset B$. 证明: (a) $B^\perp \subset A^\perp$, (b) $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

12. 证明在内积空间 X 中, 其子集 $M \neq \emptyset$ 的直交补 M^\perp 是 X 的一个闭子空间.

13. 证明 Hilbert 空间 H 的子空间 Y 在 H 中为闭的充要条件是 $Y = Y^{\perp\perp}$.

14. 设 $M \neq \emptyset$ 是 Hilbert 空间 H 的任一子集, 证明 $M^{\perp\perp}$ 为 H 中包含 M 的最小闭子空间.

§3.3 直交集和直交序列

我们回忆 R^3 中的基向量 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 =$

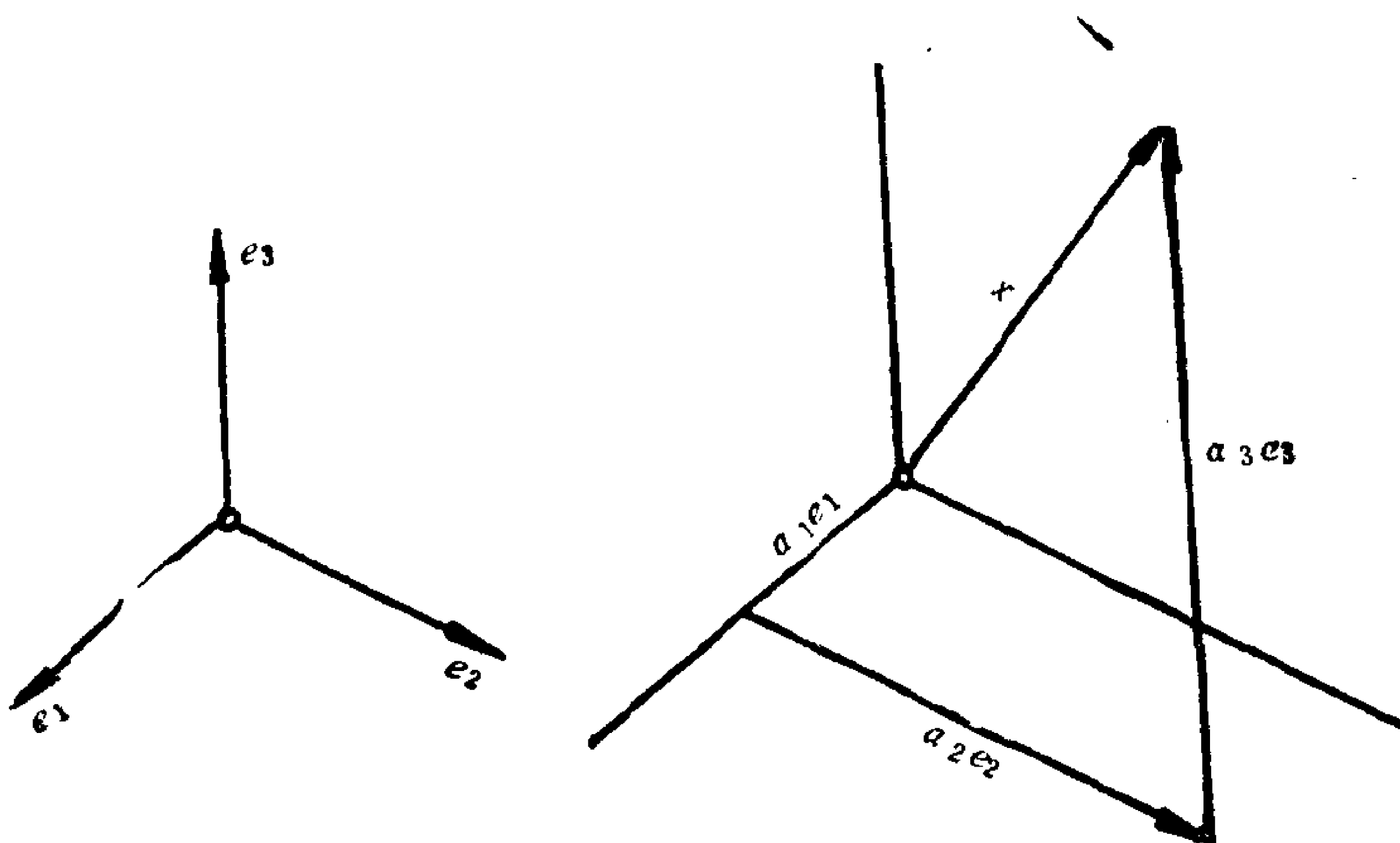


图21 R^3 中的直交集 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 、及表示式

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$(0, 0, 1)$, 它们中的任何两个均直交, 对每一个 $x \in R^3$, 有唯一的表达式.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

利用直交性, 易求出其系数 α_j ,

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j, \quad j = 1, 2, 3$$

由此可见, 直交性带来了很大的方便, 我们要将 R^3 中直交系的概念推广到一般内积空间上, 还会得到其他结果. 事实上, 直交集和直交序列的应用构成了内积空间和 Hilbert 空间的本质部分. 首先让我们介绍直交集与直交序列的概念.

3.3-1 定义 (直交集与直交序列). 设 M 是内积空间 X 的子集. 如果 M 中每一对不同元素均直交, 则称 M 为直交集. 若对于所有 $x, y \in M$ 有

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases} \quad (1)$$

那么称 M 为标准直交集. 如果 X 中序列 (x_n) 的每一对元素均直交, 即,

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad i \neq j.$$

则称 (x_n) 是直交序列. 如果 (x_n) 满足,

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

则称 (x_n) 是标准直交序列. 更一般地, 如果族 (x_α) , $\alpha \in I$, 对所有 $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$, 有, $x_\alpha \perp x_\beta$, 则称此族直交. 如果对所有 $\alpha, \beta \in I$, 有,

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases} \quad (2)$$

那么, 称此族是标准直交的.

例题.

3.3-2 Euclidean空间 R^3 . R^3 中直角坐标系的三个坐标轴的正向单位向量 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ 构成一标准直交集 $\{e_1, e_2, e_3\}$.

3.3-3 空间 l^2 . 取 $e_n = (\delta_{nj})$, 那么, (e_n) 是 l^2 中的标准直交序列.

3.3-4 连续函数空间. 设 X 是 $[0, 2\pi]$ 上连续实值函数全体, 其内积定义成.

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t) y(t) dt$$

那么, 序列 $(\cos nt)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 和序列 $(\sin nt)$ 均是 X 中的直交序列. 序列

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

和序列 $\left(\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right)$ 均是 X 中的标准直交序列.

下面我们讨论直交集和直交序列的一些简单性质.

设 X 是内积空间, $x, y \in X$, $x \perp y$, 那么,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

更一般地, 若 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为一直交集, 则

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 \quad (3)$$

事实上, 由于 $\langle x_j, x_k \rangle = 0$, $j \neq k$, 因而,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{k=1}^n x_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \langle x_i, x_k \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

3.3-5 引理(线性无关). 标准直交集是线性无关的

证明 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为标准直交, 考察方程

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \theta$$

$$\text{有, } \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k \langle e_k, e_k \rangle = \alpha_k$$

$= 0$. 因此, 证明了任意有限标准直交集线性无关. 若给定的标准直交集是无限的, 由 § 2.1 线性无关定义 同样可证明其线性无关.

设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是内积空间 X 的标准直交集, $x \in X$, 如果 $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, 那么, $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n$. 反之, 对于 $x \in X$, 和标准直交集 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 总能作一向量 y ,

$$y = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$$

一般说来, $y \neq x$, 然而却有 $(x - y) \perp e_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, 因此, 有下列引理.

3.3-6 引理(投影). 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是内积空间 X 的一标准直交集, $Y = \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$, 其中 n 固定, 则对于任

意 $x \in X$, $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ 是 x 在 Y 上的投影. 且有

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad (4)$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad (5)$$

证明 对于任意 $x \in X$. $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$, 由于 e_1, \dots, e_n 两两直交, 那么, 对于 $m = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \langle y, e_m \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, e_m \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_m \rangle = \langle x, e_m \rangle. \end{aligned}$$

因此, $\langle x - y, e_m \rangle = 0$ 于是,

$(x - y) \perp Y$.

故 y 是 x 在 Y 上的投影.

由于 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 X 的标准直交集. 因此

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \langle y, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

令, $z = x - y$ 则 $y \perp z$, 从而,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|y + z\|^2 = \langle y + z, y + z \rangle = \\ &= \|y\|^2 + \|z\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

即(5)得证.

利用(5)立即得出

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (6)$$

3.3-7 定理. 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准直交集, $x \in X$, 那么, 对任何 n 个数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 有,

$$\|x - \sum_{k=1}^n a_k e_k\| \geq \|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\| \quad (7)$$

证明 令 $y_1 = \sum_{k=1}^n a_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$,

$z = x - y$, 由引理3.3-6, $y \perp z$, $y_1 \perp z$, 于是 $y - y_1 \perp z$, 从而, 利用(3)得,

$$\begin{aligned} \|x - y_1\|^2 &= \|(y + z) - y_1\|^2 = \|(y - y_1) + z\|^2 = \|y - y_1\|^2 \\ &\quad + \|z\|^2 \geq \|z\|^2. \end{aligned}$$

故(7)成立.

由(6)可得到下面定理.

3.3-8 贝塞尔(Bessel)不等式 设 (e_k) 为内积空间 X 中一标准直交序列, 则对每一个 $x \in X$, 有,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{Bessel不等式}) \quad (8)$$

一个与Bessel不等式有关的问题是Fourier级数.

3.3-9 定义(Fourier级数) 设 (e_λ) , $\lambda \in I$, 是内积空间 X 中一标准直交族, $x \in X$, 级数 $\sum_{\lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ 称做 x 关于族 (e_λ) , $\lambda \in I$ 的Fourier级数. 当, $x = \sum_{\lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ 时, 称 x 可以展成关于 (e_λ) , $\lambda \in I$ 的Fourier级数. $\langle x, e_\lambda \rangle$, $\lambda \in I$, 称做 x 的Fourier系数.

3.3-10 定理(收敛). 设 (e_k) 是Hilbert空间 H 的一标准直交序列, 则, (a) 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad (9)$$

收敛 (依 H 上范数) 的充要条件是级数.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad (10)$$

收敛. (b) 若(9)收敛到 $x \in H$, 那么, $a_k = \langle x, e_k \rangle$

这时, (9)可写成

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = x. \quad (11)$$

(c) 对于任意 $x \in H$, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ 均收敛(依 H 上的范数收敛).

证明 (a) 令 $S_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, $\sigma_n = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$ 根据 (e_k) 的标准直交性, 对任意正整数 m , $m < n$,

$$\|S_n - S_m\|^2 = |\alpha_{m+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m$$

因而, (S_n) 为 H 中的Cauchy序列的充要条件是 (σ_n) 为 R 中Cauchy序列. 于是(a)得证,

(b) 因为 (e_n) 是标准直交的, 所以,

$$\langle S_n, e_j \rangle = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

假设 $S_n \rightarrow x$, 利用内积的连续性, 有,

$$\alpha_j = \langle S_n, e_j \rangle \rightarrow \langle x, e_j \rangle$$

即, $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$. $j = 1, 2, \cdots$,

(c) 根据定理3.3-8中的Bessel不等式, 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \text{收敛. 由(a)知级数 } \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \text{收敛.}$$

3.3-11 引理(Fourier系数). 设 (e_λ) , $\lambda \in I$, 是内积空间 X 中一标准直交族. 则对每一个 $x \in X$, 至多有可数个非零Fourier系数 $\langle x, e_\lambda \rangle$, 且满足Bessel不等式,

$$\sum_{\lambda \in I} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

证明 对于每一个固定的 $m = 1, 2, \cdots$, 根据(6), 使得

$|\langle x, e_\lambda \rangle| > \frac{1}{m}$ 成立的 Fourier 系数的个数必有限. \diamond

$E_m = \{e_\lambda \mid |\langle x, e_\lambda \rangle| > \frac{1}{m}\}$, $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ 则集 E 是可数的.

并且, $e_\lambda \in \{e_\lambda, \lambda \in I\} - E$ 时, $\langle x, e_\lambda \rangle = 0$. 根据 Bessel 不等式(8), 有,

$$\sum_{\lambda \in I} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 = \sum_{\lambda \in E} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

标准直交序列使用时非常方便, 下面我们介绍将线性无关序列化成标准直交序列的方法.

3.3-12 引理 (克莱姆—施密特(Gram-Schmidt)构造法). 设 (x_n) 是内积空间 X 中的线性无关序列. 则 (x_n) 可化成标准直交序列 (e_j) . 并且对于每一个 n , 有,

$$\text{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

证明 Gram-Schmidt 构造过程如下:

第一步, 令 $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ [因为 (x_n) 线性无关, 于是,

$x_1 \neq \theta$].

第二步, 令, $v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$. 由于, $\{x_1, x_2\}$ 线性无关, 所以, $v_2 \neq \theta$. 由 $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$, 故 $v_2 \perp e_1$. 取,

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

第三步, 向量 $v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$, 不为

零向量, 且, $v_3 \perp e_1, v_3 \perp e_2$, 取 $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$ 依此类推.

第 n 步. 向量,

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k \quad (12)$$

为非零向量, 且与 e_1, \dots, e_{n-1} 直交. 由此可得

$$e_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n. \quad (13)$$

此即Gram-Schmidt过程的一般公式.

由(12)和(13)知, 对每一个自然数 k ($1 \leq k \leq n$), x_k 是 e_1, \dots, e_n 的线性组合. 反之, e_k 也是 x_1, \dots, x_n 的线性组合. 因此, 对于每一个 n ,

$$\text{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

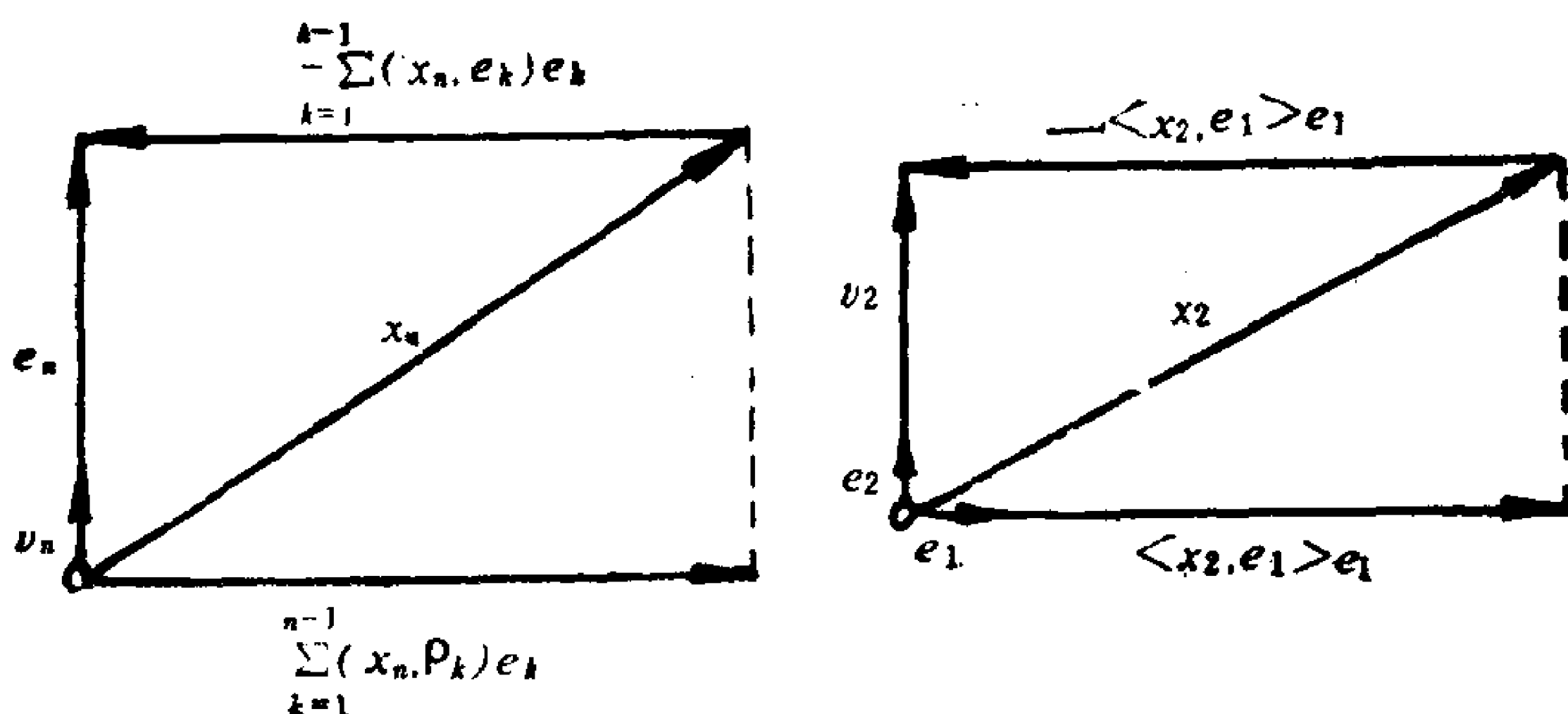


图22 Gram-Schmidt方法的说明

习 题 3.3

1. 证明 n 维内积空间有一标准直交基.

$$\{b_1, \dots, b_n\}.$$

2. 给出 l^2 中一个元素 x , 使得 (8) 中严格不等式成立.

3. 设 (e_k) 为内积空间 X 中一标准直交序列, 证明对于任意 $x, y \in X$, 有,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

4. 设 $x_j(t) = t^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) 定义在 $[-1, 1]$ 上, 按内积 $\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt$ 将序列 (x_0, x_1, \dots) 的前三项标准直交化.

5. 设 $x_1(t) = t^2, x_2(t) = t, x_3(t) = 1$ 均定义在 $[-1, 1]$ 上, 按习题 4 的内积, 依 x_1, x_2, x_3 的顺序将其标准直交化, 并与习题 4 的结果作比较.

6. 若级数 (9) 收敛于 x , 证明 (10) 的和为 $\|x\|^2$.

7. 举例说明收敛的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ 不一定有和 x .

8. 设 (x_j) 是内积空间 X 中的序列, $s_n = x_1 + \dots + x_n$, 证明若 $\|x_1\| + \|x_2\| + \dots$ 收敛, 则 (s_n) 为 Cauchy 序列.

9. 证明在 Hilbert 空间中, $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ 收敛蕴涵 $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ 收敛.

10. 设 (e_j) 为 Hilbert 空间 H 的标准直交序列, 若 $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$,

$y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j$, 证明, 级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{\beta_j}$ 绝对收敛. 且, $\langle x, y \rangle =$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{\beta_j}$$

11. 设 (e_k) 为 Hilbert 空间 H 中一标准直交序列, 证明对于每一

个 $x \in H$, 向量 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ 是 H 中一个元素, 且, $(x-y) \perp e_k$,
 $k=1, 2, \dots$.

12. 设 (e_k) 为 Hilbert 空间 H 中一标准直交序列, $Y = \text{Span} \{e_k\}$, 证明 $x \in \overline{Y}$ 的充要条件是 x 可表示成 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$.

13. 设 (e_n) 与 (\tilde{e}_n) 为 Hilbert 空间 H 中二标准直交序列. 令 $Y_1 = \text{span} \{e_n\}$, $Y_2 = \text{span} \{\tilde{e}_n\}$ 利用习题 12 证明 $Y_1 = Y_2$ 的充要条件是,

$$(a) \ e_n = \sum_{m=1}^{\infty} \langle e_n, \tilde{e}_m \rangle \tilde{e}_m, \quad (b) \ \tilde{e}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \tilde{e}_n, e_k \rangle e_k.$$

§3.4 完全标准直交集和序列

我们知道, 在空间 l^2 中, $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$
 $e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, 组成 l^2 中一标准直交集 $\{e_1, e_2, \dots,$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-1 \text{ 个}}$

$e_n\}$, 但由于 $\text{Span}\{e_1, \dots, e_n\} \neq l^2$. 我们就说集 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 所含元素不够完全. 下面, 在内积空间和 Hilbert 空间中引进非常有用的完全标准直交集的概念.

3.4-1 定义(完全的标准直交集) 设 M 是内积空间 X 中的标准直交集 (或序列), 如果,

$$\overline{\text{Span} M} = X$$

则称 M 是 X 中完全的标准直交集 (或序列)

3.4-2 空间 \mathbb{R}^3 中由 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ 组成的标准直交集 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是完全的.

3.4-3 空间 l^2 中, 序列 $(e_n), [e_n = (\delta_{nj})]$, 是一完全标准直交序列.

3.4-4 (Legendre多项式). $[-1, 1]$ 上的连续实值函数全体. 按内积.

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt$$

构成一内积空间 X , 其 X 的完备化内积空间为 $L^2[-1, 1]$. 令 $x_n(t) = t^n, n = 1, 2, \dots, t \in [-1, 1]$, (x_n) 是一线性无关函数序列. 利用Gram-Schmidt方法得一标准直交序列 (e_n) , $e_n(t)$ 是 n 次多项式. 下面证明 (e_n) 是 $L^2[-1, 1]$ 中的完全标准直交序列.

事实上, 对于任意 $x(t) \in L^2[-1, 1]$, 及每个 $\varepsilon > 0$, 由于 $L^2[-1, 1]$ 是 X 的完备化空间, 于是 X 在 $L^2[-1, 1]$ 中稠密, 必存在 $[-1, 1]$ 上连续的函数 $y(t)$, 使得,

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于连续函数 $y(t)$, 存在多项式 $p(t)$, 使得对于任意 $t \in [-1, 1]$, 有,

$$|y(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

(根据4.11节中Weierstrass逼近定理).

从而推出,

$$\|y - p\|^2 = \int_{-1}^1 |y(t) - p(t)|^2 dt < 2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{8} = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

合起来, 有

$$\|x - p\| \leq \|x - y\| + \|y - p\| < \varepsilon.$$

由Gram-Schmidt过程知, 对充分大的 m , $p(t) \in \text{Span}\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$, 因此, 证得 (e_n) 是 $L^2[-1, 1]$ 中完全标准直交序列.

在实际问题中, 需要求出 $e_n(t)$ 的确切表达式. 可以证明.

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} p_n(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

其中,
$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n]$$

$p_n(t)$ 称为 n 阶Legendre多项式, $[p_n(t)]$ 是 $L^2[-1, 1]$ 中的直交序列. (参看图23) 其前6项如下:

$$p_0(t) = 1 \quad p_1(t) = t$$

$$p_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad p_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

$$p_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$$

$$p_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

3.4-5 定理(完全性). 设 $M = \{e_i\}$ 为内积空间 X 的标准直交集. 则,

(a). 若 M 在 X 中是完全的, 那么不存在非零的 $x \in X$ 与其 M 的每个元素直交. 即,

$$x \perp M \text{ 蕴涵 } x = \theta. \quad (1)$$

(b). 若 X 为完备的内积空间, 即Hilbert空间, 条件(1)

也是 M 为完全的充分条件.

证明 (a) 设 H 是 X 的完备化内积空间, X 可视为 H 的稠密子空间。因为 M 在 X 中是完全的, 根据定义3.4-1, $\text{Span}M$ 在 X 中稠密, 于是 $\text{Span}M$ 也在 H 中稠密. 利用引理3.2-7, 得到 $M^\perp = \{\theta\}$. 即

(1) 成立.

(b) 若 X 为希耳伯特空间. M 为 X 中一标准直交集且满足条件(1): $M^\perp = \{\theta\}$, 于是根据引理3.2-7, $\overline{\text{span}M} = X$, 故证得 M 是完全的.

由定理3.4-5知, 完全标准直交集不能由添加新元素扩充为更大的标准直交集, 也就是说它本身是最大的标准直交集.

判定完全性的一个重要标准是从Bessel不等式得出的. 为此, 我们考虑Hilber空间 H 中任意给定的标准直交集 M . 从引理3.3-11可知每个固定的 $x \in M$, 至多有可数个非零傅里叶系数. 将这些系数排成一序列: $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$ 得到Bessel不等式,

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (2)$$

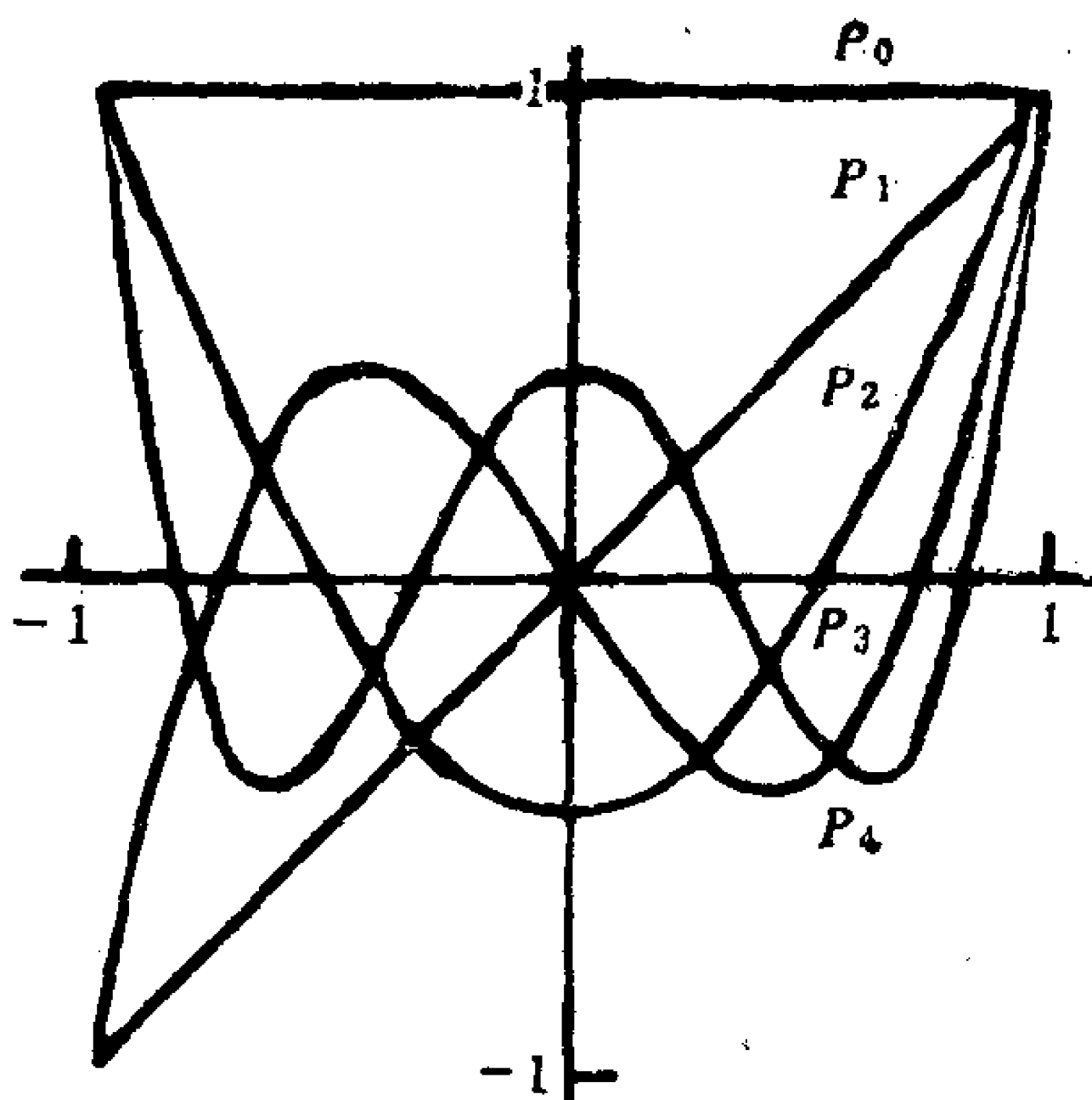


图23 Legendre多项式

其中左边为一无穷级数或有限和. 等号成立时得著名的Parseval关系式,

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (3)$$

3.4-6 定理(完全性). 在Hilbert空间 H 中, 标准直交集 M 在 H 中为完全的当且仅当对所有的 $x \in H$, Parseval关系式(3)成立(其和取遍 x 关于 M 的所有非零Fourier系数)

证明 (a) 若 M 不是完全的, 由定理3.4-5知, H 中存在一非零元 x , $x \perp M$, 因此在(3)中对所有的 k , 有 $\langle x, e_k \rangle = 0$. 即(3)中左边为0, 这与 $\|x\|^2 \neq 0$ 矛盾. 从而证明了若对所有 $x \in H$ (3)式成立, 则 M 在 H 中必是完全的.

(b) 若 M 在 H 中是完全的. 考虑任一 $x \in H$, 其非零Fourier系数可排成一序列 $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$, 我们由下式定义 y

$$y = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k \quad (4)$$

其收敛性由定理3.3-10得出. 现证明 $x - y \perp M$, 对(4)中出现的每个 e_i , 利用标准直交性, 及内积连续性,

$$\begin{aligned} \langle x - y, e_i \rangle &= \langle x, e_i \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

对于不在(4)中的每一个 $v \in M$, 有, $\langle x, v \rangle = 0$. 于是, $\langle x - y, v \rangle = \langle x, v \rangle - \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, v \rangle = 0 - 0 = 0$.

即, $x - y \perp M$. 因为 M 在 H 中是完全的, 根据定理3.4-5, $M^\perp = \{0\}$. 故 $x - y = 0$, $x = y$. 由(4)及再次利用标准直交性, 及内积连续性, 得,

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle$$

$$= \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle}$$

即证得(3)式成立.

现在我们转而考虑Hilbert空间的 \mathcal{A} 的可分性与标准直交集的关系.

3.4-7 定理 (可分Hilbert空间). 设 H 为一Hilbert空间. 则,

(a) 若 H 为可分, 那么 H 中任一标准直交集均可数.

(b) 若 H 中包含一个完全标准直交序列 (e_i) , 那么 H 为可分.

证明 (a) 设 H 为可分, 则 H 中必存在一可数稠密子集 B . 令 M 为 H 中任一标准直交集, 对于任意 $x, y \in M, x \neq y$, 有,

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = 2$$

因此, x 的半径为 $\frac{2}{3}$ 的球形邻域 N_x 与 y 的半径为 $\frac{2}{3}$ 的球形

邻域 N_y 不相交. 由 B 在 H 中稠密, 必存在 $b \in B$ 及 $\tilde{b} \in B$, 使得 $b \in N_x, \tilde{b} \in N_y$. 因为, $N_x \cap N_y = \emptyset$. 所以, $b \neq \tilde{b}$. 因而, 若 M 为非可数, 则存在不可数个两两不相交的球形邻域. 所以 B 亦不可数, 这与 B 可数矛盾. 由此得出 M 必可数.

(b) 由题设 (e_k) 为 H 中一完全标准直交序列, 令 A 是下列线性组合

$$r_1^{(n)}e_1 + \cdots + r_n^{(n)}e_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

的全体所成之集. 其中, $r_k^{(n)} = a_k^{(n)} + ib_k^{(n)}$, 且 $a_k^{(n)}$ 与 $b_k^{(n)}$ 为有理数. 显然 A 为可数集. 下面证 A 在 H 中稠密. 对于任意 $x \in H$ 和每个 $\varepsilon > 0$, 因为序列 (e_k) 在 H 中为完全的. 于是

$x \in H = \overline{\text{Span}\{e_k\}}$, 必存在一线性组合 $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, 使得,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由定理3.3-7中的(7)式有,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为有理数在 R 上稠密, 对于每一个 $\langle x, e_k \rangle$, 存在 $r_k^{(n)}$ (具有有理的实部与虚部), 使得,

$$\left\| \sum_{k=1}^n [\langle x, e_k \rangle - r_k^{(n)}] e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此, $v = \sum_{k=1}^n r_k^{(n)} e_k \in A$, 且满足,

$$\begin{aligned} \|x - v\| &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k - v \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 A 在 H 中稠密, 从而 H 为可分.

在任一 Hilbert 空间 $H \neq \{\theta\}$ 中, 均存在一完全标准直交集. 对有限维 Hilbert 空间这是显然的. 对无限维可分 Hilbert 空间可由 Gram-Schmidt 过程产生. 对非可分的 Hilbert 空间一个非构造性的证明可从 Zorn 引理推出 (我们将在 4.1 节中介绍 Zorn 引理).

在一给定的 Hilbert 空间 $H \neq \{\theta\}$ 中, 所有完全标准直交集均有相同的势. 称其为 Hilbert 维数或称为 H 的直交维数 (若 $H = \{\theta\}$, 维数定义为 0), 对一有穷维空间上述论述

是显而易见的，因为Hilbert维数也就是代数意义下的维数。对一无穷维且可分的Hilbert空间上述结论可从定理3.4-7中推出。对一般的Hilbert空间其证明要用到集合论某些较深的知识作为工具（这里证明略去）

为了研究Hilbert空间及其上的线性算子，首先我们回顾§3.1中内积空间同构的概念，它完全适合Hilbert空间。设 H 和 \tilde{H} 是同一数域上的两个Hilbert空间，如果存在双射线性算子 $T: H \rightarrow \tilde{H}$ ，使得对于所有的 $x, y \in H$ 有，

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad (5)$$

则称 H 与 \tilde{H} 是同构的Hilbert空间，称 T 是 H 到 \tilde{H} 的同构映射。因为 T 是线性的，其保持了向量空间结构，且(5)式表明 T 是等距的，又由 T 是双映射，从而得出 H 与 \tilde{H} 不仅在代数上而且在度量上可以不加区别。在同一数域上的两个抽象的Hilbert空间其区别仅在于它们的维数，这就是下述定理的意义所在。

3.4-8 定理（同构和Hilbert维数）。设 H 和 \tilde{H} 是同一数域 K 上的两个Hilbert空间，其为同构的充分必要条件是它们有相同的Hilbert维数。

证明 (a)若 H 与 \tilde{H} 同构，则存在双射线性算子 $T: H \rightarrow \tilde{H}$ 且满足(5)式。即保持内积不变，于是 T 将 H 中每一完全标准直交集映射到 \tilde{H} 中为一完全标准直交集。因此 H 与 \tilde{H} 有相同的Hilbert维数。

(b)反之，假设 H 与 \tilde{H} 有相同的Hilbert维数，当 $H =$

$\{\theta\}$ 及 $\tilde{H} = \{\theta\}$ 时, 显然 H 与 \tilde{H} 同构. 设 $H \neq \{\theta\}$, 则 $\tilde{H} \neq \{\theta\}$. 对 H 中任一完全标准直交集 M 和 \tilde{H} 中任一完全标准直交集 \tilde{M} 有相同的基数, 所以可用相同的指标集 $\{k\}$ 加以标号, 记 $M = \{e_k\}$ 和 $\tilde{M} = \{\tilde{e}_k\}$.

为了证明 H 和 \tilde{H} 是同构的, 我们构造一个 H 到 \tilde{H} 上的映射, 对于每一个 $x \in H$, 由于 M 是完全的标准直交集, 根据定理 3.4-6 得出,

$$x = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k \quad (6)$$

由贝塞尔不等式有 $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 < \infty$, 定义,

$$\tilde{x} = Tx = \sum_k \langle x, e_k \rangle \tilde{e}_k \quad (7)$$

从定理 3.3-10 知其收敛, 所以, $\tilde{x} \in \tilde{H}$. 因为内积对第一个因子是线性的, 易证 T 为线性算子. 由 (7) 及 (6) 得,

$$\|\tilde{x}\|^2 = \|Tx\|^2 = \sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$$

由此知 T 是等距的. 利用 § 3.1 中的公式 (10) 和 (11) 可证出 T 保持内积不变. 等距蕴涵着单射, 事实上, 若 $Tx = Ty$, 则

$$\|x - y\| = \|T(x - y)\| = \|Tx - Ty\| = 0.$$

从而, $x = y$. 由定理 2.6-10 知 T 为单射的.

最后我们证明 T 为满射. 对于 \tilde{H} 中任意给定的

$$\tilde{x} = \sum_k \langle \tilde{x}, \tilde{e}_k \rangle \tilde{e}_k.$$

由 Bessel 不等式 $\sum_k |\langle \tilde{x}, \tilde{e}_k \rangle|^2 < \infty$, 知级数

$$\sum \langle \tilde{x}, \tilde{e}_k \rangle e_k$$

在 H 中收敛, 令其收敛于 x (参阅定理3.3-10) 且 $\langle \tilde{x}, \tilde{e}_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$, 因此由(7) 得到 $\tilde{x} = Tx$. 即证明了 T 为满射. 从而 H 与 \tilde{H} 为同构的.

习 题 3.4

1. 若 F 为一内积空间 X 中的标准直交基, 我们能否将每个 $x \in X$ 表示为 F 中元素的线性组合?

2. 证明若Hilbert空间 H 的直交维数为有限, 则它等于 H 作为一向量空间的维数. 反之, 若后者有限其维数亦为前者.

3. 由Parseval等式(3) 证明下列公式

$$\langle x, y \rangle = \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}.$$

4. 证明在Hilbert空间中标准直交族 (e_k) , $k \in I$, 为完全的当且仅当习题3的关系式对此空间中的每对 x 与 y 均成立.

5. 设 H 为可分的Hilbert空间, 且 M 是 H 的可数稠密子集. 证明对 M 用Gram-Schmit过程可得 H 的一完全标准直交序列.

6. 证明在可分的Hilbert空间 H 中任一标准直交序列 F , 存在一包含 F 的完全标准直交序列 \tilde{F} .

7. 设 M 为内积空间 X 中一完全集. 若对所有的 $x \in M$ 有, $\langle v, x \rangle = \langle w, x \rangle$, 证明 $v = w$.

8. 设 M 是Hilbert空间 H 一子集, 假设对所有的 $v, w \in H$, 及每个 $x \in M$, 由 $\langle v, x \rangle = \langle w, x \rangle$, 可得 $v = w$. 证明 M 在 H 中为完全的.

§3.5 Hilbert空间上泛函的表示

实际问题要求了解各种空间上有界线性泛函的一般形

式，其重要性已在 § 2.10 中阐明．对一般的 Banach 空间这样的公式及其推导过程有时是复杂的．然而在 Hilbert 空间的情况下却出人意外的简单．

3.5-1 Riesz 定理 (Hilbert 空间上的泛函) Hilbert 空间 H 上任一有界线性泛函可由内积表示，即

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad (1)$$

其中 z 依赖于 f ，且由 f 唯一确定，并有范数

$$\|z\| = \|f\| \quad (2)$$

证明 我们要证：

- (a) f 有表示式 (1)；
- (b) (1) 中之 z 是唯一的；
- (c) 公式 (2) 成立．

详细证明如下：

(a) 若 $f = 0$ ，则取 $z = \theta$ ，于是 (1) 与 (2) 成立．设 $f \neq 0$ ，若 (1) 存在，那么首先 $z \neq \theta$ ，其次对于所有使 $f(x) = 0$ 的 x 有 $\langle x, z \rangle = 0$ ，即， $z \perp N(f)$ ．由定理 2.6-9， $N(f)$ 是一向量空间，从定理 2.7-11 知其为闭的． $f \neq 0$ 可知 $N(f) \neq H$ ，由投影定理 3.2-5 知 $N(f)^\perp \neq \{\theta\}$ ，因此存在一个 $z_0 \in N(f)^\perp$ ， $z_0 \neq \theta$ ，设，

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x.$$

其中 $x \in H$ 为任意．于是得，

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0.$$

即 $v \in N(f)$ ．则有

$$0 = \langle v, z_0 \rangle = f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle$$

因为 $z_0 \neq 0$ ，于是 $\langle z_0, z_0 \rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$ ，

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle} \langle x, z_0 \rangle$$

取 $z = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} z_0$, (1) 式得证.

(b) 证(1)式中的 z 是唯一的. 假设还有一个 z_1 , 对所有的 $x \in H$ 有,

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \langle x, z_1 \rangle$$

则, $\langle x, z - z_1 \rangle = 0$. 选特殊的 $x = z - z_1$, 得.

$\|z - z_1\|^2 = 0$, 从而 $z_1 = z$, 即 z 的唯一性得证.

(c) 证(2)式成立. 若 $f = 0$, 则 $z = \theta$, 于是(2)式成立. 设 $f \neq 0$, 则 $z \neq \theta$. 在(1)中当 $x = z$ 时, 得,

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\| \|z\|$$

从而, $\|z\| \leq \|f\|$. 由(1)式及引理3.1-2中的Schwarz不等式得出.

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\|.$$

因此, $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|$. 故(2)式成立.

3.5-2 引理(相等性). 若对内积空间 X 中所有 w , 均有 $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$, 则 $v_1 = v_2$. 特别, 若对所有 $w \in X$ 均有 $\langle v, w \rangle = 0$, 则 $v = \theta$.

证明 由假设, 对所有 w ,

$$\langle v_1 - v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle - \langle v_2, w \rangle = 0.$$

对 $w = v_1 - v_2$. 得 $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$. 因此 $v_1 - v_2 = \theta$, 即 $v_1 = v_2$.

特别 $\langle v, w \rangle = 0$. 当 $w = v$ 时, 则 $\|v\|^2 = 0$ 所以 $v = \theta$.

Hilbert空间上有界线性泛函的广泛应用在很大程度上是由于Riesz表示式(1)的简单性, 不仅如此, (1)式在Hi-

Hilbert空间的算子理论上也是十分重要的.

3.5-3 定义(复双线性泛函). 设 X 与 Y 是同一数域 K 上的向量空间. 如果映射 $h: X \times Y \rightarrow K$ 满足下列性质, 对所有 $x, x_1, x_2 \in X$ 及所有 $y, y_1, y_2 \in Y$, 任意数 $\alpha, \beta \in K$ 有,

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y). \\ (b) \quad & h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2) \\ (c) \quad & h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y) \\ (d) \quad & h(x, \beta y) = \bar{\beta} h(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

则称 h 是 $X \times Y$ 上的复双线性泛函. 若 $K = R$, 即 X, Y 都是实向量空间时, h 称为双线性泛函.

若 X, Y 是赋范空间, 且存在一实数 c , 使对所有 $x \in X$ 及所有 $y \in Y$, 有

$$|h(x, y)| \leq c \|x\| \|y\| \quad (4)$$

则称 h 是有界的. 且范数定义为

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\| \|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)| \quad (5)$$

由(4)和(5)可得有界双线性泛函满足

$$|h(x, y)| \leq \|h\| \|x\| \|y\|. \quad (6)$$

例如, 内积空间的内积是有界双线性泛函.

从定理3.5-1可得Hilbert空间上双线性泛函的一般表示.

3.5-4 定理 (Riesz表示). 设 H_1, H_2 为Hilbert空间, 且 $h: H_1 \times H_2 \rightarrow K$ 为一有界复双线性泛函, 则 h 有表示式

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle \quad (7)$$

其中: $S: H_1 \rightarrow H_2$ 为一有界线性算子, 且由 h 唯一确定, 并

有范数

$$\|S\| = \|h\|. \quad (8)$$

证明 对于固定的 x , $h(x, y)$ 关于 y 是有界线性泛函, 由定理3.5-1, 存在唯一的 $z \in H_2$, 使得,

$$h(x, y) = \langle z, y \rangle \quad (9)$$

这里 z 依赖于 x . 利用(9)式定义算子 $S: H_1 \rightarrow H_2$, 由 $z = Sx$ 给定.

S 是线性的. 事实上, 其定义域是向量空间 H_1 . 由(7)及复双线性泛函的性质, 对所有 $y \in H_2$, 有

$$\begin{aligned} \langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) \\ &= \alpha \langle Sx_1, y \rangle + \beta \langle Sx_2, y \rangle \\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y \rangle \end{aligned}$$

根据引理3.5-2得,

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2.$$

S 是有界的. 实际上, 除去 $S=0$ 之外, 从(5)和(7)有,

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \geq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Sx \neq 0}} \frac{|\langle Sx, Sx \rangle|}{\|x\| \|Sx\|} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\| \end{aligned}$$

从而证明了 S 的有界性, 且 $\|S\| \leq \|h\|$.

现证(8)式. 利用Schwarz不等式

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\| \|y\|}{\|x\| \|y\|} = \|S\|.$$

因此, $\|h\| \leq \|S\|$, (8)式成立.

S 是唯一的. 事实上, 假设存在一有界线性算子 $T: H_1 \rightarrow H_2$, 使得对所有 $x \in H_1$ 和每个 $y \in H_2$ 有,

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle$$

由引理 3.5-2 得出, 对所有 $x \in H_1$, $Sx = Tx$,

所以 $S = T$.

习 题 3.5

1. 证明 R^3 上任一线性泛函可由点积表示.

$$f(x) = x \cdot z = \xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2 + \xi_3 \zeta_3$$

2. 证明 l^2 上任一有界线性泛函 f 可表示为下述形式,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\zeta_j} \quad (z = (\zeta_j) \in l^2)$$

3. 若 z 为内积空间 X 中任一固定元素, 证明 $f(x) = \langle x, z \rangle$ 定义 X 上一有界线性泛函 f , 其范数为 $\|z\|$.

4. 考虑习题 3, 若映射 $X \rightarrow X^*$ 由 $z \mapsto f$ 给定且为满射, 证明 X 必为 Hilbert 空间.

5. 证明实空间 l^2 的对偶空间为 l^2 (利用定理 3.5-1).

6. 证明定理 3.5-1 定义了一个等距双射 $T: H \rightarrow H^*$, $z \mapsto f_z = \langle \cdot, z \rangle$. 其不为线性但为共轭线性的, 即,

$$\alpha z + \beta v \mapsto \overline{\alpha} f_z + \overline{\beta} f_v.$$

7. 证明 Hilbert 空间 H 的对偶空间 H^* 是 Hilbert 空间, 具有内积.

$$\langle f_z, f_v \rangle = \overline{\langle z, v \rangle} = \langle v, z \rangle$$

式中 $f_z(x) = \langle x, z \rangle$.

8. 证明任何 Hilbert 空间 H 与其二次对偶空间 $H^{**} = (H^*)^*$ 同构 (该性质称为 H 的自反性)

9. 证明内积空间 X 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是有界复双线性泛函 h . 在

这种情况下 $\|h\|$ 是什么?

10. 若 X 为向量空间且 h 是 $X \times X$ 上的复双线性泛函. 证明对于固定的 y_0 , $f(x) = h(x, y_0)$ 定义 X 上一线性泛函 f .

11. 设 X 和 Y 是赋范空间, 证明 $X \times Y$ 上的有界复双线性泛函 h 是二元连续的.

12. (Hermite 泛函) 设 X 是数域 K 上的向量空间, Hermite 复双线性泛函或简称 $X \times X$ 上的 Hermite 泛函 h 是一映射 $h: X \times X \rightarrow K$, 使得对所有 $x, y, z \in X, a \in K$ 有,

$$h(x+y, z) = h(x, z) + h(y, z)$$

$$h(ax, y) = ah(x, y)$$

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}$$

若 $K = R$, 最后一个条件是什么? h 成为 X 上的内积必须附加什么条件?

13. 设 X 为向量空间且 h 为 $X \times X$ 上的 Hermite 泛函, 若对所有 $x \in X, h(x, x) \geq 0$, 则称 h 为半正定泛函. 证明半正定的 h 满足 Schwarz 不等式.

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y).$$

14. (拟范数) 若 h 满足习题 13 中的条件, 证明

$$P(x) = \sqrt{h(x, x)}$$

定义 X 上一个拟范数. (参看 § 2.3 习题 10)

§3.6 Hilbert 伴随算子

利用上节所得结果我们引进 Hilbert 空间上有界线性算子的 Hilbert 伴随算子.

3.6-1 定义 (Hilbert 伴随算子 T^*) 设 H_1 与 H_2 是 Hilbert 空间, $T: H_1 \rightarrow H_2$ 是有界线性算子, 如果存在算子 $T^*: H_2 \rightarrow H_1$, 使得对于所有 $x \in H_1$ 和 $y \in H_2$, 有

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (1)$$

则称 T^* 为 T 的Hilbert伴随算子.

3.6-2 定理(存在性) 定义3.6-1中 T 的Hilbert伴随算子 T^* 是唯一存在的, 而且是有界线性算子其范数为

$$\|T^*\| = \|T\| \quad (2)$$

证明. 公式

$$h(y, x) = \langle y, Tx \rangle \quad (3)$$

定义 $H_2 \times H_1$ 上一复双线性泛函. 这是因其内积为复双线性泛函以及 T 是线性算子.

h 为有界的. 事实上, 由Schwarz不等式

$$\begin{aligned} |h(y, x)| &= |\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \|Tx\| \\ &\leq \|T\| \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

这也得出 $\|h\| \leq \|T\|$. 且,

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq \theta \\ y \neq \theta}} \frac{|\langle y, Tx \rangle|}{\|y\| \|x\|} \geq \sup_{\substack{x \neq \theta \\ T \neq \theta}} \frac{|\langle Tx, Tx \rangle|}{\|Tx\| \|x\|} = \|T\|$$

因此证得

$$\|h\| = \|T\|. \quad (4)$$

由定理3.5-4, h 的Riesz表示式, 存在唯一的有界线性算子 $S: H_2 \rightarrow H_1$, 使得

$$h(y, x) = \langle Sy, x \rangle. \quad (5)$$

且, $\|S\| = \|h\|$. 令 $T^* = S$. 于是, 由(3)和(5)得,

$$\langle y, Tx \rangle = \langle T^*y, x \rangle.$$

两边同时取其共轭就证得(1), 并有 $\|T^*\| = \|T\|$. 即(2)式也成立.

为了便于研究Hilbert伴随算子的性质, 兹介绍下述引

理.

3.6-3 引理(零算子). 设 X 和 Y 是内积空间, 而 $Q: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子. 则,

(a) $Q=0$ 的充要条件是对所有的 $x \in X, y \in Y$
 $\langle Qx, y \rangle = 0$ 成立.

(b) X 为复内积空间时, 若 $Q: X \rightarrow X$ 对所有 $x \in X$,
 $\langle Qx, x \rangle = 0$, 则 $Q=0$.

证明: (a) 若 $Q=0$, 显然 $\langle Qx, y \rangle = 0$. 反之若对于所有 $x \in X$ 与 $y \in Y$ 有 $\langle Qx, y \rangle = 0$, 由引理 3.5-2 知, $Qx = \theta$, 即 $Q=0$.

(b) 由假设, 对于每一个 $v = \alpha x + y \in X$,

$$\langle Qv, v \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{即, } 0 &= \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y \rangle \\ &= |\alpha|^2 \langle Qx, x \rangle + \langle Qy, y \rangle \\ &\quad + \alpha \langle Qx, y \rangle + \overline{\alpha} \langle Qy, x \rangle \end{aligned}$$

由假设前两项等于零, $\alpha = 1$ 时有,

$$\langle Qx, y \rangle + \langle Qy, x \rangle = 0.$$

$\alpha = i$ 时有,

$$\langle Qx, y \rangle - \langle Qy, x \rangle = 0$$

两式相加得 $\langle Qx, y \rangle = 0$, 利用 (a) 得 $Q=0$.

值得注意的是在引理的 (b) 部分, 条件 X 为复的是必要的. 若 X 为实的结论可能不成立. 一个反例是平面 R^2 旋转一直角的变换 Q , Q 为线性且对于所有 $x \in R^2, Qx \perp x$, 即 $\langle Qx, x \rangle = 0$ 但 $Q \neq 0$.

我们现在给出一些 Hilbert 伴随算子的一般性质.

3.6-4 定理 (Hilbert 伴随算子的性质) 设 H_1, H_2 是

Hilbert空间. $S: H_1 \rightarrow H_2$ 和 $T: H_1 \rightarrow H_2$ 是有界线性算子, α 是任意数. 则有,

- (a) $\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle. (x \in H_1, y \in H_2)$
- (b) $(S+T)^* = S^* + T^*.$
- (c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
- (d) $(T^*)^* = T.$
- (e) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$
- (f) $T^*T = 0$ 的充要条件是 $T = 0$.
- (g) $(ST)^* = T^*S^*$ (假设 $H_1 = H_2$).

(6)

证明 (a) 由(1)得(6a):

$$\langle T^*y, x \rangle = \overline{\langle x, T^*y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle$$

(b) 由(1), 对所有 $x \in H_1$ 和 $y \in H_2$,

$$\begin{aligned} \langle x, (S+T)^*y \rangle &= \langle (S+T)x, y \rangle \\ &= \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle \\ &= \langle x, S^*y \rangle + \langle x, T^*y \rangle \\ &= \langle x, (S^* + T^*)y \rangle \end{aligned}$$

根据引理3.5-2, 对所有的 $y \in H_2$, $(S+T)^*y = (S^* + T^*)y$. 依定义, $(S+T)^* = S^* + T^*$.

(c) 对于任意 $x \in H_1$, $y \in H_2$.

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T)^*y, x \rangle &= \langle y, (\alpha T)x \rangle = \langle y, \alpha(Tx) \rangle \\ &= \overline{\alpha} \langle T^*y, x \rangle = \langle \overline{\alpha} T^*y, x \rangle \end{aligned}$$

即 $\langle [(\alpha T)^* - \overline{\alpha} T^*]y, x \rangle = 0$. 由引理3.6-3(a)得(6c)

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*.$$

(b) 对所有 $x \in H_1$ 和 $y \in H$

$$\begin{aligned}\langle (T^*)^*x, y \rangle &= \langle x, T^*y \rangle \\ &= \langle Tx, y \rangle\end{aligned}$$

据引理3.6-3(a)证得 $(T^*)^* = T$.

(e) 由Schwarz不等式,

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \\ &\leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2\end{aligned}$$

因此, $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$

由此得出, $\|T^*T\| = \|T\|^2$. 因为由(d)知 $T^{**} = T$, $\|TT^*\| = \|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$. 于是,

$$\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2.$$

(f) 从(6e)立即得到(6f).

(g) 利用(1)得,

$$\begin{aligned}\langle x, (ST)^*y \rangle &= \langle (ST)x, y \rangle \\ &= \langle Tx, S^*y \rangle = \langle x, T^*S^*y \rangle\end{aligned}$$

由引理3.6-3(a), $(ST)^*y = T^*S^*y$. 从而依算子相等的定义有 $(ST)^* = T^*S^*$.

习题 3.6

1. 证明 $O^* = O$, $I^* = I$.

2. 设 H 是 Hilbert 空间, $T: H \rightarrow H$ 是有界线性双射算子其逆为有界. 证明 $(T^*)^{-1}$ 存在且

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

3. 设 (T_n) 是 Hilbert 空间上有界线性算子序列且 $T_n \rightarrow T$, 证明 $T_n^* \rightarrow T^*$.

4. 设 H_1 与 H_2 为 Hilbert 空间, $T: H_1 \rightarrow H_2$ 为有界线性算子, 若 $M_1 \subset H_1$ 且 $M_2 \subset H_2$ 使得 $T(M_1) \subset M_2$. 证明: $M_1^\perp \supset T^*(M_2^\perp)$.

5. 设习题4中的 M_1 与 M_2 为闭子空间, 证明 $T(M_1) \subset M_2$ 当且仅

当 $M_1^\perp \supset T^*(M_2^\perp)$.

6. 若在习题 4 中 $M_1 = N(T) = \{x | Tx = \theta\}$, 证明, (a) $T^*(H_2) \subset M_1^\perp$

(b) $(T(H_1))^\perp \subset N(T^*)$.

(c) $M_1 = (T^*(H_2))^\perp$

7. 设 T_1 与 T_2 为复 Hilbert 空间上映射到自身的有界线性算子, 若对所有的 $x \in H$,

$$\langle T_1 x, x \rangle = \langle T_2 x, x \rangle$$

成立, 证明 $T_1 = T_2$.

8. 设 $S = I + T^*$, $T: H \rightarrow H$. 这里 H 为 Hilbert 空间, T 为有界线性算子, 证明 $S^{-1}: S(H) \rightarrow H$ 存在.

9. 证明在希耳伯特空间 H 上一有界线性算子 $T: H \rightarrow H$ 其值域为有穷维的充分必要条件是 T 能表成下述形式

$$Tx = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle w_j, \quad (v_j, w_j \in H).$$

10. (右移算子) 设 (e_n) 为 Hilbert 空间 H 中一完全标准直交序列. 定义右移算子为这样线性算子 $T: H \rightarrow H$, 对 $n = 1, 2, \dots$, 有 $Te_n = e_{n+1}$, 试解释名称并求值域、零空间及 T 的 Hilbert 伴随算子的范数.

§3.7 自伴算子、酉算子、正规算子

本节介绍利用 Hilbert 伴随算子定义的在实际中非常重要的三类有界线性算子.

3.7-1 定义(自伴、酉、正规算子). 设 H 是希耳伯特空间, $T: H \rightarrow H$ 是有界线性算子. T^* 是 T 的 Hilbert 伴随算子, 若 $T^* = T$, 则称 T 是自伴算子或称为 Hermite 算子.

若 T 是双射且 $T^* = T^{-1}$, 则称 T 是酉算子.

若 $TT^* = T^*T$, 则称 T 是正规算子.

由定义3.6-1, T 与其Hilbert伴随算子 T^* 有

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

若 T 为自伴算子, 上述公式成为.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad (1)$$

显然, T 为自伴算子的充分必要条件是(1)式成立.

若 T 为自伴算子或酉算子, 则 T 必为正规算子. 事实上, $T = T^*$ 蕴涵 $T^*T = TT^* = T^2$, $T^* = T^{-1}$ 蕴涵 $T^*T = TT^* = I$.

然而正规算子不一定是自伴算子或酉算子, 例如, 若 $I: H \rightarrow H$ 为恒等算子, 则 $T = 2iI$ 为正规算子. 因为 $T^* = -2iI$,

$$TT^* = T^*T = 4I. \text{ 但 } T^* \neq T, \quad T^* \neq T^{-1} = -\frac{1}{2}iI.$$

定义3.7-1 的术语是矩阵中相应术语的推广, 这从下述例子中可看出.

3.7-2 例子(矩阵). C^n 中内积定义如下:

$$\langle x, y \rangle = x^T \overline{y} \quad (2)$$

其中 x 和 y 写成列向量, x^T 是 x 的转置. 即, $x^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

设 $T: C^n \rightarrow C^n$ 为一线性算子 (由定理2.7-8 知其为有界) 对 C^n 给定的一个基, 用两个 n 行方阵 A 和 B 分别表示 T 与它的 Hilbert 伴随算子 T^* .

利用(2)与熟知的乘积转置规则: $(Bx)^T = x^T B^T$ 得到,

$$\langle Tx, y \rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y}$$

与 $\langle x, T^*y \rangle = x^T \overline{B^T y}$

根据 §3.6(1), 对所有 $x, y \in C^n$. 上述二等式左端相等, 从而.

$$B = \overline{A}^T$$

因此:

若 T 为自伴算子 (亦称Hermite算子), 则表示矩阵 A 为Hermite矩阵 ($\overline{A}^T = A$).

若 T 为酉算子, 则 A 为酉矩阵 ($\overline{A}^T = A^{-1}$)

若 T 为正规算子, 则 A 为正规矩阵 ($\overline{A}^T A = A \overline{A}^T$)

类似地, 对线性算子 $T: R^n \rightarrow R^n$, 令其表示矩阵为 A .

若 T 是自伴算子, 则 A 是实对称矩阵 ($A = A^T$)

若 T 是酉算子, 则 A 是正交矩阵 ($A^T = A^{-1}$)

下面我们给出一个判断算子自伴性的简单而重要的方法.

3.7-3 定理(自伴性) 设 $T: H \rightarrow H$ 是复Hilbert空间 H 到其自身的一有界线性算子. 则 T 为自伴的充分必要条件是对所有 $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle$ 是实数.

证明. 若 T 为自伴算子, 则对所有 $x \in H$.

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$$

因此, $\langle Tx, x \rangle$ 是实数.

反过来, 若对所有 $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle$ 是实数, 则,

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \langle T^*x, x \rangle$$

由引理3.6-3(b)知, $T^* = T$.

自伴算子的乘积在应用中经常出现, 下面给出其自伴性的一个判别准则.

3.7-4定理 (乘积的自伴性) 设 S, T 是Hilbert空间 H

上二有界自伴线性算子, 则它们的乘积 ST 为自伴的充分必要条件是算子可交换:

$$ST = TS.$$

证明. 由 § 3.6 的 (6g) 和假设,

$$(ST)^* = T^*S^* = TS$$

因此, $(ST)^* = ST$ 的充分必要条件是 $ST = TS$.

3.7-5 定理 (自伴算子序列). 设 (T_n) 是 Hilbert 空间 H 上的有界自伴线性算子序列, 如果 $T_n \rightarrow T$, 则极限算子 T 亦为 H 上的自伴算子.

证明. 必须证明 $T^* = T$. 这从 $\|T - T^*\| = 0$ 可得. 事实上, 由定理 3.6-4 的 (6b) 及定理 3.6-2,

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$$

利用 $B(H, H)$ 内的三角不等式

$$\begin{aligned} \|T - T^*\| &\leq \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\| \\ &= \|T - T_n\| + 0 + \|T_n - T\| \\ &= 2\|T_n - T\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

因此, $\|T - T^*\| = 0$

现在我们研究酉算子的一些基本性质.

3.7-6 定理 (酉算子). 设 H 是 Hilbert 空间, $U: H \rightarrow H$, $V: H \rightarrow H$ 是 H 上的二酉算子. 则,

(a) U 是等矩的. 即对所有 $x \in H$, $\|Ux\| = \|x\|$.

(b) $H \neq \{\theta\}$ 时, $\|U\| = 1$.

(c) $U^{-1} (= U^*)$ 是酉算子.

(d) UV 是酉算子.

(e) 复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子 T 为酉算子的充分必要条件是 T 为等矩且满射的.

证明. (a) 因为 $U^* = U^{-1}$ 蕴涵

$$\begin{aligned}\|Ux\|^2 &= \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle \\ &= \langle x, x \rangle = \|x\|^2.\end{aligned}$$

所以, $\|Ux\| = \|x\|$.

(b) 由(a)立即得出 $\|U\| = 1$.

(c) 因为 U 是双射, 所以 U^{-1} 亦为双射且由定理 3.6-4.

$$(U^{-1})^* = U^{**} = U = (U^{-1})^{-1}.$$

即 U^{-1} 是酉算子.

(d) UV 为双射, 由定理 3.6-4 及定理 2.6-11,

$$(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$$

(e) 假设 T 为等距与满映. 等距蕴涵单射, 所以 T 为双射, 我们证明 $T^* = T^{-1}$. 由 T 的等距性,

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \langle Ix, x \rangle$$

因此,

$$\langle (T^*T - I)x, x \rangle = 0.$$

利用引理 3.6-3(b), $T^*T - I = 0$. 从而, $T^*T = I$,

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT^{-1} = I.$$

合起来, $T^*T = TT^* = I$, 因此 $T^* = T^{-1}$. 这就证明了 T 为酉算子.

逆命题成立是显然的, 因为由(a)得出 T 是等距的, 并且由定义 T 为满射.

注意等距算子不一定是酉算子, 因为它可能不是满射.

例如, 由 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$ 给出的右移算子 $T: l^2 \rightarrow l^2$. 显然 T 是等距的但 T 不是满射, 因此 T 不是酉算子.

习 题 3.7

1. 若 S 与 T 是Hilbert空间 H 上有界自伴线性算子, 且 α 与 β 是实数. 证明 $\tilde{T} = \alpha S + \beta T$ 是自伴算子.

2. 证明若 $T: H \rightarrow H$ 是有界自伴性线算子, 则 T^n 亦是. 其中 n 是正整数.

3. 对Hilbert空间 H 上任一有界线性算子 T , 证明算子

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{与} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

是自伴的. 且证明

$T = T_1 + iT_2$ 与 $T^* = T_1 - iT_2$ 成立, 再证其唯一性. 即, $T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$ 蕴涵 $S_1 = T_1$ 与 $S_2 = T_2$. 这里 S_1 与 S_2 由假设为自伴算子.

4. 设算子 $T: C^2 \rightarrow C^2$ 是由 $Tx = (\xi_1 + i\xi_2, \xi_1 - i\xi_2)$ 定义的, 其中 $x = (\xi_1, \xi_2)$. 试求 T^* 并证明

$T^*T = TT^* = 2I$. 并求习题4中定义的 T_1 与 T_2 .

5. 若 $T: H \rightarrow H$ 是有界自伴线性算子且 $T \neq 0$. 证明(a)对 $n = 2, 4, 8, 16, \dots$, $T^n \neq 0$ 成立.

(b)对每一个 $n \in N$, $T^n \neq 0$ 亦成立.

6. 证明酉矩阵的列向量关于 C^n 上的内积构成一标准直交集.

7. 证明等距线性算子 $T: H \rightarrow H$ 满足 $T^*T = I$. 这里 I 是 H 上的恒等算子.

8. 证明等距线性算子 $T: H \rightarrow H$ 若不为酉算子则将Hilbert空间 H 映射到 H 中一适当的闭子空间.

9. 设 X 为一内积空间, $T: X \rightarrow X$ 为等距线性算子, 若 X 的维数 $< \infty$, 证明 T 为酉算子.

10. (酉等价), 设 S 与 T 为Hilbert空间 H 上的线性算子. 若在 H 上存在酉算子 U , 使得,

$$S = U T U^{-1} = U T U^*$$

则称算子 S 与 T 为酉等价. 若 T 为自伴的, 证明 S 亦是自伴的.

11. 证明 T 为正规的充分必要条件是习题4中的 T_1 与 T_2 可交换.

12. 若 $T_n: H \rightarrow H$ ($n = 1, 2, \dots$) 为正规线性算子, 且 $T_n \rightarrow T$. 证明 T 是正规算子.

13. 若 S 与 T 为正规线性算子, 且满足 $ST^* = T^*S$ 和 $TS^* = S^*T$. 证明其和 $S + T$ 与其积 ST 均为正规算子.

14. 证明在复希耳伯特空间 H 上的有界线性算子 $T: H \rightarrow H$ 为正规的充分必要条件是: 对所有的 $x \in H$, $\|T^*x\| = \|Tx\|$. 利用这个结论证明: 对正规线性算子 T , 有

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

第四章 赋范和Banach空间 的基本定理

本章内容包括赋范和Banach空间中四个重要定理。它们是Hahn-Banach定理、一致有界性定理、开映象定理以及闭图象定理。且均为Banach空间理论的基础（第一个定理对于任何赋范空间都成立。）

重要概念、主要内容的概述

1. Hahn-Banach定理4.2-2及4.3-1、4.3-2是向量空间上线性泛函的一个延拓定理。它保证赋范空间有足够多的线性泛函，并使伴随算子与对偶空间的理论得到满意的结果。

2. 由Banach和Steinhaus给出的一致有界性定理4.6-3指出了 $(\|T_n\|)$ 有界的充分条件，这里 T_n 是从巴拿赫空间到赋范空间的有界线性算子。这个定理在分析中有各种应用，例如，关于Fourier级数（参看4.6-5），弱收敛（4.8，4.7节），序列的可和性（§4.9），数值积分（§4.10）等等。

3. 开映象定理4.11-2指出从Banach空间到Banach空间上的有界线性算子 T 是一个开映射，即将开集映射为开集。因此，当 T 是双射时， T^{-1} 是连续的（“有界逆定理”）

4. 闭图象定理4.12-2给出闭线性算子（参看4.12-1）为有界的条件。闭线性算子在物理与其他方面均有重要的应

用.

§4.1 Zorn 引 理

在 Hahn-Banach 定理的证明中需用到 Zorn 引理. Zorn 引理还有各种应用, 在本节后面给出其中的两个. 在证明 Zorn 引理时用到下列半序集的概念.

4.1-1 定义(半序集, 链) 半序集 M 是指在其上定义了一个偏序 \leq 的集合. 即, \leq 是一个二元关系且满足条件.

(P01). 对每个 $a \in M$, 均有 $a \leq a$ (自反性)

(P02). 若 $a \leq b$, 且 $b \leq a$, 则 $a = b$ (反对称性)

(P03). 若 $a \leq b$, $b \leq c$, 则 $a \leq c$ (传递性)

“半”字强调 M 可能有这样两个元素 a 和 b , 对于它们, $a \leq b$ 及 $b \leq a$ 均不成立. 这样的 a 和 b 称做是不可比元素. 若上述元素满足: $a \leq b$ 或 $b \leq a$ (或两者都满足), 则称 a 和 b 是可比元素. 任何两个元素均可比的半序集称为全序集或链. 换句话说, 一个链是没有不可比元素的半序集.

半序集 M 的子集 W 的上界是指一元素 $u \in M$, 使得对于每个 $x \in W$, 均有

$$x \leq u.$$

(u 依赖于 M 及 W , 这样的 u 可能存在, 也可能不存在), M 的极大元是指一元素 $m \in M$, 使得任意 $x \in M$,

$$m \leq x \quad \text{蕴涵} \quad m = x$$

(同样地, M 可能有也可能没有极大元. 另外要注意, 极大元不一定是上界).

4.1-2 实数. 设 M 为所有实数的集合. 且, 令 $x \leq y$ 表示通常意义下的大小关系, 则 M 是全序集. M 无极大元.

大元.

4.1-3 幂集. 设 $P(X)$ 是已知集 X 的幂集 (X 所有子集的集合), 并设 $A \leq B$ 表示 $A \subset B$. 即 A 是 B 的子集. 则 $P(X)$ 是一个半序集, 且 $P(X)$ 的唯一极大元为 X .

4.1-4 n 元数组. 设 M 是所有 n 个实数有序组: $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, \dots , 的集合, 且令 $x \leq y$ 表示对每个 $i = 1, 2, \dots, n$ 均有 $\xi_i \leq \eta_i$. 这里 $\xi_i \leq \eta_i$ 是通常意义的大小关系. 因而在 M 上定义了一个偏序. M 是半序集.

4.1-5 正整数. 设 $M = N$ 是所有正整数的集合, 令 $m \leq n$ 表示 m 能整除 n . 这就在 N 上定义了一个偏序.

利用定义4.1-1中的概念, 我们现在可以阐明Zorn引理. 此引理可当成公理①.

4.1-6 Zorn引理. 设 $M \neq \emptyset$ 是一半序集. 假定每个链 $C \subset M$ 均有上界. 则 M 至少有一个极大元.

应用:

4.1-7 Hamel基. 每个向量空间 $X \neq \{0\}$ 都有一个Hamel基.

证明. 设 M 是所有 X 中线性无关子集的集合. 由于 $X \neq \{0\}$. 于是存在 $x \in X$, $x \neq 0$. 且, $\{x\} \in M$. 所以 $M \neq \emptyset$. 利用包含关系定义 M 上一个偏序. (参看4.1-3), 每个链 $C \subset M$ 都有一个上界, 此上界即为 X 中 C 的所有子集的并. 由Zorn引理, M 有一极大元 B , 现在我们证明 B 是 X 的一个Hamel基. 设 $Y = \text{span } B$, 则 Y 是 X 的一子空间. 且 $Y = X$. 因为否

① Zorn引理可从选择公理(对于任意给定集 E , 存在一个从幂集 $P(E)$ 到 E 的映射 C (选择函数), 使得若 $B \subset E$, $B \neq \emptyset$, 则 $C(B) \in B$)推出. 反之, 这个选择公理也可从Zorn引理得到.

则存在 $z \in X, z \notin Y$, 那么, $B \cup \{z\}$ 是一个包含 B 的线性无关集, B 成其为真子集. 这与 B 是 M 的极大元矛盾.

4.1-8 完全标准直交集. 在每个 Hilbert 空间 $H \neq \{0\}$ 中均存在一个完全标准直交集 (参看 § 3.4)

证明. 设 M 是 H 的所有标准直交子集的集合, 由于 $H \neq \{0\}$, 必存在元素 $x \neq 0$, 且有标准直交子集 $\{y\}$, 这里 $y = \|x\|^{-1}x$. 因此, $M \neq \emptyset$. 集的包含关系定义 M 上一个偏序, 每个链 $C \subset M$ 都有一个上界, 即为 X 中集 C 的所有子集的并. 由 Zorn 引理, M 有一个极大元 F . 我们证明 F 在 H 中是完全的. 假若这不成立, 则由定理 3.4-5, 存在非零元 $z \in H$, 使得 $z \perp F$. 因此, $F_1 = F \cup \{e\}$ 是标准直交集, 这里 $e = \|z\|^{-1}z$. 且 F 是 F_1 的真子集, 这与 F 是极大元矛盾.

习 题 4.1

1. 验证例题 4.1-3 中的论述.
2. 设 X 是区间 $[0, 1]$ 上所有实值函数 x 的集合. 且令 $x \leq y$ 表示对于每个 $t \in [0, 1]$, 均有 $x(t) \leq y(t)$. 证明这定义了一个偏序. X 是全序集吗? X 有极大元吗?
3. 证明: 所有复数 $z = x + iy, w = u + iv, \dots$, 的集合, 若定义 $z \leq v$ 为 $x \leq u$ 且 $y \leq v$, 其中对于实数, \leq 表示通常意义的大小关系. 则此集合为半序集.
4. 关于例题 4.1-5 中的偏序, 求出 M 的所有极大元. 这里 M 为 (a). $\{2, 3, 4, 8\}$; (b) 所有素数的集合.
5. 证明有限半序集 A 至少有一个极大元.
6. (最小元、最大元) 证明一个半序集 M 至多有一个元素 a , 使得对于所有 $x \in M$ 均有 $a \leq x$. 且至多有一个元素 b , 使得对于所有 $x \in M$ 有 $x \leq b$. (若这样的 a 或 b 存在, 则分别称做 M 的最小元或最大元.)

7. (下界) 设 $A \neq \emptyset$ 是半序集 M 的子集. 如果存在一元素 $x \in M$, 使得对于所有 $y \in A$ 均有 $x \leq y$. 则称 x 是 A 的一个下界. 求例题 4.1-5 中子集 $A = \{4, 6\}$ 的上界和下界.

8. 设 $A \neq \emptyset$ 是半序集 M 的一子集. 若 x 是 A 的一个下界, 使得对于 A 的所有下界 l , 有 $l \leq x$. 则称 x 是 A 的最大下界. 记作 $x = g.l.b. A = \inf A$. 类似地, 若 y 是 A 的一个上界. 使得对于 A 的所有上界 u , 均有 $y \leq u$. 则称 y 是 A 的最小上界. 记作.

$y = l.u.b. A = \sup A$. (a) 若 A 有一个 $g.l.b.$, 证明它是唯一的. (b) 例题 4.1-3 中, $g.l.b. \{A, B\}$ 和 $l.u.b. \{A, B\}$ 是什么?

9. (格) 设 M 是一半序集. 若 M 中的任意两个元素 x, y 均有一个 $g.l.b.$ (记作 $x \wedge y$) 和一个 $l.u.b.$ (记作 $x \vee y$). 证明例题 4.1-3 中的半序集是一个格. 这里, $A \wedge B = A \cap B, A \vee B = A \cup B$.

10. 设 M 是一半序集, 如果存在一个元素 $x \in M$, 使得 $y \leq x$ 蕴涵 $y = x$. 则称 x 为 M 的极小元. 求习题 4(a) 中的所有极小元.

§4.2 哈恩-巴拿赫 (Hahn-Banach) 定理

Hahn-Banach 定理是线性泛函的延拓定理, 它保证赋范空间上具有充分多的有界线性泛函及线性泛函的取值范围可事先指定. 并且为对偶空间提供所需的理论. 因此, Hahn-Banach 定理是有界线性算子最重要的定理之一. 定理首先由 H. Hahn (1927) 提出, S. Banach (1929) 给出更为一般的形式 (定理 4.2-1), H. F. Bahnenblust 与 \. Sobczyk (1938) 将其推广到复向量空间上 (定理 4.3-1)

延拓问题就是研究定义在给定集 X 的一子集 Z 上的数学对象 (例如: 映射) 能否扩充到整个集 X 上, 并且保持某些基本性质的问题.

在 Hahn-Banach 定理中, 延拓的对象是一线性泛函 f ,

保持以称做次线性泛函 P 所控制的有界性. 特别 f 为一有界线性泛函时, 延拓后保持范数不变. 下面我们给出次线性泛函定义.

4.2-1 定义(次线性泛函) 设 P 是向量空间 X 上一实值泛函, 并满足下列条件.

(1) 对于任意 $x, y \in X$, 均有

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y). \quad (\text{次可加性})$$

(2) 对于 R 中的所有 $\alpha \geq 0$ 和任意 $x \in X$ 有,

$$P(\alpha x) = \alpha P(x) \quad (\text{正齐性})$$

则称 P 是 X 上的次线性泛函.

(注: 赋范空间上的范数是次线性泛函)

4.2-2 Hahn—Banach定理(线性泛函的延拓) 设 X 是实向量空间, P 是 X 上一个次线性泛函, f 是定义在 X 的子空间 Z 上的一实线性泛函, 并满足.

(3) 对于所有 $x \in Z$, $f(x) \leq P(x)$.

则存在定义在 X 上的线性泛函(实的) \tilde{f} 满足.

(3*) 对于所有 $x \in X$, $\tilde{f}(x) \leq P(x)$

且对于每个 $x \in Z$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

(称 \tilde{f} 为 f 从 Z 到 X 的一线性延拓)

证明. 分三步证明.

(a) 满足 $g(x) \leq P(x) (x \in D(g))$ 的 f 的所有延拓 g 组成的集 E 可成为半序集, 并根据Zorn引理, E 有极大元 \tilde{f} .

(b) \tilde{f} 是定义在整个 X 上的线性泛函.

(c) 证明在(b)中用到的一个辅助关系. 详细证明如

下.

(a) 设 E 是满足条件

$$g(x) \leq p(x) \quad \text{对于所有 } x \in D(g)$$

的 f 的所有线性延拓 g 的集合. 显然, $E \neq \emptyset$. 因为 $f \in E$. 在 E 上我们用下面关系定义一偏序: $g \leq h$ 表示 h 是 g 的一个延拓. 即 $D(h) \supset D(g)$, 并且对于每个 $x \in D(g)$, 有, $h(x) = g(x)$.

对于任意链 $C \subset E$, 我们现在定义 \hat{g} 为,

$$\hat{g}(x) = g(x) \quad x \in D(g). \quad (g \in C)$$

\hat{g} 是线性泛函, 其定义域为

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g).$$

因为 C 是一个链, 所以 $D(\hat{g})$ 是一向量空间.

\hat{g} 有确定意义. 事实上, 对于 $g_1, g_2 \in C$. 和 $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$, 我们有 $g_1(x) = g_2(x)$, 这是因为 C 是一个链, 从而 $g_1 \leq g_2$ 或 $g_2 \leq g_1$. 显然, 对于所有的 $g \in C$, $g \leq \hat{g}$. 因此 \hat{g} 是 C 的一个上界. 由于 C 是任意的. 于是根据 Zorn 引理, E 有一极大元 \tilde{f} . 由 E 的定义, \tilde{f} 是 f 的一个线性延拓. 并满足,

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad x \in D(\tilde{f}) \quad (4)$$

(b) 我们现在证明 $D(\tilde{f}) = X$. 假若不成立, 那么可选 $y_1 \in X - D(\tilde{f})$, 并考虑由 $D(\tilde{f})$ 和 y_1 张成的 X 的子空间 Y_1 . 注意 $y_1 \neq \theta$, 因为 $\theta \in D(\tilde{f})$ 对任意 $x \in Y_1$, 可唯一地表

示成,

$$x = y + \alpha y_1 \quad y \in D(\tilde{f}).$$

事实上, $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$, $\tilde{y} \in D(\tilde{f})$

蕴涵 $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1$. 这里 $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$,

但 $y_1 \notin D(\tilde{f})$ 因此, 得, $y - \tilde{y} = \theta$, $\alpha - \beta = 0$. 唯一性得证.)

在 Y_1 上定义泛函 g_1 为,

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c. \quad (5)$$

这里 c 是任意实常数. 不难看出 g_1 是线性的. 对于 $\alpha = 0$, 我们有 $g_1(y) = \tilde{f}(y)$. 因此, g_1 是 \tilde{f} 的一个真延拓. 即 g_1 是使得 $D(\tilde{f})$ 是 $D(g_1)$ 的真子集的那种延拓. 因此, 如果我们能证明 $g_1 \in E$, 即对于所有 $x \in D(g_1)$. 均有

$$g_1(x) \leq p(x) \quad (6)$$

成立. 那么就会导致与 \tilde{f} 是极大元矛盾. 所以, $D(\tilde{f}) = X$.

(c) 最后我们必须证明, 对于一个适当的 c , (5) 式中的 g_1 应满足 (6) 式.

我们考虑 $D(\tilde{f})$ 中的任意 y 和 z , 由 (4) 和 (1) 得到,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) &= \tilde{f}(y - z) \leq p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \\ &\leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z) \end{aligned}$$

于是有

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y). \quad (7)$$

这里 y_1 是固定的, 因 y 在左边未出现, z 在右边未出现, 所以我们在左边关于 z 取上确界 (记为 m_0), 在右边关于 y 取下确界 (记为 m_1), 不等式仍然成立. 即 $m_0 \leq m_1$. 对于满足 $m_0 \leq c \leq m_1$ 的一个 c , 从 (7) 有

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c. \text{ 对于所有 } z \in D(\tilde{f}) \quad (8a)$$

$$c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y). \text{ 对于所有 } y \in D(\tilde{f}). \quad (8b)$$

分别就 (5) 中的 α 为负和正数的情况证明 (6) 式.

对于 $\alpha < 0$, 我们用 $\alpha^{-1}y$ 代替 (8a) 中的 z , 即

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq c$$

用 $-\alpha > 0$ 乘不等式两边得

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

由此及 (5), 利用 $x = y + \alpha y_1$, 得

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) \\ &= p(\alpha y_1 + y) = p(x) \end{aligned}$$

对于 $\alpha = 0$, $x \in D(\tilde{f})$, 无须证明. 对于 $\alpha > 0$ 用 $\alpha^{-1}y$ 代替 (8b) 中的 y 得到,

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right)$$

用 $\alpha > 0$ 乘不等式两边得

$$ac \leq ap\left(\frac{1}{a}y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y)$$

由此及(5)

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + ac \leq p(x).$$

不用Zorn引理能行吗？这是一个令人感兴趣的问题。特别是这个引理没有给出构造性的方法。如果在(5)中，用 f 代替 \tilde{f} ，则对于每个实数 c ，我们得到 f 到子空间 Z_1 上的一线性延拓 g_1 ，这里 Z_1 是由 $D(f) \cup \{y_1\}$ 张成的子空间。并且能选择 c 使得对于所有 $x \in Z_1$ 有 $g_1(x) \leq p(x)$ 。如果 $X = Z_1$ ，这就证完了。若 $X \neq Z_1$ ，可取一个 $y_2 \in X - Z_1$ ，并将 f 延拓到 Z_1 和 y_2 张成的子空间 Z_2 上。反复延拓下去，就得到一子空间 Z_i 的序列，其每一个都包含前一个。并使 f 从一个子空间线性延拓到下一个子空间。且每个延拓 g_i 满足：对于所有 $x \in Z_i$ ，有 $g_i(x) \leq p(x)$ 。若

$$X = \bigcup_{i=1}^n Z_i,$$

我们经 n 步之后就可证完。若

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i,$$

我们用通常的归纳法可以证明。然而，若 X 没有上述那样的表示。其证明就需要Zorn引理。

对于某些特殊的空间，情况可能变得简单些，其中希耳伯特空间由于有了Riesz表示式就是这种类型，这将在下节中讨论。

习 题 4.2

1. 证明线性泛函的绝对值具有性质(1)和(2).
2. 证明向量空间 X 上的范数是 X 上的一个次线性泛函.
3. 设 $x = (\xi_n) \in l^\infty$, ξ_n 是实数. 证明

$$P(x) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n}$$
在 l^∞ 上定义一个次线性泛函.
4. 证明次线性泛函 P 满足 $P(\theta) = 0$ 和 $P(-x) \geq -P(x)$.
5. (凸集) 如果 P 是向量空间 X 上的一个次线性泛函. 证明
 $M = \{x | P(x) \leq r, r > 0 \text{ 固定}\}$ 是一个凸集 (参看 §3.2)
6. 如果赋范空间 X 上的一个次可加泛函 P 在 θ 点连续且 $P(\theta) = 0$. 证明 P 对于所有 $x \in X$ 是连续的.
7. 如果 P_1 和 P_2 均是向量空间 X 上的次线性泛函, 且 c_1 和 c_2 是正常数. 证明 $P = c_1 P_1 + c_2 P_2$ 是 X 上的一个次线性泛函.
8. 如果定义在赋范空间 X 上的一个次可加泛函在一个球面 $\{x | \|x\| = r\}$ 外是非负的. 证明对于所有 $x \in X$, 它是非负的.
9. 设 P 是实向量空间 X 上的一个次线性泛函, $Z = \{x \in X | x = ax_0, a \in R\}$, $x_0 \in X$ 是一固定元素. 在 Z 上定义泛函 f 为 $f(x) = aP(x_0)$. 证明 f 是 Z 上的线性泛函且满足 $f(x) \leq P(x)$.
10. 如果 P 是实向量空间 X 上的一个次线性泛函. 证明 X 上存在一线性泛函 \tilde{f} , 使得 $-P(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq P(x)$.

§4.3 复向量空间和赋范空间的

Hahn-Banach 定理

定理4.2-2是实向量空间上的线性泛函延拓定理. 由H. Bohnenblust和A. Sobczyk(1938年)将此定理推广到复向量空间上.

4.3-1 Hahn-Banach定理(复空间的). 设 X 是实的或

复的向量空间, Z 是 X 的子空间. 且 p 是 X 上的实值泛函并满足.

$$\text{对所有 } x, y \in X, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad (\text{次可加性}) \quad (1)$$

$$\text{对于每个数 } a, \quad p(ax) = |a| p(x) \quad (\text{绝对齐性}) \quad (2)$$

f 是 Z 上一线性泛函并满足,

$$\text{对所有 } x \in Z, \quad |f(x)| \leq p(x). \quad (3)$$

则 f 有一个从 Z 到 X 的延拓 \tilde{f} 且满足

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x). \quad \text{对所有 } x \in X \quad (3^*)$$

证明 (a) 若 X 是实向量空间. 则 (3) 蕴涵对所有 $x \in Z$, $f(x) \leq p(x)$, 因此, 根据 Hahn-Banach 定理 4.2-2, 存在一个从 Z 到 X 的线性延拓 \tilde{f} , 使得对所有 $x \in X$, 有

$$\tilde{f}(x) \leq p(x). \quad (4)$$

由此及 (2) 得,

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1| p(x) = p(x).$$

即, $\tilde{f}(x) \geq -p(x)$, 此不等式与 (4) 合起来证得 (3*).

(b) 设 X 是复向量空间. 并假设 Z 是复向量子空间. 于是 f 是复值的, 可写成,

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x).$$

其中 f_1 和 f_2 均是实值的. 我们暂时将 X 和 Z 视为实向量空间, 并用 X_r 和 Z_r 分别表示它们. 这仅仅限制用实数作数乘 (代替复数). 由于 f 在 Z 上是线性的, 且 f_1 和 f_2 是实值的. 所以 f_1 和 f_2 在 Z_r 上是线性的. 因为复数的实部不可能超过它的模, 于是 $f_1(x) \leq |f(x)|$, 根据 (3) 得, 对于所有 $x \in Z$, 有

$$f_1(x) \leq p(x).$$

由Hahn-Banach定理4.2-2, 必存在一个从 Z 到 X 的 f_1 的线性延拓 \tilde{f}_1 , 使得对于所有 $x \in X$, 均有

$$\tilde{f}_1(x) \leq p(x). \quad (5)$$

这就解决了 f_1 的问题. 现在我们转向 f_2 . 回到 Z 上, 利用 $f = f_1 + if_2$, 对于每个 $x \in Z$, 有

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix)$$

两边的实部必相等:

$$f_2(x) = -f_1(ix), \quad x \in Z. \quad (6)$$

因此, 对于所有 $x \in Z$, 若令

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix) \quad (7)$$

由(6)我们看到, 在 Z 上有 $\tilde{f}(x) = f(x)$. 这证明了 \tilde{f} 是 f 从 Z 到 X 的一个延拓. 剩下的工作是证明:

(i) \tilde{f} 是复向量空间 X 上的一线性泛函.

(ii) \tilde{f} 在 X 上满足(3*).

由于 \tilde{f}_1 是实向量空间 X 上的线性泛函. 利用(7)式, 对于任意复数 $a + ib$, 其中 a 和 b 是实数, 均有,

$$\begin{aligned} \tilde{f}[(a + ib)x] &= \tilde{f}_1(ax + ibx) - i\tilde{f}_1(iax - bx) \\ &= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) \\ &\quad - i[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)] \\ &= (a + ib)[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)] \\ &= (a + ib)\tilde{f}(x) \end{aligned}$$

\tilde{f} 满足可加性是显然的. 因此 (i) 成立.

我们来证明 (ii). 对于使 $\tilde{f}(x) = 0$ 的任意 x , 因为 (1) 和 (2) 蕴涵 $p(x) \geq 0$. 所以 (ii) 成立. 设 x 使 $\tilde{f}(x) \neq 0$. 于是有.

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)| e^{i\theta}, \text{ 因而, } |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x) e^{-i\theta}$$

由于 $|\tilde{f}(x)|$ 是实的, 故 $\tilde{f}(x) e^{-i\theta}$ 也是实的且等于它的实部. 因此, 根据 (2) 得.

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x)| &= \tilde{f}(e^{-i\theta} x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) \\ &= |e^{-i\theta}| p(x) = p(x) \end{aligned}$$

尽管 Hahn-Banach 定理没有直接说到连续性. 但是这个定理的主要应用是关于有界线性泛函. 因此, 我们要在赋范空间上考虑这个定理. 事实上, 定理 4.3-1 蕴涵下述定理.

4.3-2 Hahn-Banach 定理 (赋范空间). 设 f 是赋范空间 X 的子空间 Z 上的一有界线性泛函, 则 X 上存在一有界线性泛函 \tilde{f} , \tilde{f} 是 f 在 X 上的一个延拓. 并且其范数为

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z. \quad (8)$$

这里, $\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|$, $\|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$

证明 若 $Z = \{\theta\}$, 则 $f = 0$ 且在 X 上的延拓为 $\tilde{f} = 0$. 若 $Z \neq \{\theta\}$, 我们希望利用定理 4.3-1, 因此, 首先必须找到一个适当的 p , 由于对于所有 $x \in Z$, 有

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|$$

我们将此不等式作为 (3) 的形式. 那么, 取

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\| \quad (9)$$

$p(x)$ 定义在 X 上. 而且,

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_Z \|x+y\| \leq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x).$$

即 p 在 X 上满足 (1) 和 (2).

根据定理 4.3-1, X 上存在一线性泛函 \tilde{f} , 是 f 的一个延拓. 且满足.

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\|. \quad x \in X.$$

因此有,

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z$$

又由在延拓的情况下, 其范数不可能减少, 所以, $\|\tilde{f}\|_X \geq \|f\|_Z$. 于是 (8) 式成立且定理得证.

在特殊的情况下, 此定理可能变得很简单, Hilbert 空间就是这类空间. 如果 Z 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 则 f 有定理 3.5-1 中的 Riesz 表示,

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad z \in Z.$$

这里, $\|f\| = \|z\|$. 因为内积是定义在整个 H 上的, 这就立即给出了 f 从 Z 到 X 的一线性延拓 \tilde{f} , 且由定理 3.5-1, \tilde{f} 与 f 有相同的范数, $\|\tilde{f}\| = \|z\| = \|f\|$.

从定理 4.3-2, 我们现在将导出另一个有用的结果, 就是赋范空间的对偶空间是由足够多的有界线性泛函组成的. 这个结果对于伴随算子 (§ 4, 4) 和弱收敛 (§ 4, 7) 理论是重要

的.

4.3-3 定理(有界线性泛函的存在性). 设 X 是赋范空间, $x_0 \neq \theta$ 是 X 的任一元素. 则 X 上存在一有界线性泛函 \tilde{f} , 使得,

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

证明 我们考虑由所有元素 αx_0 所组成的 X 的子空间 Z (这里 α 是数量). 在 Z 上我们定义线性泛函 f 为

$$f(x) = \alpha \|x_0\| \quad x = \alpha x_0 \quad (10)$$

由于,

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|$$

因此 f 有界且 $\|f\| = 1$.

定理4.3-2蕴涵 f 有一个从 Z 到 X 的线性延拓 \tilde{f} , 其范数满足 $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$. 从(10)我们看到 $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$.

4.3-4 推论(范数, 零向量). 对于赋范空间 X 中的每个 x , 我们有

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \quad (11)$$

因此如果 x_0 使对于所有 $f \in X^*$, $f(x_0) = 0$, 则, $x_0 = \theta$.

证明 由定理4.3-3, 并将其中 x_0 写成 x

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

又从 $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$, 得.

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|,$$

习 题 4.3

1. (拟范数) 证明(1)和(2)蕴涵 $P(\theta)=0$ 及 $P(x)\geq 0$ 因此, P 是一个拟范数 (参看§2.3的习题10)

2. 证明(1)和(2)蕴涵 $|P(x)-P(y)|\leq P(x-y)$.

3. 证明由(7)式定义的 \tilde{f} 是复向量空间 X 上的一线性泛函. [提示: 只须证明 $\tilde{f}(ix)=i\tilde{f}(x)$]

4. 设 P 是定义在向量空间 X 上, 并满足(1)和(2), 证明对于任意给定的 $x_0\in X$, X 上存在一线性泛函 \tilde{f} , 使得 $\tilde{f}(x_0)=P(x_0)$, 且对于所有 $x\in X$, $|\tilde{f}(x)|\leq P(x)$.

5. 如果定理4.3-1中的 X 是赋范空间, 并且对于某个 $k>0$, $P(x)\leq k\|x\|$, 证明 $\|\tilde{f}\|\leq k$.

6. 在Euclidean平面 R^2 上定义泛函 f 为

$$f(x)=a_1\xi_1+a_2\xi_2, \quad x=(\xi_1, \xi_2).$$

求 f 到 R^3 的所有线性延拓 \tilde{f} 及其范数 $\|\tilde{f}\|$.

7. 在Hilbert空间的情况下, 给出定理4.3-3另一个证明.

8. 设 X 是赋范空间, X^* 是其对偶空间, 若 $X\neq\{\theta\}$, 证明 X^* 也不可能为 $\{\theta\}$.

9. 证明对于可分的赋范空间 X , 不用Zorn引理可直接证明定理4.3-2 (在定理4.2-2的证明中间接用到了Zorn引理)

10. 直接从定理4.3-3得出定理4.3-4的第二个论述.

11. 如果对于赋范空间 X 上的每个有界线性泛函 f , $f(x)=f(y)$, 证明 $x=y$.

12. 设 X 为Euclidean平面 R^2 , 试求出定理4.3-3中的泛函 \tilde{f} .

13. 证明在定理4.3-3的假设下, X 上存在一有界线性泛函 \hat{f} , 使得 $\|\hat{f}\|=\|x_0\|^{-1}$ 且 $\hat{f}(x_0)=1$.

14. (超平面) 证明对于赋范空间 X 中的任意球面 $S(\theta, r)$, 和任意点 $x_0 \in S(\theta, r)$, 存在一超平面 $H_0 \ni x_0$, 使得球 $\tilde{B}(\theta, r)$ 完全置于由 H_0 所确定的两个半空间之一当中 (参看 §2.8 中习题 8) (请看图 24)

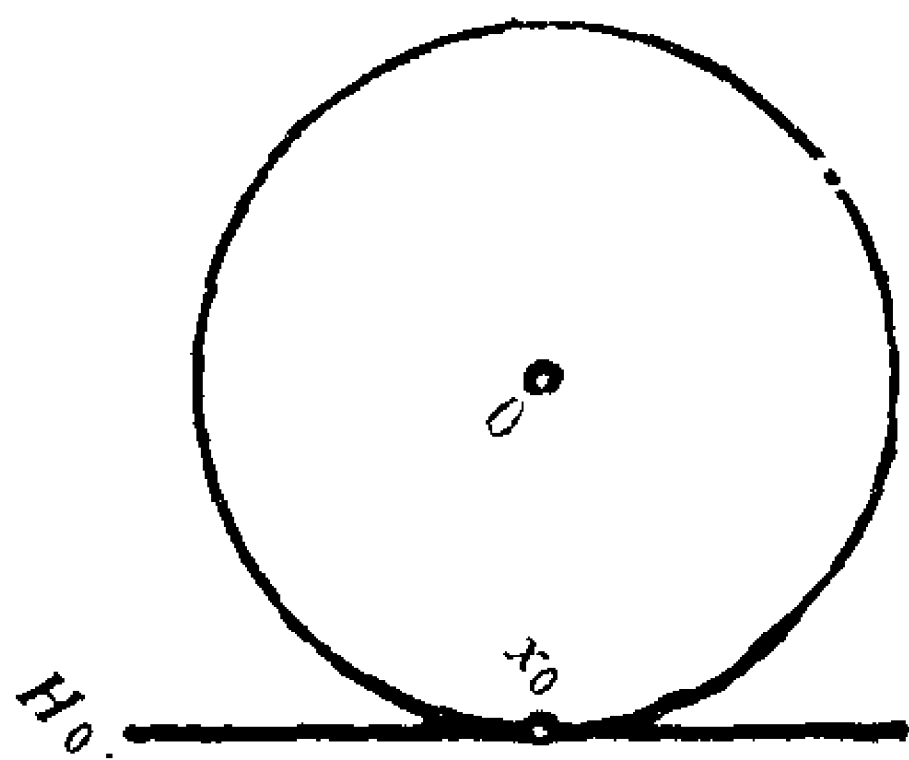


图 24 习题 14 在 Euclidean 平面 R^2 情况下的图示

15. 如果赋范空间 X 中的 x_0 , 使得对于所有范数为 1 的 $f \in X^*$, $|f(x_0)| \leq C$, 证明 $\|x_0\| \leq C$.

§4.4 伴随算子

对于赋范空间 X 上的有界线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 我们可以引进它的伴随算子 T^* . 在本节我们定义伴随算子 T^* 并研究它的某些性质, 以及它与 Hilbert 伴随算子 T^* 之间的关系 (在 Hilbert 空间的情况下, T^* 与 T^* 是不同的). 特别要注意, 我们现在的讨论是借助于定理 4.3-3.

我们考虑有界线性算子 $T: X \rightarrow Y$, 这里 X 和 Y 是赋范空间. 为了定义 T 的伴随算子 T^* , 任取 Y 上有界线性泛函 g . g 对于每个 $y \in Y$ 是有定义的. 设 $y = Tx$, 于是得到 X 上一泛函 f :

$$f(x) = g(Tx) \quad x \in X. \quad (1)$$

由于 g 与 T 是线性的, 所以 f 是线性的. 因为

$$|f(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\| \|Tx\|$$

则 f 是有界的, 且有

$$\|f\| \leq \|g\| \|T\|. \quad (2)$$

这表明 $f \in X^*$, 这里 X^* 是 X 的对偶空间.

根据假设 $g \in Y^*$, 从而, 对于可变的 $g \in Y^*$, 公式 (1) 定义了一个从 Y^* 到 X^* 的算子, 称做 T 的伴随算子, 记作 T^* . 于是, 有,

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{T} Y \\ X^* &\xleftarrow{T^*} Y^* \end{aligned} \quad (3)$$

注意, T^* 是定义在 Y^* 上的算子, 而给定的算子 T 是定义在 X 上的. 下面给出伴随算子的定义.

4.4-1 定义 (伴随算子). 设 X 和 Y 是赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子. 则 T 的伴随算子 $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ 定义成

$$(T^*g)(x) = g(Tx) \quad g \in Y^* \quad (4)$$

这里的 X^* 和 Y^* 分别是 X 和 Y 的对偶空间.

我们首先证明伴随算子具有与算子本身相同的范数. 在证明过程中我们要用到由 Hahn-Banach 定理推得的定理 4.3-3. 由此可见, Hahn-Banach 定理在建立伴随算子理论中起了令人满意的重要作用.

4.4-2 定理 (伴随算子的范数). 定义 4.4-1 中的伴随算子 T^* 是线性有界的. 且,

$$\|T^*\| = \|T\|. \quad (5)$$

证明 由于 T^* 的定义域 Y^* 是向量空间, 且

$$\begin{aligned} (T^*(\alpha g_1 + \beta g_2))(x) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)(Tx) \\ &= \alpha g_1(Tx) + \beta g_2(Tx) \\ &= \alpha (T^*g_1)(x) + \beta (T^*g_2)(x) \end{aligned}$$

因此, T^* 是线性的.

现在我们证明 (5). 由 (4) 和 (2) 得,

$$\|T^*g\| = \|f\| \leq \|g\| \|T\|$$

在范数为 1 的所有 $g \in Y^*$ 上取上确界. 有

$$\|T^*\| \leq \|T\|. \quad (6)$$

另一方面, 定理 4.3-3 蕴涵下面事实, 对于每个非零的 $x_0 \in X$, 存在一个 $g_0 \in Y^*$, 使得

$$\|g_0\| = 1 \quad \text{且} \quad g_0(Tx_0) = \|Tx_0\|$$

由伴随算子 T^* 的定义, 这里 $g_0(Tx_0) = (T^*g_0)(x_0)$. 记 $f_0 = T^*g_0$, 于是,

$$\begin{aligned} \|Tx_0\| &= g_0(Tx_0) = f_0(x_0) \leq \|f_0\| \|x_0\| \\ &= \|T^*g_0\| \|x_0\| \leq \|T^*\| \|g_0\| \|x_0\| \end{aligned}$$

但是, $\|g_0\| = 1$, 所以, 对于每个 $x_0 \in X$, 有.

$$\|Tx_0\| \leq \|T^*\| \|x_0\|$$

从而, 必有 $\|T\| \leq \|T^*\|$, 由此及 (6) 立即证得 (5).

4.4-3 例题 (矩阵). 在 n 维 Euclidean 空间 R^n 中, 线性算子 $T: R^n \rightarrow R^n$ 可用矩阵表示 (参看 2.6-8(ii)), 这里矩阵 $T_E = (\tau_{ij})$ 依赖于 R^n 中基 $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ 的选取. 假定我们已选定基 E , 且 E 中元素的排列顺序保持固定. 将 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ 视为列向量. 于是有,

$$y = T_E x, \quad \text{即, } \eta_i = \sum_{k=1}^n \tau_{ik} \xi_k \quad (7)$$

$j = 1, 2, \dots, n$. 设 $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ 是 E 的对偶基 (参看 § 2.8), F 是 $(R^n)^* = R^n$ (参看 2.8-14) 的一个基. 因此, 对于每个 $g \in (R^n)^*$, 有

$$g = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

由对偶基的定义, $f_i(y) = f_i(\sum \eta_k e_k) = \eta_i$

由(7)得

$$g(y) = g(T_E x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \eta_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \tau_{j,k} \xi_k$$

交换和的次序, 可写成下列形式,

$$g(T_E x) = \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k. \text{ 这里, } \beta_k = \sum_{j=1}^n \tau_{j,k} \alpha_j \quad (8)$$

我们在 X 上定义一泛函 f :

$$f(x) = g(T_E x) = \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k.$$

回忆伴随算子的定义,

$$f = T_E^* g. \text{ 其分量为, } \beta_k = \sum_{j=1}^n \tau_{j,k} \alpha_j$$

因此, 我们有下述结论:

若 T 以矩阵 T_E 表示, 则伴随算子 T^* 以 T_E 的转置表示.

如果 T 是从 C^n 到 C^n 的线性算子, 则上述结论仍然成立.

下列公式(9)至(12)所给出的伴随算子的一些性质, 其在运用伴随算子时是很有用的. 相应的证明留给读者. 令 $S, T \in B(X, Y)$ (参看定理2.7-13), 则有,

$$(S + T)^* = S^* + T^* \quad (9)$$

$$(\alpha T)^* = \alpha T^* \quad (10)$$

设 X, Y, Z 是赋范空间, 且 $T \in B(X, Y), S \in B(Y, Z)$, 则对于乘积 ST 的伴随算子我们有

$$(ST)^* = T^* S^* \quad (\text{见图25}) \quad (11)$$

若 $T \in B(X, Y)$, T^{-1} 存在且 $T^{-1} \in B(Y, X)$, 则 $(T^*)^{-1}$ 亦存在, $(T^*)^{-1} \in B(X^*, Y^*)$ 且有.

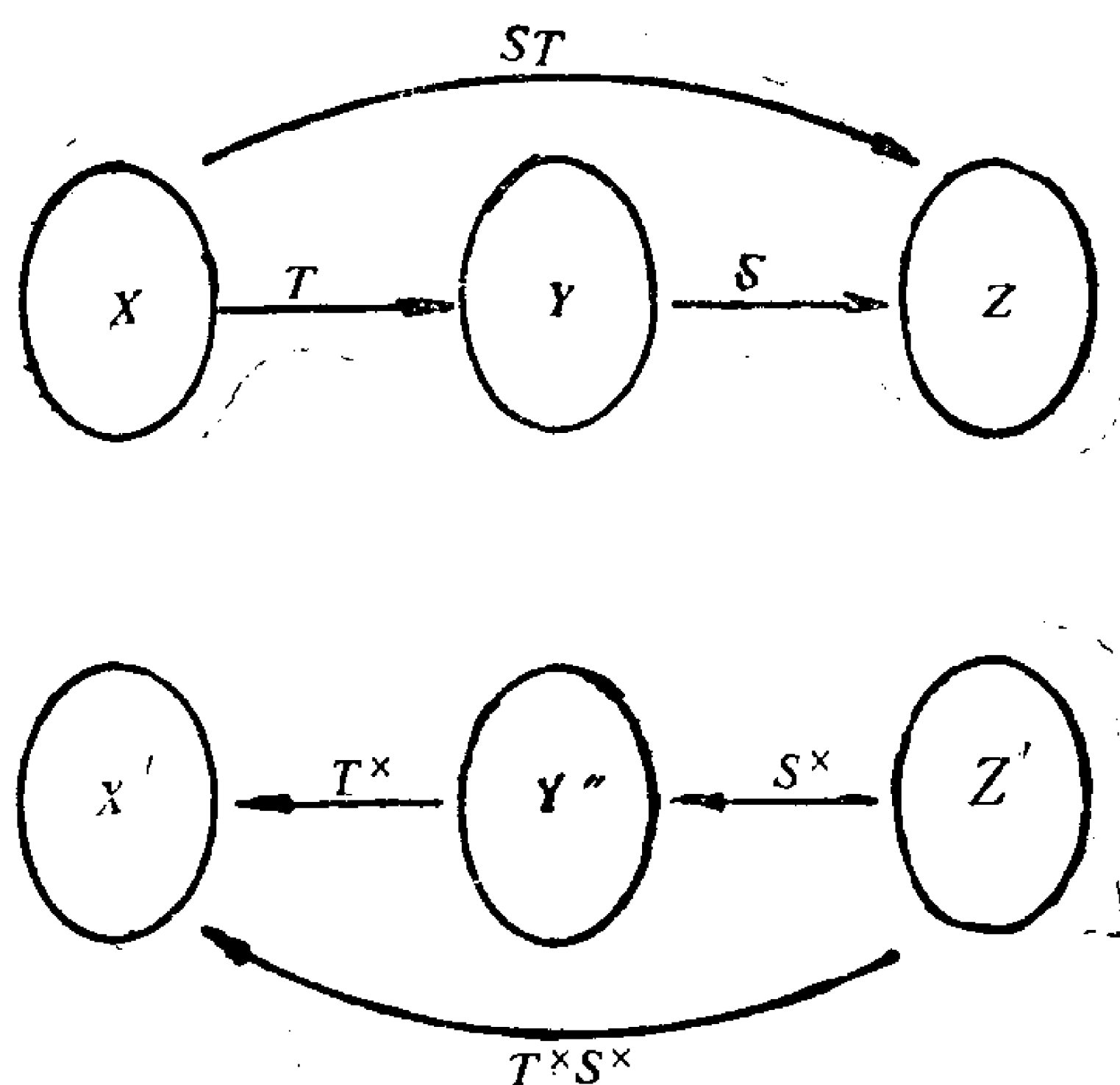


图25 公式(11)的说明

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \quad (12)$$

伴随算子 T^* 与Hilbert伴随算子 T^* 之间的关系. 当 X 和 Y 是Hilbert空间, $X = H_1, Y = H_2$, 且 $T: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子的情况下, 首先有,

$$\begin{aligned} H_1 &\xrightarrow{T} H_2 \\ H_1^* &\xleftarrow{T^*} H_2^* \end{aligned} \quad (13)$$

与前面一样, T 的伴随算子定义成,

$$\begin{aligned} (a) \quad T^*g &= f \\ (b) \quad g(Tx) &= f(x) \end{aligned} \quad (f \in H^*, g \in H_2^*) \quad (14)$$

因 f 和 g 是Hilbert空间上的泛函, 它们有Riesz表示 (参看定理3.5-1) .

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, x_0 \rangle & (x_0 \in H_1) \\ g(y) &= \langle y, y_0 \rangle & (y_0 \in H_2) \end{aligned} \quad (15)$$

由定理3.5-1知, 分别由 f 和 g 确定的 x_0 和 y_0 是唯一的. 这就分别通过

$$A_1 f = x_0$$

$$A_2 g = y_0$$

定义了两个算子,

$$A_1: H_1^* \rightarrow H_1$$

$$A_2: H_2^* \rightarrow H_2$$

从定理3.5-1看到, A_1 和 A_2 是双射且等距的. 这是因为, $\|A_1 f\| = \|x_0\| = \|f\|$. A_2 也有类似情况. 此外, A_1 和 A_2 是共轭线性的. 事实上, 若

$f_1(x) = \langle x, x_1 \rangle$, $f_2(x) = \langle x, x_2 \rangle$, 则对于所有 $x \in H_1$, 和任意数 α, β , 有.

$$\begin{aligned} (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \\ &= \alpha \langle x, x_1 \rangle + \beta \langle x, x_2 \rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha} x_1 + \overline{\beta} x_2 \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

根据 A_1 的定义.

$$A_1(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha} A_1 f_1 + \overline{\beta} A_1 f_2$$

于是 A_1 的共轭线性得证. 同理可证 A_2 亦是共轭线性的.

构造算子 (参看图14)

$$T^* = A_1 T^x A_2^{-1}: H_2 \rightarrow H_1 \quad (17)$$

是由 $T^* y_0 = x_0$ 定义的. 由于 T^* 中包含两个共轭线性算子, T^x 又是线性的, 因此 T^* 是线性的. 而且, 从(14)至(16)立即有,

$$\langle Tx, y_0 \rangle = g(Tx) = f(x) = \langle x, x_0 \rangle = \langle x, T^* y_0 \rangle$$

这就证明了 T^* 的确是 T 的Hilbert伴随算子.

公式(17)给出了Hilbert空间上有界线性算子 T 的Hilbert伴随算子 T^* 用 T 的伴随算子 T^x 的表示.

另外, 从(5)和 A_1, A_2 的等距性立即可得, $\|T^*\| = \|T\|$.

下面我们指出, $T: X \rightarrow Y$ 的伴随算子 T^x 和 $T: H_1 \rightarrow H_2$ 的Hilbert伴随算子 T^* 的主要区别. 其中, X, Y 是赋范空间. 而 H_1, H_2 是Hilbert空间.

T^x 是定义在含有 T 的值域的空间的对偶空间上的, 而 T^* 是直接定义在包含 T 的值域的空间上的.

关于 T^x , 根据(10)有,

$$(aT)^x = aT^x$$

但关于 T^* , 由定理3.6-4有,

$$(aT)^* = \overline{a} T^*.$$

在有穷维的情况下, T^x 用 T 的表示矩阵的转置来表示. 而 T^* 则用那个矩阵的复共轭转置表示.

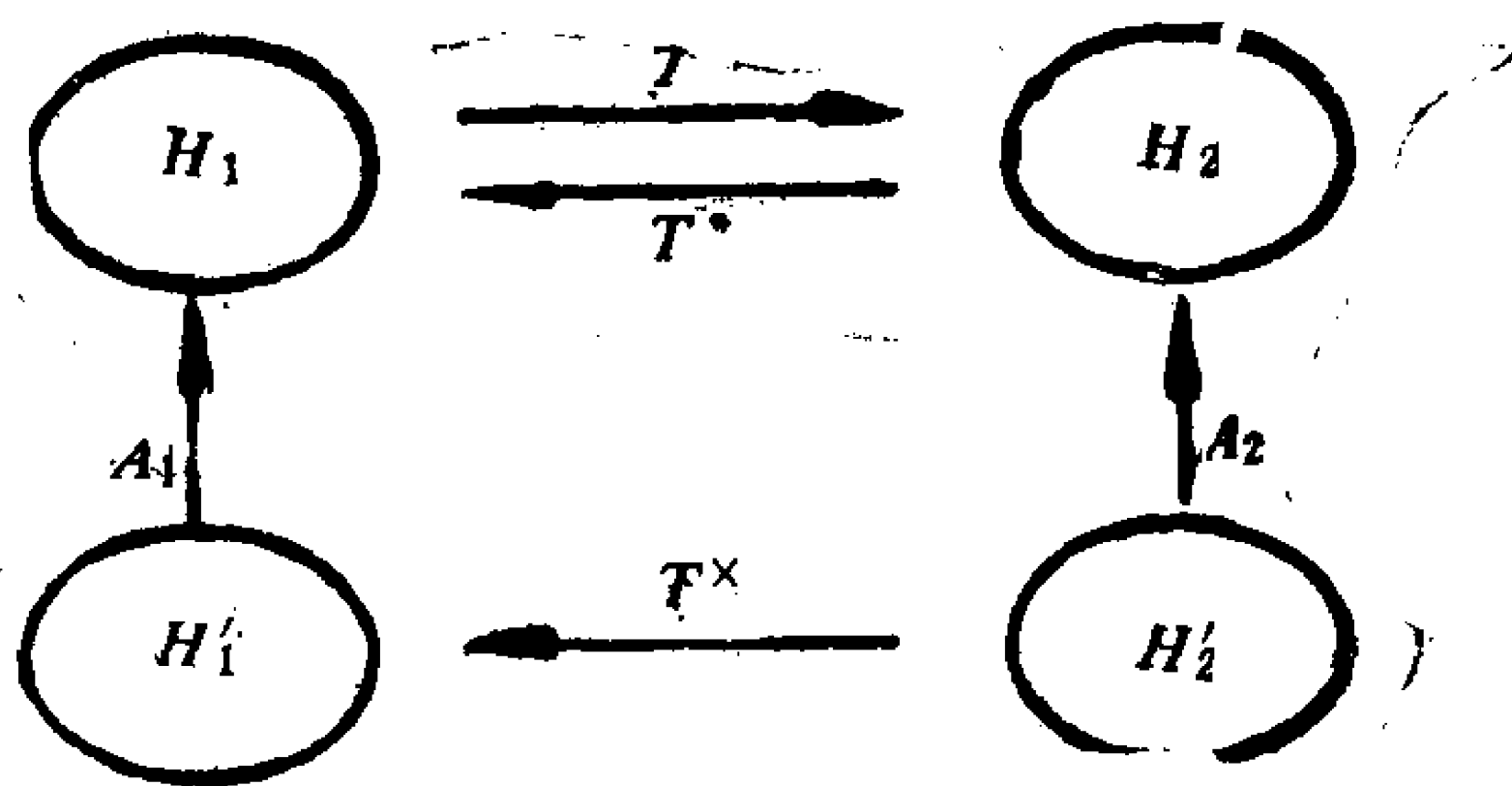


图26 公式(13)和(17)中的算子

习题 4.4

1. 证明通过(1)定义的泛函是线性的.
2. 零算子 O 和恒等算子 I 的伴随算子都是什么?
3. 证明 (9)
4. 证明 (10)
5. 证明 (11)
6. 证明 $(T^n)^* = (T^*)^n$
7. 将(11)和例题4.4-3联系起来, 我们将得到什么样的矩阵公式?
8. 证明(12)
9. (零化子) 设 X, Y 是赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是一有界线性算子, $M = \overline{R(T)}$ 是 T 的值域的闭包. 证明 (参看§2.8习题19)

$$M^\circ = N(T^*)$$
10. (零化子) 设 B 是赋范空间 X 的对偶空间 X^* 的子集. B 的零化子定义成

$${}^\circ B = \{x \in X \mid f(x) = 0, f \in B\}.$$
 证明在习题9中,

$$R(T) \subset {}^\circ N(T^*)$$
 解方程 $Tx = y$ 意味着什么呢?

§4.5 自反空间

向量空间的代数自反性已在§2.8讨论过. 本节转向考虑赋范空间的自反性.

赋范空间 X 的对偶空间 X^* 在定义2.8-12中已给出. X^* 的对偶空间 $(X^*)^*$ 记作 X^{**} , 并称做 X 的第二对偶空间.

取一固定的 $x \in X$. 我们在 X^* 上定义一泛函 J_x 为

$$J_x(f) = f(x) \quad f \in X^* \quad (1)$$

由于 f 有界, 于是 J_x 亦有界. 并有下列引理.

4.5-1 引理(J_x 的范数). 对于赋范空间 X 中的每个 x , 由(1)定义的泛函 J_x 是 X^* 上的一有界线性泛函. 即 $J_x \in X^{**}$. 其范数满足

$$\|J_x\| = \|x\| \quad (2)$$

证明. J_x 的线性性从 § 2.8 可知, 而(2)式由(1)与推论 4.3-4 得

$$\|J_x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|J_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\| \quad (3)$$

对于每个 $x \in X$, 均对应一个由(1)定义的唯一有界线性泛函 $J_x \in X^{**}$, 这就定义了一个映射.

$$J: X \rightarrow X^{**}$$

$$x \mapsto J_x \quad (4)$$

J 称做 X 到 X^{**} 的标准映射. 我们证明 J 是线性的、单射且保范的. 这可用 § 2.3 中赋范空间同构的术语来表达.

4.5-2 引理(标准映射). 由(4)定义的标准映射 J 是赋范空间 X 到赋范空间 $R(J)$ 上的一同构, 这里 $R(J)$ 是 J 的值域.

证明. J 的线性性如 § 2.8 中看到的一样, 这是因为.

$$\begin{aligned} J_{\alpha x + \beta y}(f) &= f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha J_x(f) + \beta J_y(f) \end{aligned}$$

特别是, $J_x - J_y = J_{x-y}$, 因此由(2)得.

$$\|J_x - J_y\| = \|J_{x-y}\| = \|x - y\|$$

这表明 J 是等距的、保范的. 等距蕴涵单射. 所以, J 作为到它的值域 $R(J)$ 上的映射是双射.

对于赋范空间 X 和 Z , 如果 X 与 Z 的子空间是同构的(参看§2.3). 则称 X 嵌入在 Z 中. 引理4.5-2表明 X 是嵌入在 X^{**} 中的. J 也称做 X 到 X^{**} 中的标准嵌入.

一般说来, J 不是满射, 因此值域 $R(J)$ 是 X^{**} 的真子空间. 当 J 是满射时, 即 $R(J) = X^{**}$ 有如下概念.

4.5-3 定义(自反性). 赋范空间 X 若有

$$R(J) = X^{**}$$

则称 X 是自反的. 这里 $J: X \rightarrow X^{**}$ 是由(4)和(1)给出的标准映射.

这个概念是H. Hahn 1927年提出的. 由E. R. Lorch (1939)命名为“自反性”. Hahn在赋范空间内线性方程的研究中, 以及对偶空间理论的早期探索, 均认识到自反性的重要.

若 X 是自反的. 由引理4.5-2, X 与 X^{**} 是同构的. 但其逆一般是不成立的, 这已由R. C. James (1950, 1951)所证明.

另外, 完备性不蕴涵自反性, 但是反过来有下面的定理.

4.5-4 定理(完备性). 如果赋范空间 X 是自反的, 则它是完备的(因此是一Banach空间)

证明 因为 X^{**} 是 X^* 的对偶空间, 由定理2.7-14知 X^{**} 是完备的. 根据假设 X 是自反的, 即 $R(J) = X^{**}$. 利用引理4.5-2以及 X^{**} 的完备性立即证得 X 是完备的.

对于赋范空间 X , 若 $\dim X < \infty$, 则 X 上每个线性泛函都是有界的(参看定理2.7-8), 于是, $X' = X^*$. 由 X 的代数自反性(2.8-11)可得如下定理.

4.5-5 定理 (有穷维数). 每个有穷维赋范空间是自反的.

例如, R^n 是自反的. 在无穷维空间中, $l^p (1 < p < \infty)$, $L^p[a, b] (1 < p < \infty)$ 是自反的. 能够证明, $C[a, b]$, l^1 , $L^1[a, b]$, l^∞ 以及 l^∞ 的子空间 c (所有收敛数列的空间) 和 c_0 (收敛到零的数列构成的空间) 均是非自反空间.

4.5-6 定理 (Hilbert空间) 每个 Hilbert 空间是自反的.

证明 我们要证标准映射 $J: H \rightarrow H^{**}$ 是满射的. 即对于每个 $g \in H^{**}$, 存在一个 $x \in H$, 使得 $g = J_x$. 为此首先作为准备工作, 我们定义 $A: H^* \rightarrow H$ 为 $Af = z$, 这里的 f 和 z 是由 3.5-1 中 Riesz 表示 $f(x) = \langle x, z \rangle$ 给定的. 从定理 3.5-1 知, A 是一个双射、等距的和共轭线性的. 由定理 2.8-13, H^* 是完备的, 并且是一个 Hilbert 空间. 其内积定义为

$$\langle f_1, f_2 \rangle_1 = \langle Af_2, Af_1 \rangle$$

易验证它满足 § 3.1 中的 (Ip1) 至 (Ip4). 特别地, 从 A 的共轭线性立即得到 (Ip2),

$$\begin{aligned} \langle af_1, f_2 \rangle_1 &= \langle Af_2, A(af_1) \rangle = \langle Af_2, \overline{a} Af_1 \rangle \\ &= a \langle f_1, f_2 \rangle_1 \end{aligned}$$

对于任意 $g \in H^{**}$, 令其 Riesz 表示式为,

$$g(f) = \langle f, f_0 \rangle_1 = \langle Af_0, Af \rangle$$

我们记得, $f(x) = \langle x, z \rangle$, 其中 $z = Af$, 记 $Af_0 = x$. 于是有,

$$\langle Af_0, Af \rangle = \langle x, z \rangle = f(x)$$

合起来得, $g(f) = f(x)$, 根据 J 的定义, 即有, $g = J_x$. 因为 $g \in H^{**}$ 是任意的, 从而证得 J 是满射, 因此, H 是自反的.

4.5-7 引理 (一个泛函的存在性). 设 Y 是赋范空间 X 的真闭子空间. 任取 $x_0 \in X - Y$, 令

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \quad (5)$$

表示 x_0 到 Y 的距离. 则存在 $\tilde{f} \in X^*$, 使得, $\|\tilde{f}\| = 1$ (6)
对于所有 $y \in Y$ 有 $\tilde{f}(y) = 0$, $\tilde{f}(x_0) = \delta$.

证明. 这个证明的思路是简单的. 我们考虑由 Y 和 x_0 张成的子空间 $Z \subset X$. 在 Z 上定义一有界线性泛函 f 为,

$$f(z) = f(y + \alpha x_0) = \alpha \delta \quad (7)$$

然后证明 f 满足 (6), 再利用定理 4.3-2 将 f 延拓到 X 上. 详证如下.

每个 $z \in Z = \text{Span}(Y \cup \{x_0\})$ 有唯一的表示式,

$$z = y + \alpha x_0$$

f 为线性是显然的. 因为 Y 是闭的, 于是, $\delta > 0$, $f \neq 0$. 当 $\alpha = 0$ 时, 对于所有 $y \in Y$, $f(y) = 0$. 对于 $\alpha = 1$ 和 $y = 0$ 有, $f(x_0) = \delta$.

我们证明 f 是有界的. $\alpha = 0$ 得 $f(z) = 0$, 令 $\alpha \neq 0$, 利用 (5) 并注意到 $(-\frac{1}{\alpha})y \in Y$, 得,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\alpha| \delta = |\alpha| \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \\ &\leq |\alpha| \left\| -\frac{1}{\alpha} y - x_0 \right\| = \|y + \alpha x_0\| \end{aligned}$$

即, $|f(z)| \leq \|z\|$. 因此 f 有界且 $\|f\| \leq 1$

我们来证 $\|f\| \geq 1$. 根据下确界的定义, Y 必包含一序列

(y_n) , 使得 $\|y_n - x_0\| \rightarrow \delta$. 令, $z_n = y_n - x_0$, 则 $f(z_n) = -\delta$, 且

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} \\ &= \frac{\delta}{\|z_n\|} \rightarrow \frac{\delta}{\delta} = 1\end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因此 $\|f\| \geq 1$, 于是证得 $\|f\| = 1$, 根据关于赋范空间的 Hahn-Banach 定理 4.3-2, 我们可以不增大范数地将 f 延拓到 X 上.

利用这个引理, 我们将得到所需要的定理.

4.5-8 定理 (可分性). 如果一赋范空间 X 的对偶空间 X^* 是可分的, 则 X 自身是可分的.

证明 假设 X^* 是可分的, 则单位球面 $U^* = \{f \mid \|f\| = 1\} \subset X^*$ 也包含一可数稠密子集 $\{f_n\}$, 因为 $f_n \in U^*$, 有

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1$$

根据上确界的定义, 我们可找到范数为 1 的点 $x_n \in X$, 使得

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$$

令 $Y = \overline{\text{Span}(x_n)}$, 因为 Y 有一可数的稠密子集, 即系数的实部和虚部均是有理数的 x_n 的所有线性组合的集合. 所以 Y 是可分的.

我们证明 $Y = X$. 假定 $Y \neq X$, 由 Y 是闭的, 根据引理 4.5-7, 存在 $\tilde{f} \in X^*$, $\|\tilde{f}\| = 1$, 对于所有 $y \in Y$, $\tilde{f}(y) = 0$. 因为 $x_n \in Y$, 于是 $\tilde{f}(x_n) = 0$, 并且对于所有的 n 有,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\leq |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - \tilde{f}(x_n)| \\ &= |(f_n - \tilde{f})(x_n)| \leq \|f_n - \tilde{f}\| \|x_n\|\end{aligned}$$

这里 $\|x_n\| = 1$, 因此, $\|f_n - \tilde{f}\| \geq \frac{1}{2}$, 但是这与 (f_n) 在 U^* 中

稠密矛盾 (因为 $\|\tilde{f}\| = 1$, 故 $\tilde{f} \in U^*$)

定理4.5-8表明 X^* 的可分性蕴涵 X 的可分性 (其逆一般不正确). 若赋范空间 X 是自反的, 由引理4.5-2, X^{**} 与 X 是同构的, 从定理4.5-8知, X^* 亦是可分的. 由此可得如下结论,

一个可分的赋范空间 X , 若其对偶空间 X^* 不可分, 则 X 不可能是自反的.

例如, l^1 不是自反空间.

证明 由定义1.3-7的例3知 l^1 是可分的. 但是, $(l^1)^* = l^\infty$ 是不可分的 (请看2.8-15和1.3-7中的例4) 从而证得 l^1 不是自反的.

习 题 4.5

1. 如果 $X = R^n$, 那么(1)式中的泛函 f 和 J_x 是什么?
2. 对于 X 是 Hilbert 空间的情况, 给出引理4.5-7一个简单的证明.
3. 若赋范空间 X 是自反的, 证明 X^* 是自反的.
4. 证明 Banach 空间是自反的充要条件为它的对偶空间 X^* 是自反的. (提示: 可以证明自反的 Banach 空间的闭子空间是自反的. 可不

加证明的利用这一结果)。

5. 证明, 在引理4.5-7的假设下, X 上存在一有界线性泛函 h , 使得,

$$\|h\| = \frac{1}{\delta}, \text{ 对于所有 } y \in Y \text{ 有 } h(y) = 0, h(x_0) = 1$$

6. 证明, 赋范空间 X 的不同的闭子空间 Y_1 和 Y_2 有不同的零化子 (参看 §2.8 习题 19)

7. 设 Y 是赋范空间 X 的一闭子空间, 若对于在 Y 上处处为零的每个 $f \in X^*$, 在整个 X 上也处处为零. 试证明 $Y = X$.

8. 设 M 是赋范空间 X 的任意子集. 证明, $x_0 \in X$ 为 $A = \overline{\text{Span } M}$ 的一个元素其充要条件是: 对于使得 $f|_M = 0$ 的每个 $f \in X^*$, $f(x_0) = 0$.

9. (完全集) 证明赋范空间 X 的一子集 M 在 X 中是完全的, 其充要条件是: 在 M 上处处为零的每个 $f \in X^*$, 在 X 上也处处为零,

10. 证明, 若赋范空间 X 有一包含 n 个元素的线性无关子集, 则对偶空间 X^* 也有这样的集.

§4.6 范畴定理、一致有界性定理

由 S. Banach 和 H. Steinhaus (1927年) 给出的一致有界性定理是很重要的. 事实上分析中很多结果依赖于此定理. 一致有界性定理常被认为赋范空间中泛函分析的四基石之一. 其他三个是: Hahn-Banach 定理 (§4.2、§4.3)、开映象定理 (§4.11)、闭图象定理. 在这四个定理中除去 Hahn-Banach 定理都要用到完备性, 它们确实表征了 Banach 空间最重要的特性, 这些在一般的赋范空间是不具备的.

值得注意的是, 这三个定理均从共同出处——Baire 范畴定理推得的. 范畴定理在泛函分析中还有其他各种应

用，从而在很多证明中均得到引用。

关于Baire定理4.6-2所需要的概念在定义4.6-1中给出。每个概念有两个名称，一个是新的，旧的在括号里给出。这完全出于不同的数学用途。

4.6-1 定义（范畴）. 设 M 是度量空间 X 的子集。

(a) 若 M 的闭包 \overline{M} 没有内点（参看§1.3），则称 M 在 X 中是稀疏的（或无处稠密的）

(b) 若 M 是 X 中可数个稀疏集的并，则称 M 是 X 中的瘠集（或第一范畴集）。

(c) 若 M 不是 X 中的瘠集，则称 M 是 X 中的非瘠集（或第二范畴集）。

4.6-2 Baire范畴定理（完备的度量空间）. 如果度量空间 $X \neq \emptyset$ 是完备的，则它在自身中是非瘠的。

因此，若 $X \neq \emptyset$ 是完备的，且

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad (A_k \text{ 是闭集}) \quad (1)$$

则至少有一个 A_k ，包含一个非空的开子集。

证明 证明的思路是简单的。假定完备的度量空间 $X \neq \emptyset$ 在自身中是瘠集。则有，

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \quad (1^*)$$

每个 M_k 在 X 中是稀疏的。我们构造一Cauchy序列 (P_k) ，其极限 P （根据完备性它存在）不在 M_k 里。因此与表达式 (1^*) 矛盾。

由假设， M_1 在 X 中是稀疏的，根据定义， \overline{M}_1 不包含非空开子集。但 X 包含非空开子集（例如， X 自身）。这蕴涵

$\overline{M}_1 \neq X$, 因此 \overline{M}_1 的余集 $\overline{M}_1^c = X - \overline{M}_1$ 是非空的开子集. 于是我们可选 \overline{M}_1^c 中一点 P_1 和以 P_1 为中心的球

$$B_1 = B(P_1, \varepsilon_1) \subset \overline{M}_1^c \quad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$$

根据假设, M_2 在 X 中是稀疏的, \overline{M}_2 不包含一非空开子集, 因此不包含开球 $B(P_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1)$, 这蕴涵 $\overline{M}_2^c \cap B(P_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1)$ 是非空开子集, 于是在这个集中可选一开球

$$B_2 = B(P_2, \varepsilon_2) \subset \overline{M}_2^c \cap B(P_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1) \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$$

由归纳法, 我们可得一球列.

$$B_k = B(P_k, \varepsilon_k) \quad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

使得, $B_k \cap M_k = \emptyset$. 且,

$$B_{k+1} \subset B(P_k, \frac{1}{2}\varepsilon_k) \subset B_k \quad k = 1, 2, \dots,$$

因为, $\varepsilon_k < 2^{-k}$, 则球心的序列 (P_k) 是柯西序列, 且收敛, 即 $P_k \rightarrow P \in X$. (由假设 X 是完备的). 又, 对于每个 m 和 $n > m$, 有,

$$B_n \subset B(P_m, \frac{1}{2}\varepsilon_m), \text{ 因此,}$$

$$d(P_m, P) \leq d(P_m, P_n) + d(P_n, P)$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon_m + d(P_n, P) \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_m \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

故对于每个 m , $P \in B_m$. 因为 $B_m \subset \overline{M_m}$, 所以对于每个 m , $P \notin M_m$, 因而, $P \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = X$, 这与 $P \in X$ 矛盾. 于是定理得证.

要注意Baire定理的逆一般是不正确的. N. Bourbaki (1955年) 在他们书中曾举过一个在自身中是非瘠的非完备的赋范空间的例子.

从Baire定理直接可推得一致有界性定理, 该定理指出, 若 X 是一Banach空间, 且算子序列 $(T_n) \subset B(X, Y)$ 在每一点 $x \in X$ 是有界的, 则这个序列是一致有界的. 即逐点有界蕴涵一致有界性.

4.6-3 一致有界性定理. 设 (T_n) 是从Banach空间 X 到赋范空间 Y 中的有界线性算子 $T_n: X \rightarrow Y$ 的序列. 并且对于每个 $x \in X$, $(\|T_n x\|)$ 是有界的. 即,

$$\|T_n x\| \leq C_x \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

这里 C_x 是一实数. 则范数序列 $(\|T_n\|)$ 是有界的. 即存在一个正数 C , 使得,

$$\|T_n\| \leq C \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

证明 对于每个 $k \in N$. 设 $A_k \subset X$ 是使

$$\|T_n x\| \leq k \quad \text{对于所有 } n \text{ 成立的所有 } x \text{ 的集合. 现}$$

证 A_k 是闭的. 对于任意 $x \in \overline{A_k}$. 在 A_k 中存在一序列 (x_i) 收敛于 x , 对于每个固定的 n , 有 $\|T_n x_i\| \leq k$, 由于 T_n 是连续的, 范数也连续 (参看§2.2之(7)). 因此得 $\|T_n x\| \leq k$. 即 $x \in A_k$. A_k 是闭的.

由(2) 对于每个 $x \in X$, 一定属于某个 A_k . 因此,

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

因为 X 是完备的, Baire定理蕴涵某个 A_{k_0} 必含一开球. 即.

$$B_0 = B(x_0; r) \subset A_{k_0} \quad (4)$$

设 $x \in X$ 是任意的非零元素. 令,

$$z = x_0 + \alpha x, \quad \alpha = \frac{r}{2\|x\|} \quad (5)$$

则, $\|z - x_0\| < r$, 故 $z \in B_0$. 由(4)和 A_{k_0} 的定义, $\|T_n z\| \leq k_0$ ($n = 1, 2, \dots$), 因为 $x_0 \in B_0$, 也有 $\|T_n x_0\| \leq k_0$ ($n = 1, 2, \dots$). 由(5)得.

$$x = \frac{1}{\alpha} (z - x_0)$$

对于所有的 n .

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &= \frac{1}{\alpha} \|T_n (z - x_0)\| \leq \frac{1}{\alpha} (\|T_n z\| + \|T_n x_0\|) \\ &\leq \frac{4}{r} \|x\| k_0 \end{aligned}$$

因此, 对于所有的 n .

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leq \frac{4}{r} k_0$$

应用

4.6-4 多项式空间. 多项式的全体构成的赋范空间 X , 其范数定义为

$$\|x\| = \max_i |\alpha_i| \quad (6)$$

($\alpha_0, \alpha_1, \dots$, 是 x 的系数). 则 X 是非完备的.

证明. 在 X 上构造一个满足 (2) 但不满足 (3) 的有界线性算子序列. 因此, X 不可能是完备的.

我们可将次数为 N_x 的多项式 $x \neq 0$ 表成

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i \quad (\text{当 } j = N_x \text{ 时, } \alpha_j \neq 0; \quad j > N_x \text{ 时, } \alpha_j = 0)$$

(对于 $x = 0$, 一般讨论中次数是不确定的, 但在这里不是实质问题) 通过

$$T_n 0 = f_n(0) = 0, \quad T_n x = f_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{N_x} \quad (7)$$

定义的泛函 f_n 的序列作为 X 上的算子 T_n 序列. 显然, f_n 是线性的. 由 (6) 有 $|\alpha_j| \leq \|x\|$, 从而, $|f_n(x)| \leq n \|x\|$, 即 f_n 是有界的. 此外, 对于每个固定的 $x \in X$, 因为次数为 N_x 的多项式 x 有 $N_x + 1$ 个系数, 所以由 (7) 有,

$$|f_n(x)| \leq (N_x + 1) \max_j |\alpha_j| = C,$$

即序列 $(|f_n(x)|)$ 满足 (2).

现在我们证明 (f_n) 不满足 (3). 我们选

$$x(t) = 1 + t + \cdots + t^n$$

则 $\|x\| = 1$, 且

$$f_n(x) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n = n \|x\|$$

因此, $\|f_n\| \geq \frac{|f_n(x)|}{\|x\|} = n$. 故 $(\|f_n\|)$ 无界.

4.6-5 Fourier级数. 周期为 2π 的周期函数 x 的 Fourier 级数为

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt) \quad (8)$$

这里 x 的傅里叶系数由欧拉公式给出

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos mt dt,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin mt dt \quad (9)$$

级数(8) 甚至在 x 的不连续点也可能收敛 (习题15给出一个简单的例子), 这表明连续性关于收敛性并非必要的. 更令人感到意外的是连续性也不是充分的. 利用一致有界性定理, 我们可以证明下述结论.

存在实值连续函数, 其Fourier级数在给定点 t_0 发散.

证明. 设 X 是周期为 2π 的实值连续函数的全体构成的赋范空间, 其范数定义为

$$\|x\| = \max |x(t)| \quad (10)$$

由1.5-5知 X 是Banach空间; 令 $f_n(x)$ 是 x 的Fourier级数前 n 项的部分和在 $t=0$ 处的值.

即,

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mt \right] dt.$$

为求出积分号下和所确定的函数, 我们计算,

$$\begin{aligned} & 2 \sin - \frac{1}{2} t \sum_{m=1}^n \cos mt \\ &= \sum_{m=1}^n 2 \sin \frac{1}{2} t \cos mt \\ &= \sum_{m=1}^n \left[-\sin \left(m - \frac{1}{2} \right) t + \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \right] \end{aligned}$$

$$= -\sin \frac{1}{2}t + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t$$

由此得,

$$1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos mt = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t}$$

于是 $f_n(x)$ 可写成如下形式.

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt \quad (11)$$

$$q_n(t) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t}$$

我们证明线性泛函 f_n 是有界的. 事实上, 由 (10) 和 (11) 有,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \max |x(t)| \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \\ &= \frac{\|x\|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt. \end{aligned}$$

在范数为 1 的所有 x 上取上确界, 得,

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

实际上, 等号成立. 我们将证明这点, 为此, 将 $|q_n(t)|$ 表成如下形式

$$|q_n(t)| = y(t)q_n(t)$$

这里,
$$y(t) = \begin{cases} 1 & q_n(t) \geq 0 \\ -1 & q_n(t) < 0 \end{cases}$$

$y(t)$ 是不连续的. 但是, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 可变更范数为 1 的连续函数 $x(t)$, 使得对于这个 x , 有,

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)] q_n(t) dt \right| < \varepsilon$$

将此式写成两个积分并利用(11)得,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt - \int_0^{2\pi} y(t) q_n(t) dt \right| \\ &= \left| f_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 且 $\|x\| = 1$. 于是证得.

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt. \quad (12)$$

最后, 证明序列 $(\|f_n\|)$ 是无界的. 将(11)中的 q_n 代入(12),

对于 $t \in (0, 2\pi]$, $\left| \sin \frac{1}{2}t \right| < \frac{1}{2}t$.

令 $\left(n + \frac{1}{2}\right)t = v$, 得,

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right|}{t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \\
&\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin v| dv \\
&= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})
\end{aligned}$$

这是因为调和级数发散. 因此, $(\|f_n\|)$ 是无界的. 故(3)不成立. 由于 X 是完备的, 这蕴涵(2)不是对所有 x 都成立, 即必有一个 $x \in X$, 使得 $(|f_n(x)|)$ 无界. 但由 f_n 的定义, 这意味着 x 的 Fourier 级数在 $t=0$ 处发散.

习 题 4.6

1. 所有有理数的集合

(a) 在 R 中

(b) 在自身中

都属于什么范畴 (采用通常的度量)

2. 所有整数的集合.

(a) 在 R 中

(b) 在自身中 (取 R 中的度量)

都属于哪个范畴?

3. 求出离散度量空间 X 中的所有稀疏集 (参看 1.1-2 中的例 5)
4. 求 R^2 中一个瘠稠密子集.
5. 证明度量空间 X 的一子集 M 在 X 中是稀疏的当且仅当 $(\overline{M})^c$ 在 X 中是稠密的.
6. 证明完备度量空间 X 的瘠子集 M 的余集 M^c 是非瘠的.
7. (共鸣) 设 X 是 $Banach$ 空间, Y 是一赋范空间,
 $T_n \in B(X, Y), n=1, 2, \dots$, 且 $\sup_n \|T_n\| = +\infty$ 证明存在
 $x_0 \in X$, 使得 $\sup_n \|T_n x_0\| = +\infty$ (点 x_0 通常称为共鸣点)
8. 证明在定理 4.6-3 中, X 的完备性是必不可少的. (考虑子空间 $X \subset l^\infty$, X 是由对于 $j \geq J \in N, \xi_j = 0$ 的 $x = (\xi_j)$ 组成的, 这里 J 依赖于 x . 并通过 $T_n x = f_n(x) = n\xi_n$ 定义 T_n)
9. 设 $T_n = S^n$, 其中算子 $S: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为
 $(\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_3, \xi_4, \dots)$ 求出 $\|T_n x\|$ 的一个界, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|, \|T_n\|, \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.
10. (C_0 空间) 设 $y = (\eta_j), \eta_j \in C$, 对于每个 $x = (\xi_j) \in C_0$, 级数 $\sum \xi_j \eta_j$ 均收敛. 这里 $C_0 \subset l^\infty$ 是所有收敛于 0 的复数列的子空间. 证明 $\sum |\eta_j| < \infty$ (利用 4.6-3).
11. 设 X 是一 $Banach$ 空间, Y 是一赋范空间, 且 $T_n \in B(X, Y)$ 对于每个 $x \in X, (T_n x)$ 均是 Y 中的 $Cauchy$ 序列. 证明 $(\|T_n\|)$ 是有界的.
12. 如果习题 11 中的 Y 是完备的. 证明, $T_n x \rightarrow T x$. 这里 $T \in B(X, Y)$.
13. 如果 $Banach$ 空间 X 中的序列 (x_n) , 对于所有 $f \in X^*, (f(x_n))$ 是有界的, 证明 $(\|x_n\|)$ 是有界的.
14. 如果 X 和 Y 是 $Banach$ 空间, $T_n \in B(X, Y), n=1, 2, \dots$, 证明以下命题是等价的.
 $(a) (\|T_n\|)$ 是有界的.

(b) 对于每个 $x \in X$, $(\|T_n x\|)$ 是有界的.

(c) 对于所有 $x \in X$ 和所有 $g \in Y^*$, $(|g(T_n x)|)$ 是有界的.

15. 为了验证一个函数 $x(t)$ 的 Fourier 级数甚至在不连续点也可能收敛. 试求出

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{当 } 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{且 } x(t+2\pi) = x(t)$$

的 Fourier 级数. (请看图 27)

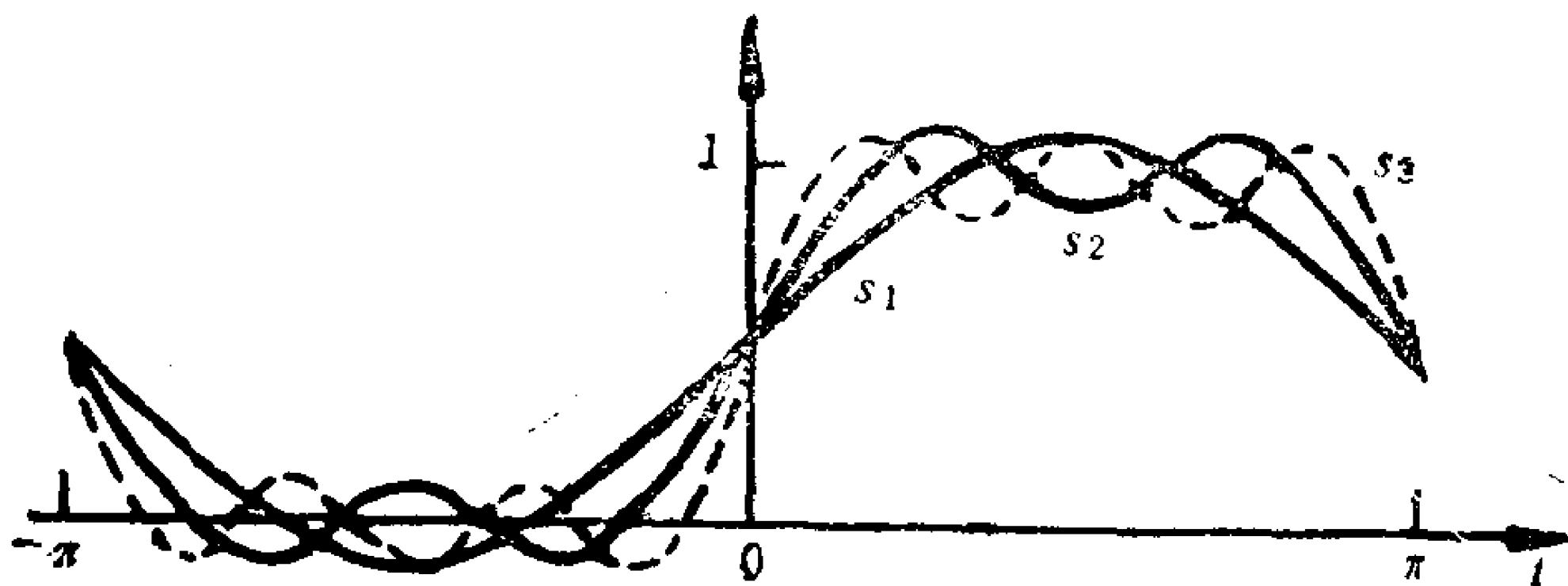


图 27 习题 15 中的 Fourier 级数前三项 S_1 、 S_2 、 S_3

§4.7 强收敛与弱收敛

我们知道在微积分中, 定义了不同类型的收敛性 (通常收敛、条件收敛、绝对收敛以及一致收敛). 这使序列和级数的理论及应用具有较大的灵活性. 在泛函分析中情况与此类似, 甚至内容更丰富. 本节主要讨论“弱收敛”, 这是一个基本概念, 是前节一致有界性定理重要应用之一.

在 § 2.2 定义的赋范空间中元素序列的收敛, 现在称做强收敛. 以区别下面介绍的“弱收敛”.

4.7-1 定义 (强收敛) 赋范空间 X 中的序列 (x_n) , 称为强收敛的 (或依范数收敛). 如果存在一 $x \in X$ 使得,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

记作, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 或 $x_n \rightarrow x$.

x 称做 (x_n) 的强极限, 或称 (x_n) 强收敛于 x .

4.7-2 定义 (弱收敛). 赋范空间 X 中的序列 (x_n) 称为弱收敛的. 如果存在 $x \in X$, 使得对于每个 $f \in X^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

记作, $x_n \xrightarrow{w} x$ 或 $x_n \longrightarrow x$

x 称做 (x_n) 的弱极限. 称 (x_n) 弱收敛于 x .

从定义中知, 弱收敛意味着对于每个 $f \in X^*$, 数列 $a_n = f(x_n)$ 均收敛.

弱收敛在整个分析中有各种应用, 为此我们必须了解其基本性质。

4.7-3 引理 (弱收敛). 设 (x_n) 是赋范空间 X 中一弱收敛序列. 即, $x_n \xrightarrow{w} x$, 则,

- (a) (x_n) 的弱极限 x 是唯一的.
- (b) (x_n) 的每个子序列弱收敛于 x .
- (c) 序列 $(\|x_n\|)$ 是有界的.

证明. (a). 设 $x_n \xrightarrow{w} x$, 同时, $x_n \xrightarrow{w} y$. 则, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, 且 $f(x_n) \longrightarrow f(y)$. 因为 $(f(x_n))$ 是一数列. 其极限是唯一的. 因此 $f(x) = f(y)$. 即对于每个 $f \in X^*$, 有

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0.$$

根据推论 4.3-4, 这蕴涵 $x - y = \theta$. 从而证明了弱极限是唯一的.

(b) 由于 $(f(x_n))$ 是一收敛的数列, 因此, $(f(x_n))$ 的每个子序列收敛且均收敛于 $f(x)$.

(c) 因为 $(f(x_n))$ 是一收敛的数列, 所以它是有界的. 即对于所有的 n , $|f(x_n)| \leq C_f$. 这里 C_f 是依赖于 f 而不依赖于 n 的常数. 利用标准映射 $J: X \rightarrow X^{**}$ (§ 4.5), 通过

$$g_n(f) = f(x_n) \quad f \in X^*$$

定义 $g_n \in X^{**}$. 则对于所有的 n ,

$$|g_n(f)| = |f(x_n)| \leq C_f$$

即对于每个 $f \in X^*$, 序列 $(|g_n(f)|)$ 是有界的. 因为 X^* 是完备的 (根据定理 2.8-13), 利用一致有界性定理 4.6-3, 得 $(\|g_n\|)$ 是有界的. 由 4.5-1, $\|g_n\| = \|x_n\|$. 因此 (c) 得证.

读者也许感到奇怪, 为什么弱收敛性在微积分中不起作用? 理由很简单, 因为在有穷维赋范空间中, 强收敛和弱收敛之间的区别完全消失. 让我们来证明这个事实并说明用“强”和“弱”术语的理由.

4.7-4 定理 (强收敛和弱收敛). 设 (x_n) 是赋范空间 X 中一序列. 则,

(a) 强收敛蕴涵具有同一极限的弱收敛.

(b) (a) 的逆一般不真.

(c) 如果 $\dim X < \infty$, 则弱收敛蕴涵强收敛.

证明. (a) 根据定义, $x_n \rightarrow x$, 意即 $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ 这蕴涵

对于每个 $f \in X^*$,

$$\left| f(x_n) - f(x) \right| = \left| f(x_n - x) \right| \leq \|f\| \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

从而证得 $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) 从 Hilbert 空间中标准直交序列 (e_n) 可证实这一点. 事实上, 每个 $f \in H^*$ 有一个 Riesz 表示 $f(x) = \langle x, z \rangle$.

于是 $f(e_n) = \langle e_n, z \rangle$, 由 Bessel 不等式 (参看 § 3.4 公式 (2)) 有,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle e_n, z \rangle \right|^2 \leq \|z\|^2$$

因此, 左边的级数收敛, 这蕴涵, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$f(e_n) = \langle e_n, z \rangle \rightarrow 0$$

由 $f \in H^*$ 是任意的, 故, $e_n \xrightarrow{w} \theta$. 但是,

$\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n \rangle = 2 \quad (m \neq n)$ 所以 (e_n) 不是强收敛.

(c) 假设 $x_n \xrightarrow{w} x$, 且 $\dim X = k$, 令,

$\{e_1, \dots, e_k\}$ 是 X 的任意一个基, 于是,

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \dots + \alpha_k^{(n)} e_k$$

$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$ 对于每个 $f \in X^*$, 根据假设, $f(x_n) \rightarrow f(x)$, 特别取由

$$f_j(e_i) = 1, \quad f_j(e_m) = 0 \quad (m \neq j)$$

定义的 $\{f_1, \dots, f_k\}$ 是 $\{e_1, \dots, e_k\}$ 的对偶基, 参看 § 2.8), 于是,

$$f_j(x_n) = \alpha_j^{(n)}, \quad f_j(x) = \alpha_j$$

$f_j(x_n) \rightarrow f_j(x)$ 即 $\alpha_j^{(n)} \rightarrow \alpha_j$. 因此,

$$\begin{aligned}\|x_n - x\| &= \left\| \sum_{j=1}^k (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^k |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \|e_j\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时}).\end{aligned}$$

故得 (x_n) 强收敛于 x .

注意, 也存在无穷维空间, 强收敛和弱收敛是等价概念. 例如, l^1 就是这样的空间. 这已由 I. Schur (1921) 证明.

最后, 我们考察两个特别重要空间中的弱收敛性

4.7-5 Hilbert 空间. 在 Hilbert 空间中, $x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当对于空间中的所有 z , $\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$.

证明. 根据定理 3.5-1, 这是显然的.

4.7-6 l^p 空间. 在 l^p 空间中, 这里 $1 < p < \infty$, $x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当.

(A) 序列 $(\|x_n\|)$ 是有界的.

(B) 对于每个固定的 j , 有 $\xi_j^{(n)} \rightarrow \xi_j$ ($n \rightarrow \infty$ 时), 这里, $x_n = (\xi_j^{(n)})$, $x = (\xi_j)$.

证明. l^p 的对偶空间是 l^q . (参看 2.8-16), l^q 的一个 Schauder 基是 (e_n) , $e_n = (\delta_{nj})$, 即 e_n 以第 n 项是 1, 其余各项全是零. $\text{Span}(e_n)$ 在 l^q 中稠密. 所以从下面引理中此结论可立即得证.

4.7-7 引理 (弱收敛). 在赋范空间 X 中, $x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当,

(A) 序列 $(\|x_n\|)$ 是有界的.

(B) 对于一个完全子集 $M \subset X^*$ 的每个元素 f , 有 $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

证明. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$, 则显然 (B) 成立, (A) 从引理 4.7-3 可得证.

反过来, 假定 (A) 和 (B) 成立, 让我们考虑任意 $f \in X^*$, 证明 $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

由 (A) 知, 必存在一个足够大的数 C , 使得对于所有的 n , $\|x_n\| \leq c$, 且, $\|x\| \leq c$. 因为 M 是 X^* 中的完全集, 对于每个 $f \in X^*$, $\text{Span} M$ 中存在一序列 (f_i) , 使得 $f_i \rightarrow f$. 因此, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 我们可找一个 j , 使,

$$\|f_j - f\| < \frac{\varepsilon}{3c}$$

由于 $f_j \in \text{Span} M$, 从 (B) 知, 存在一个 N , 当 $n > N$ 时,

$$|f_j(x_n) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

利用三角不等式及这两个不等式, 对于 $n > N$,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\leq |f(x_n) - f_j(x_n)| + |f_j(x_n) - f_j(x)| \\ &\quad + |f_j(x) - f(x)| \\ &< \|f - f_j\| \|x_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_j - f\| \|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c = \varepsilon. \end{aligned}$$

因为 $f \in X^*$ 是任意的. 从而证明了序列 (x_n) 弱收敛于 x .

习 题 4.7

1. (逐点收敛) 如果 $x_n \in C[a, b]$, 且 $x_n \xrightarrow{w} x \in C[a, b]$, 证明

(x_n) 在 (a, b) 上是逐点收敛的. 即对每个 $t \in (a, b)$, $(x_n(t))$ 收敛.

2. 设 X 和 Y 是赋范空间, $T \in B(X, Y)$, (x_n) 是 X 中一序列. 若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 证明 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$.

3. 如果 (x_n) 和 (y_n) 是一赋范空间 X 中的序列. 证明 $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \xrightarrow{w} y$ 蕴涵 $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y$ 和 $\alpha x_n \xrightarrow{w} \alpha x$. 这里 α 是任意数.

4. 在赋范空间 X 中, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 证明 $x_0 \in \overline{Y}$, 这里 $Y = \text{Span}(x_n)$. (利用引理 4.5-7)

5. 如果 (x_n) 是赋范空间 X 中的弱收敛序列, 即 $x_n \xrightarrow{w} x_0$. 证明存在一个由 (x_n) 的元素的线性组合构成的序列 (y_m) 强收敛于 x_0 .

6. 证明, 一个赋范空间 X 的任意闭子空间 Y , 包含由它的元素组成的所有弱收敛序列的极根.

7. (弱 Cauchy 序列) 在实的或复的赋范空间 X 中的弱 Cauchy 序列, 是指 X 中的序列 (x_n) , 对于每个 $f \in X^*$, 序列 $(f(x_n))$ 是 R 中或 C 中的 Cauchy 序列. (注意, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在) 证明弱 Cauchy 序列是有界的.

8. 设 A 是赋范空间 X 中一子集, 如果 A 的每个非空子集均包含一个弱柯西序列, 证明 A 是有界的.

9. (弱完备性) 如果赋范空间 X 中的每个弱 Cauchy 序列在 X 中是弱收敛的, 则称 X 是弱完备的. 证明若 X 是自反的, 则 X 是弱完备的.

§4.8 算子序列和泛函序列的收敛

前节介绍的赋范空间中元素序列的强收敛和弱收敛概念

是很有用的. 而算子序列 $\{T_n\} \subset B(X, Y)$ 三种类型的收敛性无论在实际或理论上都是有价值的.

4.8-1 定义(算子序列的收敛). 设 X 和 Y 是赋范空间, 算子 $T_n \in B(X, Y)$ 的序列 (T_n) 称做,

- (1) 一致收敛. 如果 (T_n) 在 $B(X, Y)$ 上依范数收敛
- (2) 强收敛, 如果对于每个 $x \in X$, $(T_n x)$ 在 Y 中强收敛.
- (3) 弱收敛. 如果对于每个 $x \in X$, $(T_n x)$ 在 Y 中弱收敛.

将上述表为公式形式, 即: 存在一个算子 $T: X \rightarrow Y$, 使得,

- (1) $\|T_n - T\| \rightarrow 0$
- (2) 对于所有 $x \in X$, $\|T_n x - T x\| \rightarrow 0$.
- (3) 对于所有 $x \in X$ 和所有 $f \in Y^*$,
 $|f(T_n x) - f(T x)| \rightarrow 0$.

T 分别称为 (T_n) 的一致(算子)收敛极限、强(算子)收敛极限、弱(算子)收敛极限.

不难证明.

$$(1) \implies (2) \implies (3).$$

(极限是相同的). 但其逆命题一般不真. 这可从下面例题中看出.

4.8-2 (l^2 空间) 在 l^2 空间中, 考虑序列 (T_n) , 这里 $T_n: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为

$$T_n x = (0, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n \text{ 个零}}$

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$. 算子 T_n 是线性有界的. 显然, $T_n x \rightarrow 0 = 0x$, 即 T_n 强收敛于 0, 但 $\|T_n - 0\| = \|T_n\| = 1$, 所以, (T_n) 不是一致收敛的.

4.8-3 (l^2 空间) 在 l^2 空间上, 考虑由

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ 个零}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

n 个零

定义的算子 $T_n: l^2 \rightarrow l^2$ 的序列 (T_n) . 这里,

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$. 算子 T_n 是线性有界的. 我们来证 (T_n) 是弱收敛于 0, 但不是强收敛.

l^2 上每个有界线性泛函 f 有一个 3.5-1 中的 Riesz 表示. 即由 3.1-5 有,

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\zeta}_j$$

这里, $z = (\zeta_j) \in l^2$. 利用 T_n 的定义得,

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\zeta}_{n+k}$$

根据 1.2-2 中的 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} |f(T_n x)|^2 &= |\langle T_n x, z \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} |\zeta_m|^2 \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 右边趋于 0. 于是 $f(T_n x) \rightarrow 0 = f(0x)$, 因此, (T_n) 是弱收敛于 0.

但对于 $x = (1, 0, 0, \dots)$, 有,

$$\|T_m x - T_n x\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (m \neq n)$$

即 (T_n) 不是强收敛的.

线性泛函是线性算子, 因此 (1)、(2) 和 (3) 对线性有界泛

函也适用.但是现在的(2)和(3)是等价的.其理由是, $T_n x \in Y$ 变成 $f_n(x) \in R$ (或 C), (2)和(3)的收敛均出现在有穷维(一维)空间 R (或 C) 中, 由定理4.7-4(c)得证(2)和(3)等价, 余下的两个概念分别称做强收敛和弱*收敛(读作“弱星收敛”)

4.8-4 定义(泛函序列的强收敛和弱*收敛) 设 (f_n) 是赋范空间 X 上的有界线性泛函序列. 则,

(a) (f_n) 强收敛, 其为存在一 $f \in X^*$, 使得, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$. 记作

$$f_n \rightarrow f.$$

(b) (f_n) 弱*收敛, 其为存在一 $f \in X^*$, 使得对于所有 $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. 记作

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

(a)与(b)中的 f 分别称作 (f_n) 的强收敛极限和弱*收敛极限.

(f_n) 的弱*收敛比其弱收敛要“弱”. (f_n) 弱收敛意即对于所有 $g \in X^{**}$, $g(f_n) \rightarrow g(f)$. 由§4.5中定义的标准映射可知, 弱收敛蕴涵弱*收敛(参看习题4).

让我们再回到算子 $T_n \in B(X, Y)$ 上来. 考察(1), (2)和(3)中极限算子 $T: X \rightarrow Y$ 的性质.

若 (T_n) 一致收敛于 T , 则 $T \in B(X, Y)$. 如果 (T_n) 强收敛、或弱收敛于 T , T 保持线性. 但是若 X 不完备的, T 可能是无界的.

例如, 设 X 是 l^2 中只含有限多个非零项的序列 $x = (\xi_i)$ 的全体. 取 l^2 上的度量. 则 X 是不完备的. 在 X 上定义有界线性算子 T_n 为:

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \dots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots).$$

序列 (T_n) 强收敛于无界线性算子 T , T 定义为 $Tx = (\eta_j)$, $\eta_j = i\xi_j$.

如果 X 是完备的, 上述例子中所述情况就不会发生. 因为有下列引理.

4.8-5 引理 (强算子收敛) 设 $T_n \in B(X, Y)$, 这里 X 是一 Banach 空间, Y 是一赋范空间, 如果 (T_n) 是强(算子)收敛于极限算子 T , 则 $T \in B(X, Y)$.

证明. 由 T_n 为线性直接可得 T 亦为线性. 下面证 T 是有界的. 对于每个 $x \in X$, $T_n x \rightarrow Tx$, 故对于每个 x , 序列 $(T_n x)$ 是有界的 (参看引理 1.4-2). 由 X 是完备的, 根据一致有界性定理, $(\|T_n\|)$ 是有界的, 即对于所有 n , $\|T_n\| \leq C$. 由此得, $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq C \|x\|$. 这蕴涵 $\|Tx\| \leq C \|x\|$.

判别强(算子)收敛的一个有用准则是

4.8-6 定理 (强算子收敛). 设 X 和 Y 均是 Banach 空间, 算子 $T_n \in B(X, Y)$ 的序列 (T_n) 是强算子收敛的充要条件为:

(A) 序列 $(\|T_n\|)$ 是有界的.

(B) 对于 X 的一完全子集 M 中的每个 x , $(T_n x)$ 是 Y 里的 Cauchy 序列.

证明 若对于每个 $x \in X$, $T_n x \rightarrow Tx$, 则 (A) 由一致有界性定理可得出 (因为 X 是完备的). (B) 显然成立.

反过来, 假定 (A) 与 (B) 成立, 于是对于所有的 n , $\|T_n\| \leq C$. 考虑任意 $x \in X$, 证明 $(T_n x)$ 在 Y 中强收敛. 给定 $\varepsilon > 0$, 因为 $\text{Span} M$ 在 X 中稠密, 故存在一个 $y \in \text{Span} M$, 使得,

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3c}$$

由(B)知, $(T_n y)$ 是Cauchy序列, 因此存在一个 N , 当 $m, n > N$ 时, 有

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

利用这两个不等式及三角不等式, 对于 $m, n > N$ 得,

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| \\ &\quad + \|T_m y - T_m x\| \end{aligned}$$

$$< \|T_n\| \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\| \|x - y\|$$

$$< c \cdot \frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c \cdot \frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.$$

因此, $(T_n x)$ 在 Y 中是Cauchy序列. 因为 Y 是完备的, $(T_n x)$ 在 Y 中收敛. 由于 $x \in X$ 是任意的, 于是 (T_n) 强(算子)收敛性得证.

4.8-7 推论(泛函). Banach空间 X 上的有界线性泛函序列 (f_n) 弱*收敛于 X 上一有界线性泛函当且仅当:

(A) 序列 $(\|f_n\|)$ 是有界的.

(B) 对于 X 的一完全子集 M 中的每个 x , $(f_n(x))$ 是Cauchy数列.

这个推论有重要的应用. 后面我们将讨论其中的两个.

习 题 4.8

1. 证明一致(算子)收敛 $T_n \rightarrow T, T_n \in B(X, Y)$, 蕴涵具有同一

极限 T 的强算子收敛.

2. 如果 $S_n, T_n \in B(X, Y)$, 且 (S_n) 和 (T_n) 分别强算子收敛于 S 和 T . 证明 $(S_n + T_n)$ 强(算子)收敛于极限 $S + T$.

3. 证明 $B(X, Y)$ 中的强(算子)收敛蕴涵具有同一极限的弱(算子)收敛.

4. 证明弱收敛蕴涵弱*收敛. 若 X 是自反的. 其逆亦成立.

5. 强(算子)收敛不蕴涵一致(算子)收敛. 通过下例验证之. 考虑 $T_n = f_n: l^1 \rightarrow R$, 这里, $f_n(x) = \xi_n, x = (\xi_n)$.

6. 设 $T_n \in B(X, Y), n = 1, 2, \dots$, 证明 $T_n \rightarrow T$ 当且仅当, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 总存在一个 N (只依赖于 ε), 使得对于所有 $n > N$ 和所有范数为1的 $x \in X$, 有

$$\|T_n x - T x\| < \varepsilon.$$

7. 设 $T_n \rightarrow T$, 这里 $T_n \in B(X, Y)$, 证明对于每个 $\varepsilon > 0$ 和每个闭球 $K \subset X$, 存在一个 N , 使得对于所有 $n > N$, 和所有 $x \in K$, 有,
 $\|T_n x - T x\| < \varepsilon$.

8. 设 X 是一可分的Banach空间, $M \subset X^*$ 是一有界集. 证明 M 的每个序列包含一个弱*收敛于 X^* 的一元素的子序列.

§4.9 序列可和性的应用

弱*收敛在发散序列(与级数)的理论中, 有着重要的应用. 发散序列在通常意义下没有极限. 我们将借助于序列求和的方法给予某些发散序列在广义下的一个“极限”.

例如, 给定一发散序列 $x = (\xi_k)$, 我们可得出 一算术平均值序列 $y = (\eta_n)$,

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), \quad \dots, \quad \eta_n =$$

$$\eta_n = \frac{1}{n} (\xi_1 + \cdots + \xi_n)$$

这是一个求和方法的例子. 如果 y 收敛并有极限 η (通常意义下), 我们就称 x 按上述方法是可和的, 并有广义极限 η .

一个求和方法若能表示成

$$y = Ax,$$

这里 $x = (\xi_k)$ 、 $y = (\eta_n)$ 是无穷列向量, $A = (\alpha_{nk})$ 是一无穷矩阵. $(n, k = 1, 2, \cdots)$, 则称该求和方法为矩阵法. 在公式 $y = Ax$ 中, 利用矩阵乘法可得,

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \quad n = 1, 2, \cdots. \quad (1)$$

由(1)给出的求和方法简称为 A -方法. 因为对应的矩阵是 A . 如果(1)中的级数都收敛, 并且 $y = (\eta_n)$ 在通常意义下收敛. 其极限称做 x 的 A -极限. x 称为 A -可和的. 所有 A -可和序列组成的集合称做 A -方法域.

如果 A -方法域包含所有收敛序列, 而且每个这样序列的 A -极限等于通常极限. 即

$$\xi_k \rightarrow \xi \quad \text{蕴涵} \quad \eta_n \rightarrow \xi.$$

则称这个 A -方法是正则的(或永久的)

4.9-1 Toeplitz极限定理(正则可和方法). 具有矩阵 $A = (\alpha_{nk})$ 的 A -可和方法是正则的当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk} = 0 \quad \text{对于} k = 1, 2, \cdots. \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq r \quad \text{对于} n = 1, 2, \cdots. \quad (4)$$

这里 r 是不依赖于 n 的常数.

证明 我们分两步来证.

(a) (2)至(4)是正则性的必要条件;

(b) (2)至(4)是正则性的充分条件.

详细证明如下:

(a) 假定 A -方法是正则的. 设 x_k 是第 k 项为1而其余各项均为0的序列. 对于 x_k , (1)中的 $\eta_k = \alpha_{nk}$. 因为 x_k 收敛于0. 这就证明了(2)必成立.

另外, $x = (1, 1, 1, \dots)$ 有极限1, 由(1)看出这时 η_n 等于(3)中的级数. 因此, (3)必成立.

我们来证(4)是正则性的必要条件. 设 C 是由所有收敛序列构成的Banach空间. 其范数定义为,

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|$$

(参看1.5-3)

在 C 上定义线性泛函 f_{nm} 为,

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{nk} \xi_k \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

由于,

$$|f_{nm}(x)| \leq \sup_j |\xi_j| \sum_{k=1}^m |\alpha_{nk}| = \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_{nk}| \right) \|x\|$$

因此, 每个 f_{nm} 都是有界的.

正则性蕴涵着对于所有 $x \in C$ (1)中的级数收敛. 因而(1)在 C 上定义线性泛函 f_1, f_2, \dots 为

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

从(5)看到, 对于所有 $x \in C$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $f_{nm}(x) \rightarrow f_n(x)$. 这是弱*收敛. 由引理4.8-5 ($T = f_*$) 知, f_* 是有界的. 而且对于所有 $x \in C$, $(f_n(x))$ 收敛. 根据推论4.8-7, $(\|f_n\|)$ 是有界的. 即有

$$\|f_n\| \leq r \quad \text{对于所有 } n. \quad (7)$$

对于任意固定的 $m \in N$, 定义

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} |a_{nk}| / a_{nk} & \text{若 } k \leq m \text{ 且 } a_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{若 } k > m \text{ 或 } a_{nk} = 0 \end{cases}$$

则有 $x_{nm} = (\xi_k^{(n,m)}) \in C$. 而且, 若 $x_{nm} \neq \theta$, 有 $\|x_{nm}\| = 1$. 若 $x_{nm} = \theta$, 则 $\|x_{nm}\| = 0$. 另外,

$$f_{nm}(x_{nm}) = \sum_{k=1}^m a_{nk} \xi_k^{(n,m)} = \sum_{k=1}^m |a_{nk}|, \quad (\text{对于所有 } m)$$

因此,

$$\begin{aligned} (A) \quad \sum_{k=1}^m |a_{nk}| &= f_{nm}(x_{nm}) \leq \|f_{nm}\| \\ (B) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| &\leq \|f_n\| \end{aligned} \quad (8)$$

这就证明了(4)中的级数收敛, 并且从(7)证得(4).

(b) 我们证明(2)至(4)是正则性的充分条件. 在 C 上定义一线性泛函 f 为,

$$f(x) = \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$$

这里 $x = (\xi_k) \in C$. 由

$$\left| f(x) \right| = |\xi| \leq \sup_i |\xi_i| = \|x\|$$

知 f 是有界的.

设 $M \subset C$ 是“从某项开始都相等”的序列的全体组成的集合, 即 $x \in M, x = (\xi_k)$, 有

$$\xi_j = \xi_{j+1} = \xi_{j+2} = \cdots = \xi$$

j 依赖于 x . 则 $f(x) = \xi$. 在(1)和(6)中得,

$$\begin{aligned} \eta_n = f_n(x) &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{nk} \xi_k + \xi \sum_{k=j}^{\infty} a_{nk} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{nk} (\xi_k - \xi) + \xi \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \end{aligned}$$

因此由(2)和(3), 对于每个 $x \in M$,

$$\eta_n = f_n(x) \longrightarrow 0 + \xi \cdot 1 = \xi = f(x). \quad (9)$$

下面证 M 在 C 中稠密. 设 $x = (\xi_k) \in C$, 且 $\xi_k \rightarrow \xi$. 则对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 N , 使得,

$$|\xi_k - \xi| < \varepsilon \quad \text{对于 } k \geq N.$$

于是, $\tilde{x} = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \xi, \xi, \xi, \dots) \in M$.

$$x - \tilde{x} = (0, \dots, 0, \xi_N - \xi, \xi_{N+1} - \xi, \dots)$$

且, $\|x - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$. 因为 $x \in C$ 是任意的, 所以证得 M 在 C 中稠密.

由(4)对于每个 $x \in C$ 及所有的 n , 有

$$\left| f_n(x) \right| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq r \|x\|$$

因此, $\|f_n\| \leq r$. 即 $(\|f_n\|)$ 是有界的. 另外, (9)表明对于稠密集 M 中的所有 x , $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. 根据推论4.9-7这蕴涵 f_n 弱*收敛于 f . 这就证明了若 $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$ 存在, 则得 $\eta_n \rightarrow \xi$. 由定义, 这就是正则性. 从而, 定理得证.

习 题 4.9

1. Cesaro求和方法 c_1 定义成

$$\eta_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

即取算术平均值. 求出相应的矩阵 A .

2. 利用习题1中的方法 C_1 对下述序列,

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots) \text{ 和 } \left(1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{8} - \frac{3}{16} - \frac{4}{32}, \cdots\right)$$

求其 η_n 的极限.

3. 在习题1中, 以 (η_n) 的项表示 (ξ_n) , 求出 (ξ_n) 使得 $(\eta_n) = (1/n)$.

4. 利用习题8的公式, 求出一个不是 C_1 可和的序列 (即 η_n 没有极限 η)

5. Hölder求和方法 H_p 定义如下: H_1 与习题1中的 C_1 方法相同. 方法 H_2 是连续应用 H_1 两次, 即第一次取算术平均, 然后再对平均值取算术平均值. H_3 是连续应用 H_1 三次. H_p 是连续应用 p 次 H_1 . 试求出将 H_1 和 H_2 用于序列

$(1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots)$ 之后所得的序列.

6. (级数) 无穷级数叫做 A -可和的, 是指它的部分和序列是 A -可和的. 该序列的 A -极限称为级数的 A -和. 证明级数 $1 + Z + Z^2 + \cdots$ 对于 $|Z| = 1, Z \neq 1$ 是 C_1 -可和的, C_1 -和是 $1/(1-Z)$.

7. (Cesaro C_k -方法) 给定 (ξ_n) , 令 $\sigma_n^{(0)} = \xi_n$ 且, $\sigma_n^{(k)} = \sigma_0^{(k-1)} + \sigma_1^{(k-1)} + \cdots + \sigma_n^{(k-1)}$ ($K \geq 1, n = 0, 1, 2, \cdots$) 若对于固定的 $K \in \mathbb{N}$. 我们有 $\eta_n^{(k)} = \sigma_n^{(k)} / C_{n+k}^{(k)} \rightarrow \eta$, 则称 (ξ_k) 是 C_k -可和的, 并有 C_k -极限 η . 证明 $\sigma_n^{(k)}$ 可用 ξ_j 表示成简单的形式:

$$\sigma_n^{(k)} = \sum_{r=0}^n C_{n+k-1-r}^{k-1} \xi_r$$

8. 级数的Euler变换为:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j \quad \text{变换成级数} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$$

这里,

$$\Delta^0 a_j = a_j, \quad \Delta^n a_j = \Delta^{n-1} a_j - \Delta^{n-1} a_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots$$

写 $(-1)^j$ 是为方便 (a_j 不必是正的). 可以证明这个方法是正则的. 因此给定级数的收敛性蕴涵变换后级数的收敛性, 其和相同, 证明由这个方法得出

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots,$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

9. 证明用习题 8 中的 Euler 方法可产生下列级数.

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right)$$

10. 证明 Euler 方法可得下列结果.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n$$

§4.10 数值积分和弱*收敛

弱*收敛在数值积分、微分和插值等方面均有重要应用. 本节我们考虑数值积分, 即求

$$\int_a^b x(t) dt$$

的近似值问题. 解决这个问题有多种方法, 例如, 梯形法、

Simpson法、Newton-Cotes和Gauss公式.

各种方法的共同点是首先在 $[a, b]$ 内选结点, 然后用结点的 x 值的线性组合来表示积分的近似值, 而结点和线性组合的系数的选取只依赖于方法本身.

本节我们将给出这些方法的一般结构, 然后借助于泛函分析来考虑当结点数无限增加时的收敛问题.

我们考虑连续函数, 这使我们想起 $I = [a, b]$ 上所有实值连续函数所构成的 *Banach* 空间 $C[a, b]$, 其范数定义为

$$\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|$$

在 $C[a, b]$ 上定义一线性泛函 f 为,

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt. \quad (1)$$

为了得到一个数值积分公式, 我们按上述提到的方法进行. 对每个正整数 n , 我们选取 $n+1$ 个实数使得.

$$a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b \quad (\text{称为结点}) \quad (2)$$

然后再选取 $n+1$ 个实数.

$$\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)} \quad (\text{称做系数})$$

并在 $C[a, b]$ 上定义线性泛函 f_n 为.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad n=1, 2, \dots \quad (3)$$

$f_n(x)$ 是 $f(x)$ 的近似值. 这里 x 是已知的. 为了找出积分的数值法的精确度, 首先我们考虑 f_n 的有界性.

由 $C[a, b]$ 上范数的定义, $|x(t_k^{(n)})| \leq \|x\|$.

因此,

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| |x(t_k^{(n)})|$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| \right) \|x\|$$

于是,

$$\|f_n\| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}|$$

我们来证 f_n 的范数为

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}|$$

事实上, 若我们取 $x_0 \in C[a, b]$, $|x_0(t)| \leq 1$, 且

$$x_0(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{当 } \alpha_k^{(n)} \geq 0 \\ -1 & \text{当 } \alpha_k^{(n)} < 0 \end{cases}$$

显然, $\|x_0\| = 1$.

$$f_n(x_0) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}|$$

从而(5)式得证.

4.10-1 定义 (收敛性). 如果对于一个 $x \in C[a, b]$, 有,

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6)$$

这里 f 是由(1)定义的.

则称数值积分法(3)关于 x 是收敛的.

另外, 由于多项式的积分容易精确求得, 自然提出下列要求.

4.10-2 要求. 对于每个 n , 如果 x 是次数不超过 n 的多项式, 则存在一个由(3)式定义的泛函 f_n , 使得

$$f_n(x) = f(x). \quad (7)$$

证明 为了证明(7), 首先定义 $n+1$ 个幂函数,

$$x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = t, \quad \dots, \quad x_n(t) = t^n.$$

对于 n 次多项式 $x(t) = \sum_{j=0}^n \beta_j t^j$, 由于 f_* 是线性的, 若 (7) 成立, 则有,

$$f_*(x) = \sum_{j=0}^n \beta_j f_*(x_j) = \sum_{j=0}^n \beta_j f(x_j) = f(x)$$

于是,

$$f_*(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

确定 f_* 需用 $2n+2$ 个参数, 即 $n+1$ 个结点和 $n+1$ 个系数. 当我们选定 $n+1$ 个结点 $t_k^{(n)}$ 之后, 让我们来证明这些系数是唯一确定的.

在(8)式中, 现在有, $x_j(t_k^{(n)}) = (t_k^{(n)})^j$, 因此, (8)式变成

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} (t_k^{(n)})^j = \int_a^b t^j dt = \frac{1}{j+1} (b^{j+1} - a^{j+1}) \quad (9)$$

这里 $j = 0, 1, 2, \dots, n$. 对于每个固定的 n . 这是 $n+1$ 个未知量 $\alpha_0^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$ 的 $n+1$ 个方程的非齐次线性方程组. 其系数行列式 D 是一个 $n+1$ 阶的 Vandermonde行列式. 由于 $t_i^{(n)} \neq t_j^{(n)}$ ($i \neq j$), 所以 $D \neq 0$. 故线性方程组(9)有唯一解.

4.10-3 Polya收敛定理 (数值积分). 满足4.10-2的数值积分法(3), 对于所有 $x \in C[a, b]$ 是收敛的当且仅当存在一个数 C , 使得对于所有的 n 有

$$\sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| \leq C. \quad (10)$$

证明 由Weierstrass逼近定理 (证明在下面) 知, 所有实系数多项式集 W 在实空间 $C[a, b]$ 中是稠密的. 对于每个 $x \in W$, 由于 f_* 满足(7), 所以, $f_*(x) \rightarrow f(x)$. 另外, 由(5) ($\|f_*\|$) 为有界的充分必要条件是对某个实数 C (10) 成

立. 因为对于所有 $x \in C[a, b]$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 意即 $f_n \xrightarrow{r} f$. 从而根据推论 4.8-7 该定理得证.

在大多数数值积分法中, 系数值都取非负数. 对于满足 4.10-2 中要求的 f_n , 取 $x=1$, 有

$$\begin{aligned} f_n(1) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| \\ &= f(1) = \int_a^b dt = b-a. \end{aligned}$$

因此, (10) 式成立. 这就证明了下面定理.

4.10-4 **Steklov 定理 (数值积分)**. 满足 4.10-2 并有非负数 $\alpha_k^{(n)}$ 的数值积分法 (3), 对于每个连续函数均是收敛的.

4.10-5 **Weierstrass 逼近定理 (多项式)**. 实系数多项式全体所构成之集 W 在实空间 $C[a, b]$ 中是稠密的.

证明 由于 $J = [a, b]$ 是紧的, 则每个 $x \in C[a, b]$ 在 $J = [a, b]$ 上是一致连续的. 因此, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个逐段线性的连续函数 y , 使得,

$$\max_{t \in I} |x(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (12)$$

我们先假定 $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$. 因为 y 是逐段线性的连续函数, 于是利用分部积分可以证明它的 Fourier 系数是有界的, 即存在一正数 M , 使得, $|a_0| < M$, $|a_m| < M/m^2$, $|b_m| < M/m^2$, 记 $M = 2\pi/b-a$, 从而关于 y 的 Fourier 级数有,

$$\begin{aligned}
& |a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos kmt + b_m \sin kmt)| \\
& \leq 2M \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) = 2M \left(1 + \frac{1}{6} \pi^2 \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

这即证明了级数在 J 上一致收敛. 由于 y 是连续的, 于是级数的和为 y . 因此, 对于充分大的 n , 级数前 n 项部分和 $S_n(t)$ 有,

$$\max_{t \in I} |y(t) - S_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14)$$

S_n 中的正弦函数和余弦函数的泰勒级数也在 J 上一致收敛, 所以, 存在一多项式 P (例如, 由这些 Taylor 级数适当的部分和得到的) 使得,

$$\max_{t \in I} |S_n(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

由此不等式和 (12)、(14) 式以及

$$\begin{aligned}
|x(t) - P(t)| & \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) \\
& \quad - S_n(t)| + |S_n(t) - P(t)|
\end{aligned}$$

有,

$$\max_{t \in I} |x(t) - P(t)| < \varepsilon. \quad (15)$$

注意, 这里取的 $x \in C[a, b]$ 满足 $x(a) = x(b)$. 若 $x(a) \neq x(b)$, 令 $u(t) = x(t) - r(t-a)$, 常数 r 使得 $u(a) = u(b)$. 则对于 u , 存在一多项式 q 使在 J 上有, $|u(t) - q(t)| < \varepsilon$. 取 $p(t) = q(t) + r(t-a)$. 于是, $x - p = u - q$, (15) 式成立. 由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 从而证明了 W 在 $C[a, b]$ 中是稠密的.

这个定理有许多其他的证明. 例如可用 Bernstein 多项

式逼近 $x(t) \in C[a, b]$, (参看定光桂著的“Banach空间引论”)

习 题 4.10

1. 矩形法则是 (见图28)

$$\int_a^b x(t) dt \approx h \cdot [x(t_1^*) + \dots + x(t_n^*)]$$

这里, $h = \frac{b-a}{n}$, $t_k^* = a + (k - \frac{1}{2})h$, 这个公式是怎样得到的?

结点和系数是什么?

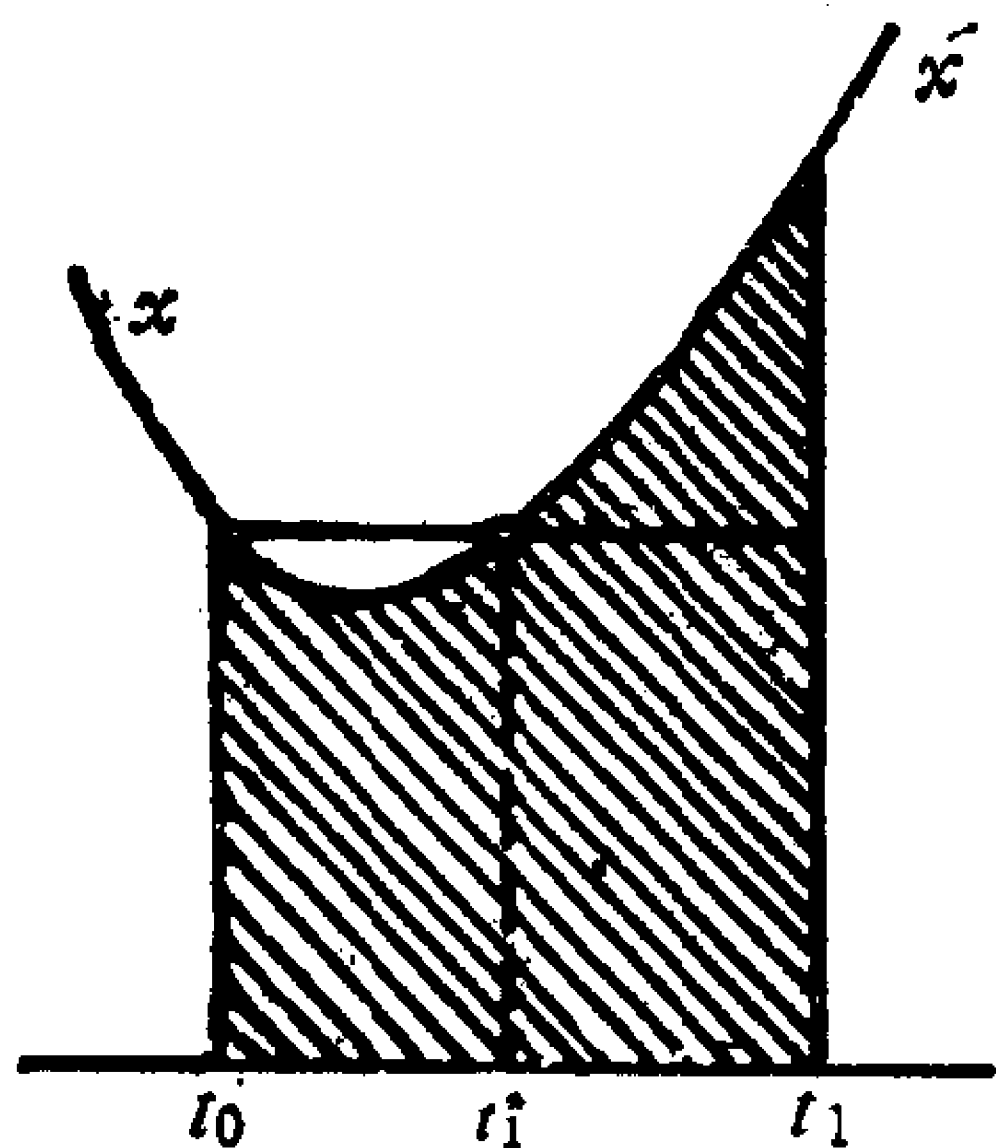


图28 矩形法则

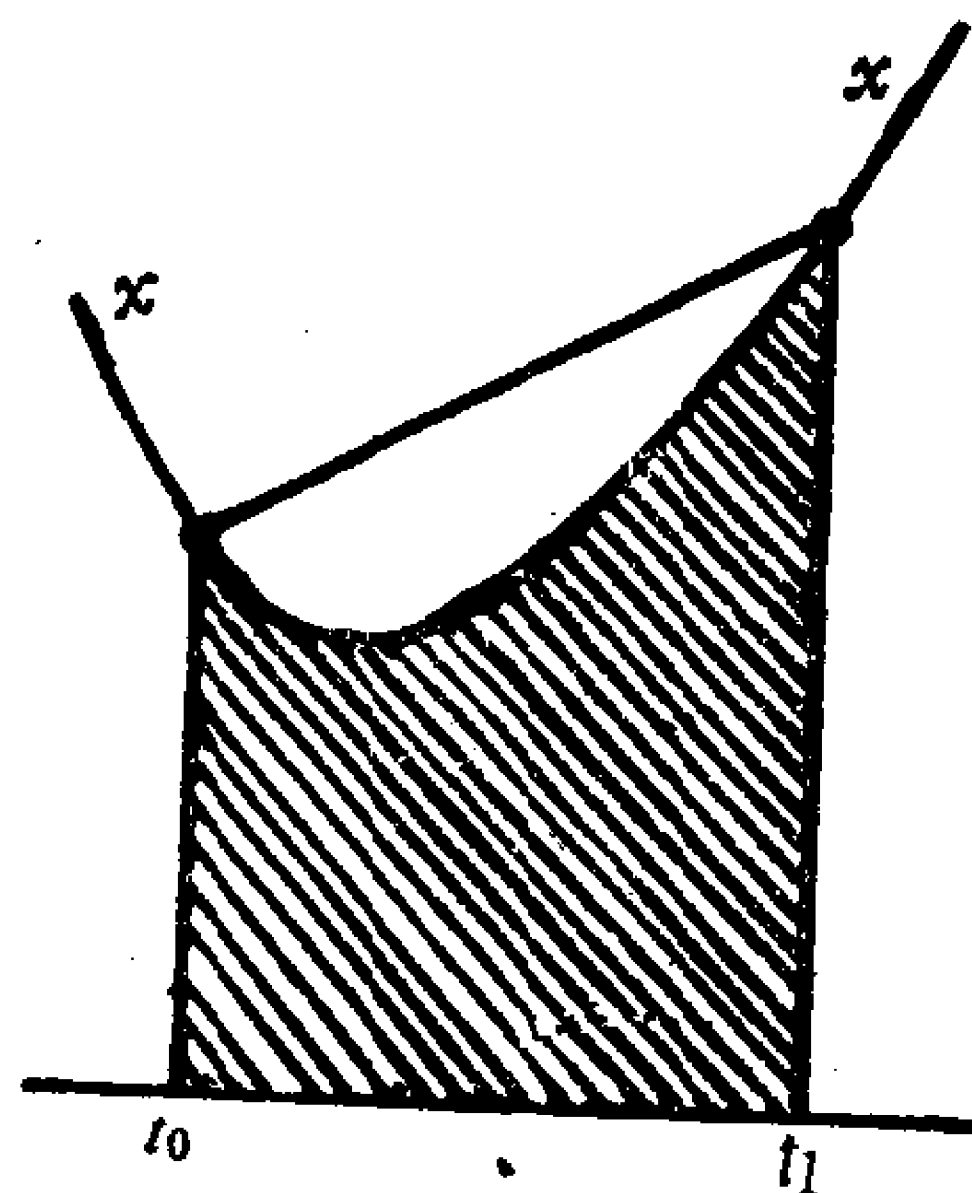


图29 梯形法则

2. 梯形法则是 (见图29)

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} x(t) dt \approx \frac{h}{2} (x_j + x_{j-1})$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_j = x(t_j)$$

或
$$\int_a^b x(t) dt \approx h \left(\frac{1}{2} x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{2} x_n \right)$$

这里 $x_k = x(t_k)$, $t_k = a + kh$. 若我们用逐段线性函数近似 x , 试解释这个公式是怎样得到的.

3. Simpson法则是 (见图30) .

$$\int_{t_0}^{t_2} x(t) dt \approx \frac{h}{3} (x_0 + 4x_1 + x_2) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

或
$$\int_a^b x(t) dt \approx \frac{h}{3} (x_0 + 4x_1 + 2x_2 + \cdots + 4x_{n-1} + x_n)$$

这里 n 是偶数, $x_k = x(t_k)$, $t_k = a + kh$. 试证明: 上面公式为: 对 $[t_0, t_2]$ 上 $x(t)$, 由过 t_0, t_1, t_2 三点的 x 值的二次多项式来近似. 类似在 $[t_2, t_4]$ 等区间上也这样作, 就得到上述这个公式

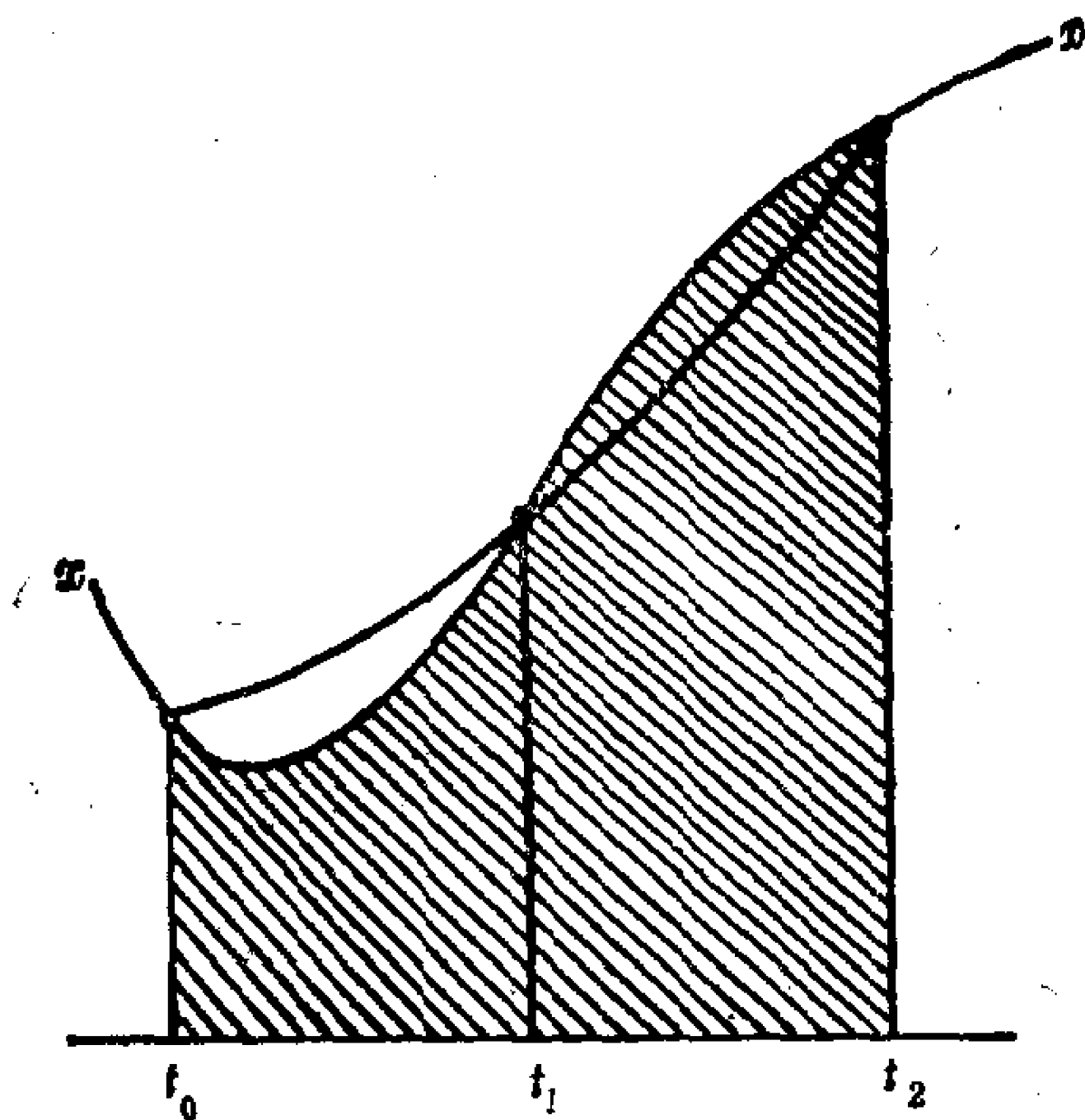


图30 Simpson法则

4. 设 $f(x) = f_n(x) - e_n(x)$. 这里 f_n 是按梯形法则得到的近似值. 证明对于任意 2 次连续可微函数 x 有如下误差界.

$k_2 m_2^* \leq \varepsilon_2(x) \leq k_2 m_2$, 这里 $k_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}$, m_2 和 m_2^* 是 x'' 在

(a, b) 上的最大值和最小值.

5. Simpson 法则在实际中应用很广泛. 为了比较精确度. 对于积分

$$I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

以 $n=10$ 分别用梯形法则和 Simpson 法则计算, 并将所得数值 0.746211 和 0.746825 与精确值 0.746824 比较一下. 下面附表给出 e^{-t^2} 的各近似值.

6. 利用习题 4 证明习题 5 中 0.746211 的误差界是 -0.001667 和 0.000614 , 因此,

$$0.745597 \leq I \leq 0.747878.$$

7. 3-8 法则是,

$$\int_{t_0}^{t_3} x(t) dt = \frac{3h}{8} (x_0 + 3x_1$$

$$+ 3x_2 + x_3)$$

这里 $(x_k = x(t_k), t_k = a + kh,$

若在 (t_0, t_3) 上用一个三次多项式近似 x , 使得在结点 t_0, t_1, t_2, t_3 处的多项式的值等于 x 在这些点的值. 证明上述式子就是所得公式.

8. 考虑积分公式

$$\int_{-h}^h x(t) dt = 2hx(0) + r(x).$$

这里 r 是误差. 假定 $x \in C^1[-h, h]$ 即 x 在 $J = [-h, h]$ 上连续可微, 证明这时误差估计为

t	e^{-t^2}
0	1.000000
0.1	0.990050
0.2	0.960789
0.3	0.931931
0.4	0.852144
0.5	0.778801
0.6	0.697676
0.7	0.612626
0.8	0.527292
0.9	0.444858
1.0	0.367879

$$|r(x)| \leq h^2 p(x)$$

其中,

$$p(x) = \max_{t \in J} |x'(t)|$$

证明 p 是这些函数的向量空间上的拟范数 (参看 §2.3 的习题 10)

9. 如果 x 是实解析函数, 证明下式成立.

$$\int_{-h}^h x(t) dt = 2h \left[x(0) + x''(0) \frac{h^2}{3!} + x^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} + \dots \right] \quad (16)$$

若对积分取一形如: $2h(\alpha - 1)x(-h) + \alpha_0 x(0) + \alpha_1 x(h)$ 的近似式, 在确定系数 $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$ 时, 使尽可能多的幂 h, h^2, \dots 与 (16) 中一致, 证明这样就得到了 Simpson 法则

$$\int_{-h}^h x(t) dt \approx \frac{h}{3} [x(-h) + 4x(0) + x(h)]$$

说明: 为什么上述结果对于三次多项式是精确表达式.

10. 在 Weierstrass 逼近定理的证明中, 我们用到了逐段线性的连续函数的 Fourier 系数的界, 这些界是如何得到的呢?

§4.11 开映象定理

我们已介绍了 Hahn-Banach 定理和一致有界性定理. 现在将考虑第三个定理. 即开映象定理. 这将涉及开映射的概念.

4.11-1 定义(开映射). 设 X 和 Y 是度量空间, T 是从 X 内到 Y 中的映射, 如果对于 $D(T) \subset X$ 中的每个开集其象是 Y 中的一个开集. 则称

$T: D(T) \rightarrow Y$ 为开映射.

注意. 若映射不是满射, 下面两个开映射是有区别的.

(a) 从定义域到 Y 中的开映射;

(b) 从定义域到它的值域上的开映射.

(b) 比 (a) 弱. 例如, 若 $X \subset Y$. X 到 Y 中的映射 $x \mapsto x$ 是开映射当且仅当 X 是 Y 的一个开子集.

然而, 若 $x \mapsto x$ 是从 X 到其值域 (即 X) 上的映射, 则在任何情况下它都是开映射.

另外, 为避免与连续映射混淆. 让我们回忆定理 1.3-6. $T: X \mapsto Y$ 为连续映射的充要条件是对于 Y 中的每个开子集其原象是 X 中一个开集, 这不蕴涵 T 将 X 中的开集映到 Y 中的开集上. 例如, 按 $t \mapsto \sin t$ 给出的映射 $R \rightarrow R$ 是连续的. 但将 $(0, 2\pi)$ 映到 $[-1, 1]$ 上.

为证明开映射定理, 我们首先证下列引理

4.11-2 引理(开单位球) 从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的有界线性算子 T 具有如下性质: 开单位球 $B_0 = B(\theta, 1)$ 关于 T 的象 $T(B_0)$ 包含一个中心在 $\theta \in Y$ 的开球.

证明. 分以下三步来证.

(a) 开球 $B_1 = B\left(\theta; \frac{1}{2}\right)$ 的象的闭包包含一开球 B^* .

(b) $\overline{T(B_n)}$ 包含一个中心在 $\theta \in Y$ 的开球, 这里, $B_n = B(\theta; 2^{-n}) \subset X$.

(c) $T(B_0)$ 包含一个中心在 $\theta \in Y$ 的开球.

详细证明如下:

(a) 对子集 $A \subset X$, 我们以 αA (α 是数量) 和 $A + w$ ($w \in X$). 分别表示下列两个集合.

$$\alpha A = \{x \in X \mid x = \alpha a, a \in A\} \quad (1)$$

$$A + w = \{x \in X \mid x = a + w, a \in A\}. \quad (2)$$

考虑开球 $B_1 = B(\theta, \frac{1}{2}) \subset X$. 对于任意固定的 $x \in X$,

有充分大的正整数 $k (k > 2\|x\|)$ 使得 $x \in kB_1$, 因此.

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1$$

由于 T 是满射的、线性的. 于是有.

$$\begin{aligned} Y = T(X) &= T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)} \end{aligned} \quad (3)$$

根据定理 4.6-2, 存在一个 $\overline{kT(B_1)}$ 必包含某个开球, 这蕴涵 $\overline{T(B_1)}$ 也包含一个开球, 即, $B^* = B(y_0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)}$. 从而得到

$$B^* - y_0 = B(\theta, \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0 \quad (4)$$

(b) 证明 $B^* - y_0 \subset \overline{T(B_0)}$. 这里 B_0 是定理给定的. 由 (4) 只须证明

$$\overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)} \quad (5)$$

设 $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$, 则, $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$. 还已知 $y_0 \in$

$T(B_1)$. 由定理 1.4-7 (a). 存在

$$u_n = Tw_n \in T(B_1), \text{ 使得 } u_n \rightarrow y + y_0$$

$$v_n = Tz_n \in T(B_1) \text{ 使得 } v_n \rightarrow y_0$$

因为 $w_n, z_n \in B_1$, 且 B_1 的半径为 $\frac{1}{2}$, 得,

$$\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

所以, $w_n - z_n \in B_0$. 从

$$T(w_n - z_n) = Tw_n - Tz_n = u_n - v_n \rightarrow y.$$

应有, $y \in \overline{T(B_0)}$. 由于 $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ 是任意的. 因此, (5) 式得证. 由(4)从而有.

$$B^* - y_0 = B(\theta, \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)} \quad (6)$$

令 $B_n = B(\theta, 2^{-n}) \subset X$. 因为 T 是线性的.

$$\overline{T(B_n)} = 2^{-n} \overline{T(B_0)}. \text{ 由(6)得到,} \quad (7)$$

$$V^n = B(\theta, \varepsilon/2^n) \subset \overline{T(B_n)}.$$

(C) 最后我们来证

$$V_1 = B\left(\theta, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \overline{T(B_0)}$$

从(7)有, $V_1 \subset \overline{T(B_1)}$. 对于任意 $y \in V_1$, 则, $y \in \overline{T(B_1)}$.

由定理1.4-7(a)必有 $v \in T(B_1)$, 使 $\|y - v\| < \frac{\varepsilon}{4}$. 因为 $v \in$

$T(B_1)$ 蕴涵某个 $x_1 \in B_1$, $v = Tx_1$, 所以.

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

与(7)可得到, $y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$. 同样存在一个 $x_2 \in B_2$, 使得,

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

因此, $y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$, 依此下去, 第 n 步可有一个 $x_n \in B_n$, 使得.

$$\|y - \sum_{k=1}^n Tx_k\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (8)$$

令 $z_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 因为 $x_k \in B_k$, 有 $\|x_k\| < 1/2^k$, 对于 $n > m$,

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

故 (z_n) 是 X 中的 Cauchy 序列. 由于 X 是完备的, 所以, (z_n) 收敛, 即 $z_n \rightarrow x \in X$. B_0 的半径是 1, 从下式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad (9)$$

知 $x \in B_0$. 因为 T 是连续的, 则 $Tz_n \rightarrow Tx$. 由 (8) 得 $Tx = y$. 从而证得 $y \in T(B_0)$.

4.11-3 开映射定理、有界逆算子定理. 从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的有界线性算子 T 是一个开映射. 因此, 若 T 是双射的, 则 T^{-1} 是有界的.

证明. 我们证明每个开集 $A \subset X$ 的象 $T(A)$ 是 Y 中的开集. 即证明对于每个 $y = Tx \in T(A)$, 集 $T(A)$ 包含一个以 $y = Tx$ 为中心的开球.

令 $y = Tx \in T(A)$. 由 A 是开集, 它包含了一个以 x 为中心的开球, 于是 $A - x$ 包含一个以 θ 为中心的开球, 设这个球的半径为 r , $k = \frac{1}{r}$, 则 $r = 1/k$. 且 $k(A - x)$ 包含单位球 $B(\theta; 1)$

引理4.11-2 蕴涵 $T\{k(A-x)\} = k[T(A)-Tx]$ 包含一个中心在 θ 的开球,于是 $T(A)-Tx$ 也包含这样一个开球.因此 $T(A)$ 包含一个以 $Tx=y$ 为中心的开球.因为 $y \in T(A)$ 是任意的,所以, $T(A)$ 是开集.

最后,如果 $T^{-1}: Y \rightarrow X$ 存在.因为 T 是开映射,由定理1.3-6知 T^{-1} 是连续的.根据定理2.6-10, T^{-1} 是线性的.由定理2.7-10, T^{-1} 是有界的.

习 题 4.11

1. 证明由 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1$ 定义的 $T: R^2 \rightarrow R$ 是开映射.由 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$ 定义的映射 $R^2 \rightarrow R^2$ 是开映射吗?

2. 证明一个开映射不一定将闭集映射到闭集上.

3. 作为(1)和(2)的扩充,我们定义

$$A+B = \{x \in X \mid x = a+b, a \in A, b \in B\}$$

这里, $A, B \subset X$. 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 求 $aA, A+w, A+A$. (参看图31)

4. 证明(9)中的不等式是严格的.

5. 设 X 是赋范空间, 它的点是“只有有限个非零项”的复数列 $x = (\xi_i)$, 其范数定义为 $\|x\| = \sup_i |\xi_i|$, 设 T 是由 $y = Tx =$

$(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \dots)$ 定义的. 证明 T 是线性有界算子. 但 T^{-1} 是无

界的, 这与定理4.11-3矛盾吗?

6. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间, $T: X \rightarrow Y$ 是单射有界线性算子. 证明 $T^{-1}: R(T) \rightarrow X$ 是有界的当且仅当 $R(T)$ 在 Y 中是闭的.

7. 设 $T: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子. 这里 X 和 Y 是巴拿赫空间. 若 T 是双射的, 证明存在正实数 a, b , 使得对于所有 $x \in X$, 有

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|.$$

8. (等价范数) 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是向量空间 X 上的范数, 使得 $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ 和 $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ 是完备的. 如果 $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ 总蕴涵 $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$, 证明 X_1 中的收敛性蕴涵 X_2 中的收敛性, 且反之亦然. 并存在正数 a 和 b , 使得对于所有 $x \in X$,

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

(这两个范数是等价的, 参看定义2.4-4)

9. 设 $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ 和 $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ 是巴拿赫空间, 若存在一个常数 c , 使得对于所有 $x \in X$, $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$, 证明存在一常数 k , 使得, 对于所有 $x \in X$, $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$ (因此, 两个范数是等价的.)

10. 从§1.3知, 度量空间 X 的所有开子集组成的集合 T 称为 X 的一个拓扑. 因此, 向量空间 X 上的每个范数定义 X 一个拓扑. 若 X 上的两个范数使得 $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ 和 $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ 均是 Banach 空间. 并且由 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 所定义的拓扑 T_1 和 T_2 满足 $T_1 \supset T_2$. 证明 $T_1 = T_2$.

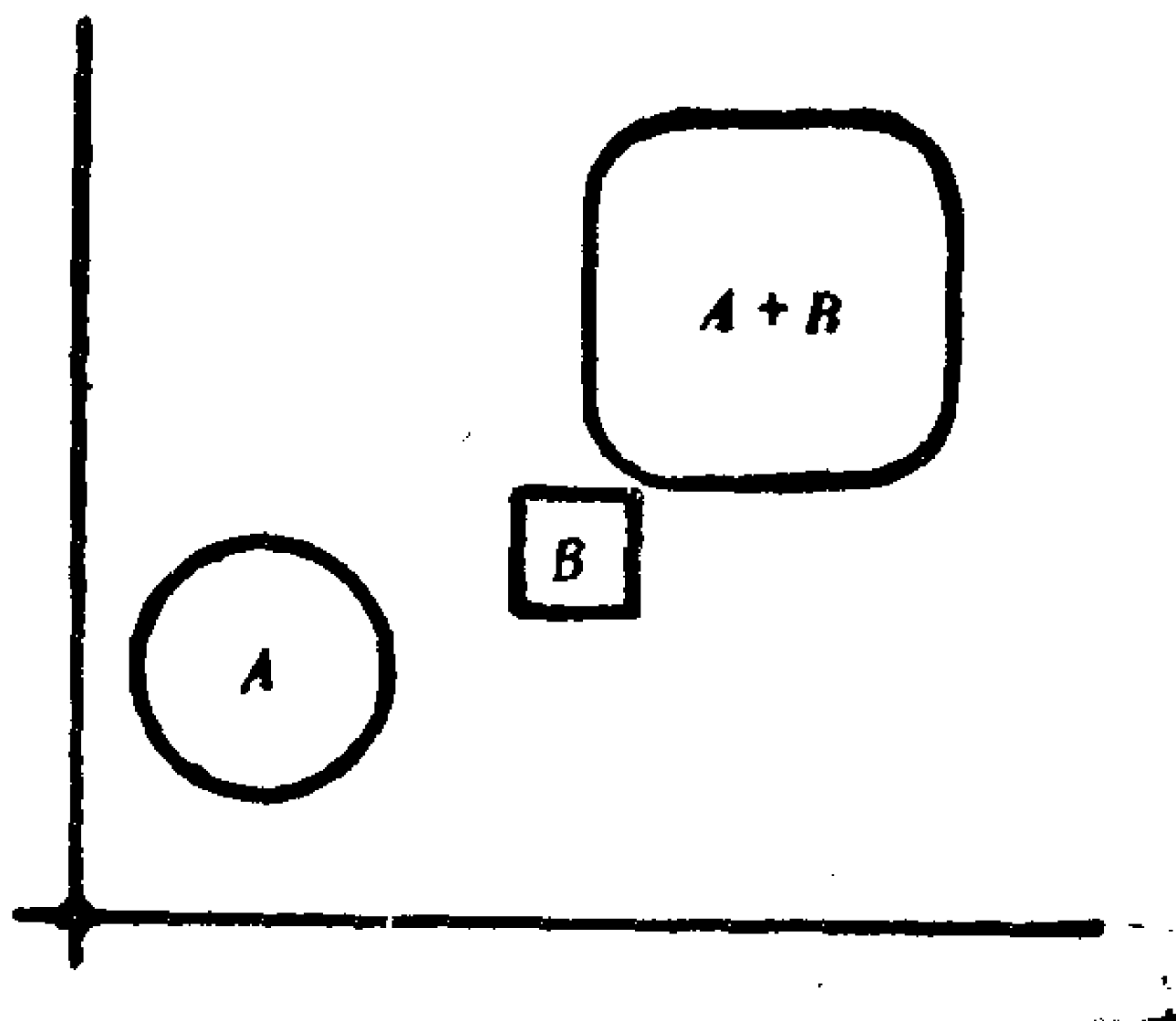


图31 平面上, 集 $A+B$

§4.12 闭线性算子、闭图象定理

实际中重要的线性算子并不都是有界的, 例如, 微分算子就是无界的(2.7-6). 在量子力学和其他应用中经常需要无界算子, 并且在实际中常遇到的是一类所谓线性算子.

在本节我们定义赋范空间上闭线性算子, 并研究它们的

一些性质. 特别重要的是闭图象定理. 它给出了Banach空间上闭线性算子是有界的充分条件.

让我们从定义开始.

4.12-1 定义 (闭线性算子). 设 X 和 Y 是赋范空间, $T: D(T) \rightarrow Y$ 是一线性算子. 其定义域 $D(T) \subset X$. 若 T 的图象

$$G(T) = \{(x, y) \mid x \in D(T), y = Tx\}$$

在赋范空间 $X \times Y$ 中是闭的. 则称 T 为一个闭线性算子. 这里向量空间 $X \times Y$ 中的两个代数运算定义为,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

(α 是数量), $X \times Y$ 上的范数定义成

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad (1)$$

(关于此空间上另一个范数, 请看习题2)

闭线性算子在什么条件下是有界的? 下面重要的定理给予了回答.

4.12-2 闭图象定理. 设 X 和 Y 是Banach空间, $T: D(T) \rightarrow Y$ 是一闭线性算子. 这里, $D(T) \subset X$. 如果 $D(T)$ 在 X 中是闭的, 则算子 T 是有界的.

证明 首先证明 $X \times Y$ 依(1)所定义的范数是完备的. 设 $(z_n) = (x_n, y_n)$ 是 $X \times Y$ 中的任一Cauchy序列. 则对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 N , 使得,

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon \quad (m, n > N) \quad (2)$$

因此, (x_n) 和 (y_n) 分别是 X 和 Y 中的序列, 因为 X 和 Y 是完备的, 所以 (x_n) 、 (y_n) 收敛, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. 这蕴涵 $z_n \rightarrow$

$z = (x, y)$ 且在 (2) 中令 $m \rightarrow \infty$, 有, $\|z_n - z\| \leq \varepsilon \quad (n > N)$
 由于 (z_n) 是 $X \times Y$ 中的任意 Cauchy 序列. 从而证得 $X \times Y$ 是完备的.

根据假设 $G(T)$ 在 $X \times Y$ 中是闭的, $D(T)$ 在 X 中是闭的. 因此, 由定理 1.4-8, $G(T)$ 和 $D(T)$ 均是完备的. 现在考虑映射

$$P: G(T) \rightarrow D(T)$$

$$(x, Tx) \mapsto x$$

显然 P 是线性的. 由于

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$$

所以 P 是有界的. 容易验证 P 是双射的. 从而逆映射,

$$P^{-1}: D(T) \rightarrow G(T)$$

$$x \mapsto (x, Tx)$$

存在. 因为 $D(T)$ 和 $G(T)$ 均是完备的, 利用有界逆算子定理 4.11-3, P^{-1} 是有界的. 即对于某个数 b 和所有 $x \in D(T)$, $\|(x, Tx)\| \leq b \|x\|$, 因此,

$\|Tx\| \leq \|Tx\| + \|x\| = \|(x, Tx)\| \leq b \|x\|$. 对于 $x \in G(T)$.

故 T 是有界的.

4.12-3 定理 (闭线性算子). 设 X 和 Y 是赋范空间, $T: D(T) \rightarrow Y$ 是一线性算子. 这里, $D(T) \subset X$. 则 T 是闭的当且仅当它有如下性质: 若 $x_n \rightarrow x$, 这里 $x_n \in D(T)$, $Tx_n \rightarrow y$. 那么 $x \in D(T)$, 且 $Tx = y$.

证明 根据定义, T 为闭的充要条件是 $G(T)$ 为闭的.

而 $G(T)$ 是闭的当且仅当 $z = (x, y) \in \overline{G(T)}$ 蕴涵 $z \in G(T)$.

由定理1.4-7(a), $z \in \overline{G(T)}$ 当且仅当存在 $z_n = (x_n, Tx_n) \in G(T)$, 使得 $z_n \rightarrow z$, 因此有,

$$x_n \rightarrow x, Tx_n \rightarrow y. \quad (3)$$

且 $z = (x, y) \in G(T)$ 当且仅当 $x \in D(T)$, $y = Tx$.

注意, 这个性质与有界线性算子的性质是有区别的. 若线性算子 T 是有界的, 则 T 是连续的. 如果 (x_n) 是 $D(T)$ 中的收敛序列, 那么, (Tx_n) 也收敛. (参看定理1.4-9). 这对于闭线性算子不一定成立. 但是, 如果 T 是闭的, 且两个序列 (x_n) 和 (\tilde{x}_n) 在 $D(T)$ 中收敛于同一个极限, 并相应的序列 (Tx_n) 和 $(T\tilde{x}_n)$ 均收敛, 则后两个序列也有相同的极限.

(参看习题6)

4.12-4 例题 (微分算子). 设 $X = C[0, 1]$; 且

$$T: D(T) \rightarrow X$$

$$x \mapsto x' \quad (x' \text{ 是 } x \text{ 的导数})$$

这里 $D(T)$ 是由具有连续导数的函数 $x \in X$ 构成的子空间. 则 T 不是有界的, 但它是闭的.

证明 从2.7-6看到 T 不是有界的. 下面利用定理4.12-3证明 T 是闭的. 设 $(x_n) \subset D(T)$.

且

$$x_n \rightarrow x \quad \text{和} \quad Tx_n \rightarrow y.$$

因为依 $C[0, 1]$ 上的范数的收敛是 $[0, 1]$ 上的一致收敛. 由 $x_n' = Tx_n \rightarrow y$, 有,

$$\int_0^1 y(\tau) d\tau = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n'(\tau) d\tau$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t x'_n(\tau) d\tau = x(t) - x(0).$$

即, $x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau) d\tau$.

这就证得 $x \in D(T)$, 且 $x' = y$, 由定理4.12-3知 T 是闭的.

值得注意的是在这个例子中, $D(T)$ 在 X 里不是闭的. 否则, 根据闭图象定理, T 将是有界的.

线性算子的闭性不蕴涵有界性. 反之, 有界性也不蕴涵闭性. 事实上, 例题4.12-4可说明闭性不蕴涵有界性. 下例则表明有界性不蕴涵闭性, 设, $T: D(T) \rightarrow D(T) \subset X$ 是 $D(T)$ 上的恒等算子, 这里 $D(T)$ 是赋范空间 X 的一个真稠密子空间, 显然, T 是线性有界的. 但是 T 不是闭的. 这是因为若取 $x \in X - D(T)$, 有 $D(T)$ 中序列 (x_n) 收敛于 x , 由定理4.12-3知 T 不是闭的.

4.12-5 引理 (闭算子). 设 X 和 Y 是赋范空间, $T: D(T) \rightarrow Y$ 是有界线性算子. 这里 $D(T) \subset X$. 那么,

(a) 若 $D(T)$ 是 X 的一个闭子集, 则 T 是闭的;

(b) 若 T 是闭的且 Y 是完备的. 则 $D(T)$ 是 X 的闭子集.

证明 (a)、若 (x_n) 在 $D(T)$ 中收敛, 即 $x_n \rightarrow x$. 且 (Tx_n) 也收敛. 由于 $D(T)$ 是闭的. 则 $x \in \overline{D(T)} = D(T)$. 因为 T 是连续的, 所以 $Tx_n \rightarrow Tx$. 根据定理4.12-3, T 是闭的.

(b) 对于 $x \in \overline{D(T)}$, 存在 $D(T)$ 中一序列 (x_n) 使得 $x_n \rightarrow x$. (参看1.4-7). 由于 T 是有界的,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|$$

这证得 (Tx_n) 是柯西序列. 因为 Y 是完备的, (Tx_n) 收敛,

即 $Tx_n \rightarrow y \in Y$. 由 T 是闭的, 根据定理 4.12-3, $x \in D(T)$

(且 $Tx = y$). 由于 $x \in \overline{D(T)}$ 是任意的. 因此, $D(T)$ 是闭的.

习 题 4.12

1. 证明(1)定义 $X \times Y$ 上一个范数.

2. 验证:

$$\|(x, y)\| = \max \{ \|x\|, \|y\| \}$$

和

$$\|(x, y)\|_0 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

是赋范空间 X 和 Y 的乘积空间 $X \times Y$ 上的两个范数.

3. 证明线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 的图象 $G(T)$ 是 $X \times Y$ 的一个向量子空间.

4. 若定义 4.12-1 中的 X 和 Y 是 Banach 空间, 证明 $V = X \times Y$ 按 (1) 所定义的范数是一个巴拿赫空间.

5. (逆算子) 若闭线性算子的逆 T^{-1} 存在, 证明 T^{-1} 是闭线性算子.

6. 设 T 是闭线性算子. 若 $D(T)$ 中的两个序列 (x_n) 和 (\tilde{x}_n) 都收敛于同一个极限, 且 (Tx_n) 和 $(T\tilde{x}_n)$ 均收敛. 证明 (Tx_n) 和 $(T\tilde{x}_n)$ 有相同的极限.

7. 从闭图象定理可以证得定理 4.11-3 中的第二个论述.

8. 设 X 和 Y 是赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是闭线性算子.

(a) 证明紧子集 $C \subset X$ 的象 A 在 Y 中是闭的,

(b) 证明紧子集 $K \subset Y$ 的原象 B 在 X 中是闭的 (参看定义 2.5-1)

9. 设 X 和 Y 是赋范空间, 且 Y 是紧的. 若 $T: X \rightarrow Y$ 是闭线性算子. 证明 T 是有界的.

10. 设 X 和 Y 是赋范空间, 且 X 是紧的. 若 $T: X \rightarrow Y$ 是双射闭

线性算子. 证明 T^{-1} 是有界的.

11. (零空间) 证明闭线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 的零空间 $N(T)$ 是 X 的闭子空间.

12. 设 X 和 Y 是赋范空间. 若 $T_1: X \rightarrow Y$ 是闭线性算子且 $T_2 \in B(X, Y)$. 证明 T_1 和 T_2 是闭线性算子.

13. 设 T 是一闭线性算子. 其定义域 $D(T)$ 在巴拿赫空间 X 中, 值域 $R(T)$ 在赋范空间 Y 中. 若 T^{-1} 存在且有界. 证明 $R(T)$ 是闭的.

14. 假设级数 $u_1 + u_2 + \dots$ 的各项在区间 $I = [0, 1]$ 上是连续可微的函数, 且级数在 I 上一致收敛于 x . 而且, 假定 $u_1' + u_2' + \dots$ 在 I 上也一致收敛. 证明 x 在 $(0, 1)$ 上是连续可微的. 且可逐项微分, $x' = u_1' + u_2' + \dots$

15. (闭延拓) 设 $T: D(T) \rightarrow Y$ 是闭线性算子具有图象 $G(T)$. 这里 $D(T) \subset X$, 且 X 和 Y 均是 Banach 空间. 证明 T 有闭线性延拓算子 \tilde{T} 其图象为 $\overline{G(T)}$ 当且仅当 $\overline{G(T)}$ 不含形如 (θ, y) 的元素, 这里, $y \neq \theta$.

第五章 Banach不动点定理、逼近理论

本章包含泛函分析在两个方面的应用，其一是Banach不动点定理及其应用，其二是赋范空间和Hilbert空间中的逼近理论及其应用。

重要概念、主要内容的概述

在§5.1中介绍了压缩映射的概念、Banach不动点定理，定理给出了不动点（映射到自身的点）存在性和唯一性的充分条件，也给出了逼近不动点的迭代过程和误差界。在§5.2中介绍了Banach不动点定理在三个重要方面：线性代数方程、常微分方程、积分方程上的应用。

§5.3至§5.6介绍了逼近理论。在§5.3我们定义了最佳逼近并讨论了其存在性。若一赋范空间是严格凸的，其最佳逼近是唯一的，而Hilbert空间正是这样空间。对一般的赋范空间需附加条件才能保证最佳逼近的唯一性。如在 $C[a, b]$ 中的Haar条件。由于范数选择的不同，我们可得到不同类型的逼近。并着重讨论了以下两种逼近：

(i) 在 $C[a, b]$ 中的一致逼近 (§5.4)

(ii) Hilbert空间中的逼近。 (§5.5)

此外，我们还简单地讨论了三次样条函数逼近 $[a, b]$ 上一给定函数的问题（参看§5.6）

本章内容在后面章节中并不需要，故根据情况可灵活选用. §5.1至§5.2的前提是第一章（不需要2至4章）如果选用，本章前两节可接在第一章后面讲. §5.3至§5.6只须2、3章作为前提. 因此，这部分可在第三章之后讲.

§5.1 Banach不动点定理

Banach不动点定理是用泛函分析的方法处理分析中不同领域的统一的存在性和唯一性的一个重要定理.

首先介绍不动点和压缩映射的概念.

5.1-1 定义(不动点). 设 X 为一集合. $T: X \rightarrow X$ 为一映射. 如果 $x_0 \in X$, 使得, $Tx_0 = x_0$. 则称 x_0 为映射 T 的一个不动点.

例如. 平面的旋转有一个不动点(旋转中心). R 到自身的映射: $x \mapsto x^2$ 有两个不动点(0与1). 由 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_2, \xi_1)$ 定义的映射 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 有无穷多个不动点($\xi_1 = \xi_2$ 上的所有点). 平移变换作为一个映射是没有不动点的.

5.1-2 定义(压缩映射). 设 (X, d) 为一度量空间, $T: X \rightarrow X$ 是一映射. 若存在数 α , $0 \leq \alpha < 1$, 使得对于所有 $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (1)$$

成立. 则称 T 是一个压缩映射.

压缩映射的几何意义是: X 中任意二点 x 与 y 的象比该两点更接近. 确切地说: 比值 $d(Tx, Ty)/d(x, y)$ 不超过小于1的常数 α .

压缩映射是连续映射. 事实上, 对于任意 $x_n \rightarrow x$, 有,

$$d(Tx_n, Tx) \leq \alpha d(x_n, x)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由 $d(x_n, x) \rightarrow 0$, 得 $d(Tx_n, Tx) \rightarrow 0$.

5.1-3 Banach不动点定理 (压缩映射原理). 设 $X = (X, d)$, $X \neq \emptyset$ 是一完备的度量空间. $T: X \rightarrow X$ 为 X 上的一个压缩. 则 T 有一个且只有一个不动点.

证明的思路是: 我们构造一序列 (x_n) , 并证明其为 Cauchy 序列, 因而在完备的度量空间 X 中收敛, 然后证明其极限 x 就是 T 的不动点. 且没有其他的不动点.

证明 (a) 首先证明存在性. 我们任选 $x_0 \in X$, 并定义迭代序列 (x_n) 如下:

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0, \dots \quad (2)$$

下面证明 (x_n) 为 Cauchy 序列. 由 (1) 与 (2),

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\dots \dots \dots \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) \end{aligned} \quad (3)$$

因此, 由三角不等式及几何级数的部分和, 对于 $n > m$, 有,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots \\ &\quad + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

由 $0 \leq \alpha < 1$, $0 < 1 - \alpha^{n-m} \leq 1$, 因而,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \quad (n > m) \quad (4)$$

在右边, $0 \leq \alpha < 1$, 且 $d(x_1, x_0)$ 不变. 所以只要 m 取得足够大 (且 $n > m$), 则右边可任意小. 这就证明了 (x_m) 为 Cauchy 序列. 因为 X 是完备的. (x_m) 收敛, 令 $x_m \rightarrow x$. 证明此极限 x 即为映射 T 的不动点.

从三角不等式与 (1) 有,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

($m \rightarrow \infty$). 即 $d(x, Tx) = 0$. 由 § 1.1 中 (M2) 得 $Tx = x$. 这就证明了 x 是 T 的不动点.

(b) 证明 x 是唯一的不动点. 设 \tilde{x} 是 T 的另一个不动点.

则 $Tx = x$; $T\tilde{x} = \tilde{x}$. 由 (1) 得

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x})$$

因为 $0 \leq \alpha < 1$. 所以, $d(x, \tilde{x}) = 0$ 由 (M2) 知 $\tilde{x} = x$.

5.1-4 推论 (迭代、误差界). 在定理 5.1-3 的条件下. 从任一 $x_0 \in X$ 开始的迭代序列 (2) 均收敛于 T 的唯一不动点 x . 其误差估计分别为.

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \quad (\text{先验估计}) \quad (5)$$

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m) \quad (\text{后验估计}) \quad (6)$$

证明. 迭代序列 (x_m) 收敛于不动点 x 这从定理 5.1-3 可直

接证得. 在(4) 中令 $n \rightarrow \infty$, 得不等式(5). 在(5) 中取 $m = 1$, 并将 x_0, x_1 分别记为 y_0, y_1 . 得.

$$d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$$

再令 $y_0 = x_{m-1}, y_1 = x_m$, 则(6) 式得证.

先验误差界(5) 在计算开始时使用, 用来估计为达到给定的准确度所需的步数. (6) 式在计算的中间阶段和最后使用. 其准确度至少不低于(5).

从应用观点上看, 上述定理还不能令人满意. 因为常常遇到如下的限制: 压缩映射 T 不是定义在整个空间 X 上的, 而只是定义在 X 的子空间 Y 上. 然而, 若 Y 是闭的, 由定理1.4-8知其为完备的. 因而在 Y 中存在一不动点 x . 并且只要我们在 x_0 的选择上加以适当的限制, 使诸 x_m 保持在 Y 中, 就能得到 $x_m \rightarrow x$. 这一类问题一个典型的结果是下面的定理.

5.1-5 定理(在球中的压缩). 设 T 是从完备度量空间 $X = (X, d)$ 到其自身的映射. $Y = \{x \mid d(x, x_0) \leq r\}$ 是 X 中一个闭球. 若 T 在 Y 上满足(1)、并且假设

$$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r \quad (7)$$

成立. 则迭代序列(2) 收敛于 T 在 Y 中的唯一不动点 $x \in Y$.

证明 我们只须证明 T 将 Y 映射在 Y 中, 由假设对于任意 $y_1, y_2 \in Y$, 有,

$$d(Ty_1, Ty_2) \leq \alpha d(y_1, y_2) \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

再利用 $d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r$. 对于每个 $y \in Y$,

$$\begin{aligned} d(x_0, Ty) &\leq d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, Ty) \\ &< (1-\alpha)r + \alpha d(x_0, y) \end{aligned}$$

$$\leq (1-\alpha)r + \alpha r$$

$$= r$$

因此, $Ty \in Y$. 即证得 T 将 Y 映到自身中, 由 X 是完备的, Y 是闭的. 从而 Y 是完备的. 利用定理 5.1-3 此定理得证.

5.1-6 引理(不动点). 设 $T: X \rightarrow X$ 为完备度量空间 $X = (X, d)$ 上的一连续映射. 若存在一个自然数 m , 使得 T^m 是 X 上一个压缩映射, 则 T 在 X 中有唯一的不动点.

证明: 令 $B = T^m$. 由假设 B 是 X 上一压缩映射. 根据定理 5.1-3, B 在 X 上有唯一的不动点 x^* , 即, $Bx^* = x^*$. 下面我们证明 x^* 也是 T 的不动点. 事实上, 由于 $BT = T^{m+1} = TB$, 所以, $B(Tx^*) = T(Bx^*) = Tx^*$. 于是 Tx^* 亦是 B 的一个不动点. 因为 B 的不动点是唯一的. 从而有 $Tx^* = x^*$. 故 x^* 亦是 T 的不动点.

最后我们证明 x^* 是 T 的唯一不动点. 假设 x' 是 T 的另一个不动点. 则 $Bx' = T^m x' = T^{m-1} x' = \cdots = Tx' = x'$. 由于 B 的不动点是唯一的, 因此, $x' = x^*$.

习 题 5.1

1. 设 $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. 定义映射 $T: X \rightarrow X$ 为 $Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. 证明 T 为压缩映射并求出最小的 α .
2. 举例说明定理 5.1-3 中的完备性是必要的.
3. 在 Banach 不动点定理 5.1-3 中, 当 $x \neq y$ 时, 条例(1) 不能用 $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ 代替. 考察下例.
 $X = \{x \mid 1 \leq x < +\infty\}$ 并取实数轴上的通常度量, 定义, 映射 $T: X \rightarrow X$ 为 $x \mapsto x + \frac{1}{x}$. 证明当 $x \neq y$ 时, $|Tx - Ty| < |x - y|$. 但映射没

有不动点.

4. 设 $X = (X, d)$ 为一度量空间. 当 $x \neq y$ 时 $T: X \rightarrow X$ 满足 $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ 且 T 有一不动点, 证明不动点是唯一的.

5. 若 T 为一压缩映射, 证明 $T^n (n \in N)$ 亦为一压缩映射. 若对于 $n > 1$, T^n 为一压缩映射, 证明 T 不一定为一压缩映射.

6. 证明当 $0 < \alpha < 1$ 时由 (5) 给定的误差界形成一严格单调减序列. 证明 (6) 至少与 (5) 一样的精确.

7. 利用 Banach 不动点定理 5.1-3 证明: 在分析中, 迭代 $x_n = g(x_{n-1})$ 其为收敛的一个常用的充分条件是 $g(x)$ 有连续导数且,

$$|g'(x)| \leq \alpha < 1$$

8. 对一给定的方程 $f(x) = 0$, 为求其逼近的数值解, 可将该方程变换为 $x = g(x)$ 的形式, 选一初始值 x_0 并计算

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

假设 g 在一区间 $J = [x_0 - r, x_0 + r]$ 上有连续导数且在 J 上满足

$$|g'(x)| \leq \alpha < 1 \quad \text{及}$$

$$|g(x_0) - x_0| < (1 - \alpha)r.$$

证明: $x = g(x)$ 在 J 上有唯一解, 且迭代序列 (x_m) 收敛于此解. 其误差估计分别为

$$|x - x_m| < \alpha^m r, \quad |x - x_m| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_m - x_{m-1}|$$

9. 若 $f(x)$ 在区间 $J = [a, b]$ 上具有连续导数, 且 $f(a) < 0, f(b) > 0, 0 < k_1 \leq f'(x) \leq k_2 (x \in J)$, 试选一适当的常数 λ , 利用函数 $g(x) = x - \lambda f(x)$ 建立一迭代过程, 以求方程 $f(x) = 0$ 的解.

10. 为解方程 $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$. 考察下列两种迭代.

$$(a) \quad x_n = g(x_{n-1}) = \frac{1}{1 + x_{n-1}^2}.$$

取 $x_0 = 1$ 迭代三步, $|g'(x)| < 1$ 吗?

(b) 若将 $f(x) = 0$ 写成 $x = 1 - x^3$ 的形式, 能适合迭代吗? 试用 x_0

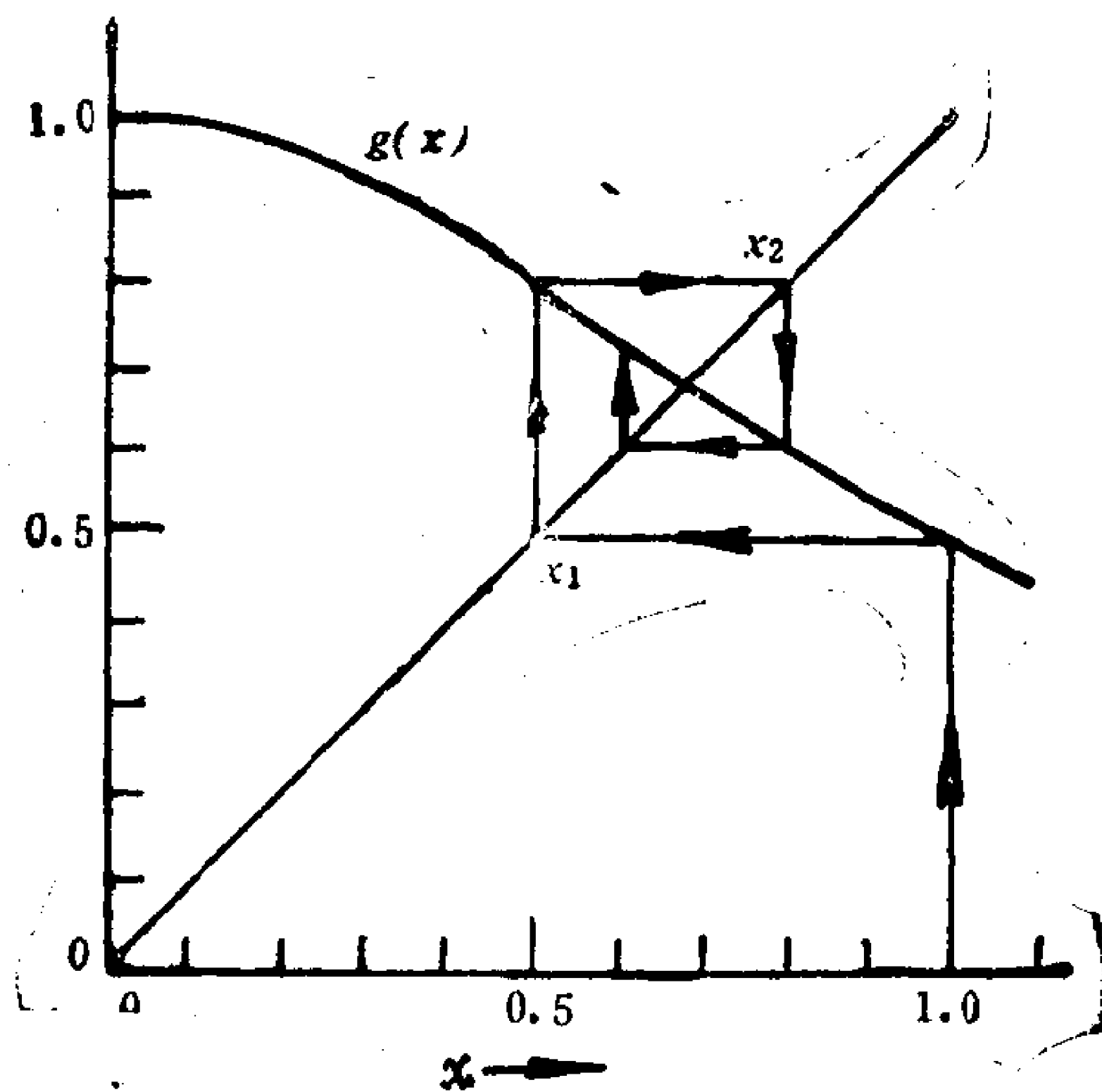


图32 习题10(a)中的迭代线路

= 1、 $x_0 = 0.5$ 进行迭代运算并观察其结果。

11. 对于习题10中的方程，证明可用另一个迭代过程

$$x_n = \sqrt{\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}^3}}$$

求解.取 $x_0 = 1$ 时确定 x_1, x_2, x_3 .这个迭代快速收敛的理由是什么?(实根为0.682328)

12. (Newton法) 设 $f(x)$ 为实值函数，且在区间 (a, b) 上具有二阶连续导数， \hat{x} 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的单零点.证明由下列Newton法定义的迭代

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

在 \hat{x} 的某邻域内为一压缩映射(因而对于该邻域内的任意一点 x_0 ，迭

代序列均收敛于 \hat{x})

13. (平方根) 对于一给定的正数 C , 证明计算其平方根的迭代过程为

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{C}{x_n} \right) \quad \text{并指出条件 (其中 } n = 0, 1, 2$$

⋯). 从 $x_0 = 1$ 开始, 对 $\sqrt{2}$ 计算逼近值 x_1, x_2, x_3, x_4 .

14. (Lipschitz条件) 映射 $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 称为在 $[a, b]$ 上满足Lipschitz条件是指存在一常数 K , 使得对于所有的 $x, y \in [a, b]$,

$$|Tx - Ty| \leq K|x - y|$$

成立.

(1). T 是否为一压缩映射?

(2). 若 T 有连续导数, 证明 T 满足Lipschitz条件.

§5.2 Banach不动点定理的应用

本节介绍Banach不动点定理在线性代数方程上、微分方程上、积分方程上的应用.

首先考虑Banach不动点定理在解线性代数方程组上的应用. 我们利用定理中的迭代法解线性代数方程组, 并给出了收敛的充分条件和误差界.

为了应用Banach不动点定理, 我们需要一完备的度量空间和在其上的一压缩映射.

我们取所有 n 个实数的有序组所成之集为 X . 对于 X 中的任意元素 x, y, z , 其坐标表示为: $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n), z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. 定义 X 上的度量为,

$$d(x, z) = \max |\xi_j - \zeta_j| \quad (1)$$

则 $X = (X, d)$ 为一完备的度量空间 (参看§1.5习题2)

定义映射 $T: X \rightarrow X$ 为

$$y = Tx = Cx + b, \quad (2)$$

其中, $C = (c_{ik})$ 是确定的 n 阶方阵. $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ 是 X 中一固定向量.

下面我们找出 T 为压缩映射的一个充分条件. 为此将 (2) 写成分量形式

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} \xi_k + \beta_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

令 $W = (W_1, \dots, W_n) = Tz$, 由 (1) 和 (2) 得,

$$d(y, W) = d(Tx, Tz) = \max_j |\eta_j - W_j|$$

$$= \max_j \left| \sum_{k=1}^n c_{jk} (\xi_k - \zeta_k) \right|$$

$$\leq \max_k |\xi_k - \zeta_k| \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}|$$

$$= \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}| d(x, z)$$

设

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}| \quad (3)$$

有 $d(Tx, Tz) \leq \alpha d(x, z)$.

因此, 当 $\alpha < 1$ 时, T 为一压缩映射. 由 Banach 不动点定理 5.1-3 得出下面定理.

5.2-1 定理 (线性代数方程) 若含有 n 个未知量 ξ_1, \dots, ξ_n , 且有 n 个线性方程的方程组

$$x = Cx + b \quad (\text{矩阵 } C = (c_{jk}) \text{ 和向量 } b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ 为已知}) \quad (4)$$

知)

满足

$$\sum_{k=1}^n |c_{jk}| < 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

则方程组有唯一解 x 。此解 x 可作为迭代序列 $(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, \dots)$ 的极限得出。其中 $x^{(0)}$ 为 X 中任意元素。且迭代过程为

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

误差界为

$$\begin{aligned} d(x^{(m)}, x) &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \\ &\leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}) \end{aligned} \quad (7)$$

条件(5)是迭代收敛的充分条件,称为行和准则。它是在度量(1)下得出的。若用其他的度量代替(1),就会得到其他的条件。

n 个未知量 n 个线性方程的方程组通常写成形式

$$Ax = c \quad (8)$$

这里 A 为一 n 阶方阵, c 是一固定的 n 维列向量。我们知道当 $\det A \neq 0$ 时,方程组(8)有唯一解。为了用迭代法解线性方程组(8),今将 A 写成 $A = B - G$ 的形式,其中 B 为一适当的满秩矩阵。于是(8)成为

$$Bx = Gx + c$$

或 $x = B^{-1}Gx + B^{-1}c$

(6) 中的 C 与 b 此时分别为

$$C = B^{-1}G, \quad b = B^{-1}c \quad (9)$$

由于 B 和 G 的不同, 可得不同的具体迭代法, 常见的有下面两种.

5.2-2 Jacobi 迭代法. 假设 A 的主对角线上元素 $a_{jj} \neq 0$ $j = 1, 2, \dots, n$. (若有 $a_{jj} = 0$, 因为 A 是满秩的, 可经初等行变换, 得到一个非零对角元的满秩矩阵). 令 (8) 中的 $A = D + (A - D)$, 这里 $D = \text{diag}(a_{jj})$ 为对角阵. 于是 (8) 变成

$$Dx = -(A - D)x + c$$

或 $x = -D^{-1}(A - D)x + D^{-1}c$

记 $c = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, 得 Jacobi 迭代过程为

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(r_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{jk} \xi_k^{(m)} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

或 $x^{(m+1)} = -D^{-1}(A - D)x^{(m)} + D^{-1}c$

将条件 (5) 用于 $-D^{-1}(A - D)$ 得行知准则为

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left| \frac{a_{jk}}{a_{jj}} \right| < 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

或

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| < |a_{jj}| \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

若 A 满足 (12), A 称为严格对角优势. 此时 Jacobi 迭代序列

收敛.

5.2-3 Gauss-Seidel迭代法. 将(8)中的 A 写成 $A = -L + D - V$. 这里的 D 同于Jacobi迭代中的 D , L 和 V 分别是主对角线上元素全部为零的下三角和上三角矩阵, 于是(8)成为,

$$(D - L)x = Vx + c$$

即 $x = (D - L)^{-1}Vx + (D - L)^{-1}c$

因此, Gauss-Seidel迭代过程为:

$$x^{(m+1)} = (D - L)^{-1}Vx^{(m)} + (D - L)^{-1}c$$

或 $x^{(m+1)} = D^{-1}[c + Lx^{(m+1)} + Vx^{(m)}]$

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(r_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk} \xi_k^{(m)} \right)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n, a_{jj} \neq 0) \quad (13)$$

将条件(5)用于 $C = (D - L)^{-1}V$ 可充分保证Gauss-Seidel迭代收敛. 但由于这样处理 C 较麻烦, 我们可以找出另外一些更简单的充分条件, 可以证明(12)就是这样的一个充分条件.

现在我们考虑 Banach不动点定理在微分方程上的应用. 设微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (14)$$

其中 $f(t, x)$ 在矩形域 $R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ 上连续, 因而存在常数 C , 使得任意 $(t, x) \in R$,

$$|f(t, x)| \leq C \quad (15)$$

并且 $f(t, x)$ 关于 x 满足李普希兹条件

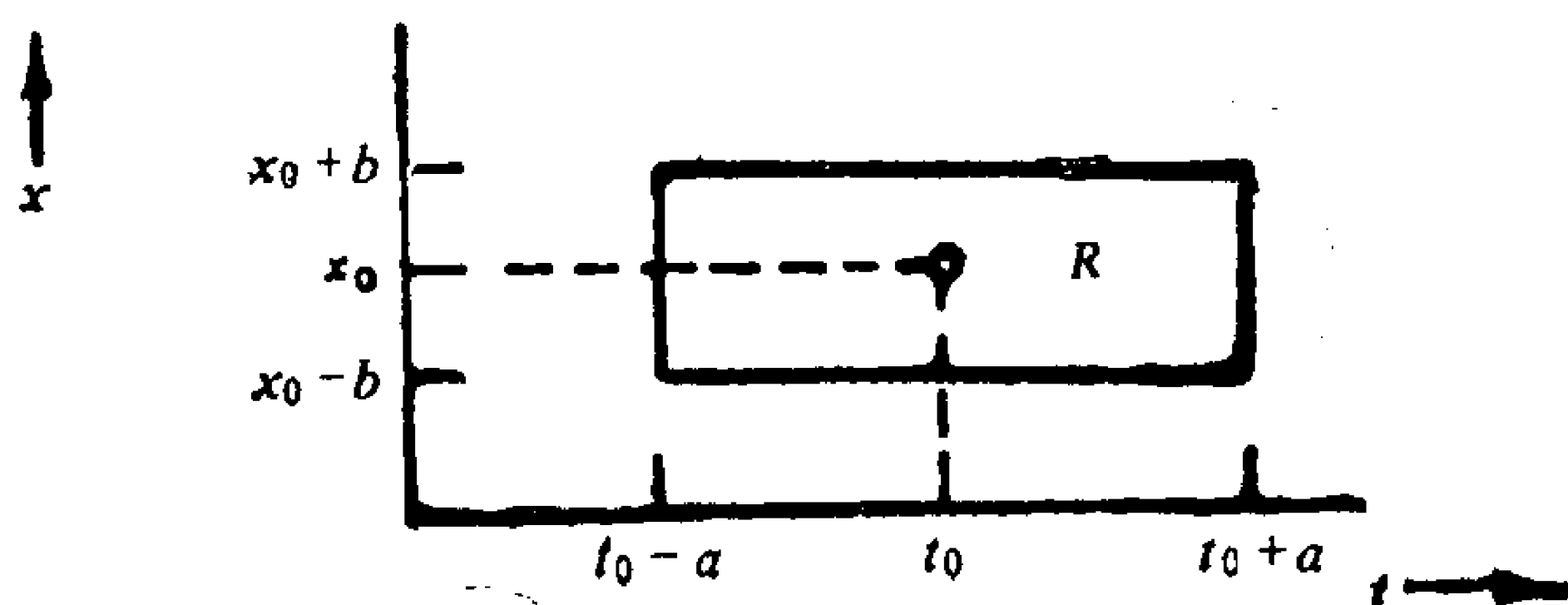


图33 矩形域 R

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad (16)$$

这里 K 是常数.

5.2-4 定理 (Picard 定理). 满足上述条件的具有始值条件的微分方程 (14) 在区间 $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ 上有唯一解.

其中, $\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}$.

证明 设 $C(J)$ 为区间 $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ 上所有实值连续函数所成的度量空间, 其度量定义为

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

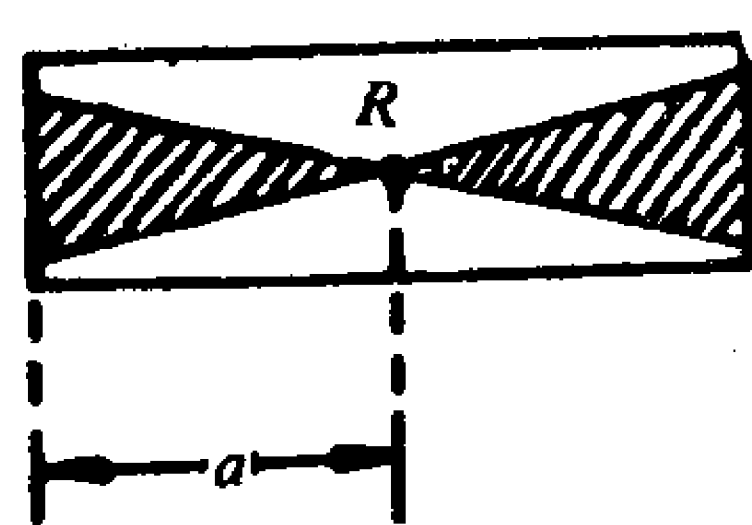
从 1.5-5 知 $C(J)$ 是完备的.

设 \tilde{C} 为 $C(J)$ 中满足

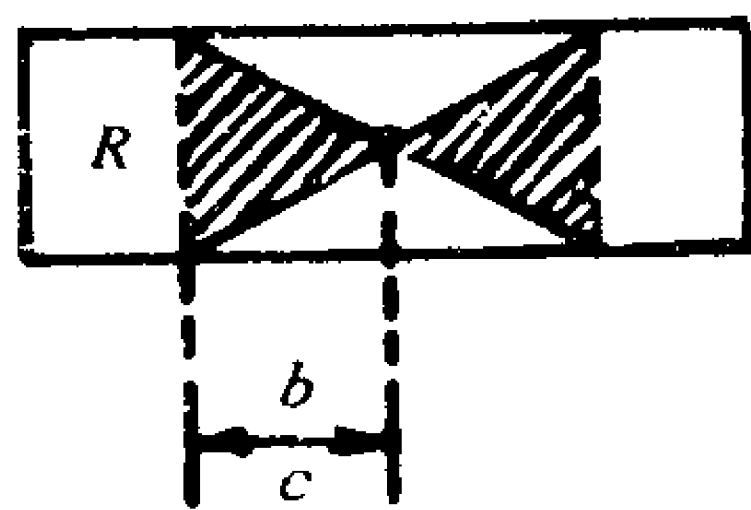
$$|x(t) - x_0| \leq c\beta \quad (17)$$

的所有函数组成的 $C(J)$ 的子空间. 不难看出 \tilde{C} 是 $C(J)$ 的闭子空间. 由定理 1.4-8, \tilde{C} 为完备的.

(14) 可写成积分形式,



(A) $a < \frac{b}{c}$



(B) $a > \frac{b}{c}$

图34 (15)式的几何解释
解曲线位于阴影部分

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[\tau, x(\tau)] d\tau$$

定义映射 $T: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ 为

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[\tau, x(\tau)] d\tau \quad (18)$$

事实上, 对于每个 $x(t) \in \tilde{C}$, 由于 $f(t, x)$ 在 R 上连续, 因此 $Tx(t)$ 在 J 上连续. $Tx(t_0) = x_0$ 且有

$$\begin{aligned} |Tx(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f[\tau, x(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f[\tau, x(\tau)]| d\tau \\ &\leq c \int_{t_0}^t d\tau = c(l - t_0) \leq c\beta. \end{aligned}$$

因而, T 是 \tilde{C} 到其自身的映射.

下面证明 T 在 \tilde{C} 上为压缩映射. 对于任意 $x_1(t), x_2(t) \in \tilde{C}$, 由 Lipschitz 条件 (16)

$$\begin{aligned}
|Tx_1(t) - Tx_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))] d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))| d\tau \\
&\leq K \int_{t_0}^t |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \\
&\leq K(t - t_0) \max_{t \in J} |x_1(t) - x_2(t)| \\
&\leq K\beta d(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

因此, $d(Tx_1, Tx_2) \leq K\beta d(x_1, x_2)$

令 $\alpha = K\beta$, 则由题设, $\alpha < 1$, 故 T 为 \tilde{C} 上一压缩映射. 由定理 5.1-3 得出 T 有唯一不动点 $x \in \tilde{C}$. 即此 x 是方程 (14) 在 J 上的唯一连续函数解, 并且 x 为 Picard 迭代

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

序列 (x_0, x_1, \dots) 的极限.

最后我们应用 Banach 不动点定理解决两类积分方程解的存在性和唯一性.

下述形式的积分方程

$$x(t) - \mu \int_a^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = V(t) \quad (20)$$

称为第二类的 Fredholm 方程.

5.2-5 定理 (Fredholm 积分方程). 设 $V(t)$ 在区间

$[a, b]$ 上连续. $K(t, \tau)$ 在正方形域 $G = [a, b] \times [a, b]$ 上连续, 因而存在常数 $C > 0$, 使得对于所有 $(t, \tau) \in G$, $|K(t, \tau)|$

$\leq C$. 则当 $|\mu| < \frac{1}{C(b-a)}$ 时, 积分方程

$$x(t) = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (21)$$

有唯一连续解 $x(t)$, 并且函数 $x(t)$ 是迭代序列 (x_0, x_1, \dots) 的极限. 其迭代过程为

$$x_{n+1}(t) = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) x_n(\tau) d\tau. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

证明 在 $C[a, b]$ 上定义映射 T 为

$$Tx(t) = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (23)$$

由于 $V(t)$ 、 $K(t, \tau)$ 分别在 $[a, b]$ 和 G 上连续, 则 $Tx(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 即 T 是从 $C[a, b]$ 到其自身的映射. 下面证明 T 为 $C[a, b]$ 上的压缩映射. 对于任意 $x(t), y(t) \in C[a, b]$, 有

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in [a, b]} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= |\mu| \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b K(t, \tau) [x(\tau) - y(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq |\mu| \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, \tau)| |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \\ &\leq |\mu| C(b-a) \max_{\tau \in [a, b]} |x(\tau) - y(\tau)| \\ &= |\mu| C(b-a) d(x, y) \end{aligned}$$

令 $\alpha = |\mu| (b-a)C$. 由题设 $|\mu| < \frac{1}{C(b-a)}$, 因此 $\alpha < 1$, T 是

$C[a, b]$ 上的压缩映射. 由 Banach 不动点定理 5.1-3 知, T 在 $C[a, b]$ 上有唯一不动点 $x(t)$. 并且 $x(t)$ 可作为迭代序列 (x_0, x_1, \dots) 的极限得出, 其迭代过程为

$$x_{n+1}(t) = V(t) + \mu \int_a^t K(t, \tau) x_n(\tau) d\tau$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

现在我们考虑 Volterra 积分方程

$$x(t) - \mu \int_a^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = V(t) \quad (24)$$

5.2-6 定理 (Volterra 积分方程). 设 $V(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. $K(t, \tau)$ 在三角形域 $R = \{(t, \tau) | a \leq t \leq b, a \leq \tau \leq t\}$ 上连续, 则对于每个常数 μ , 积分方程 (24) 在 $[a, b]$ 上有唯一的连续解 $x(t)$.

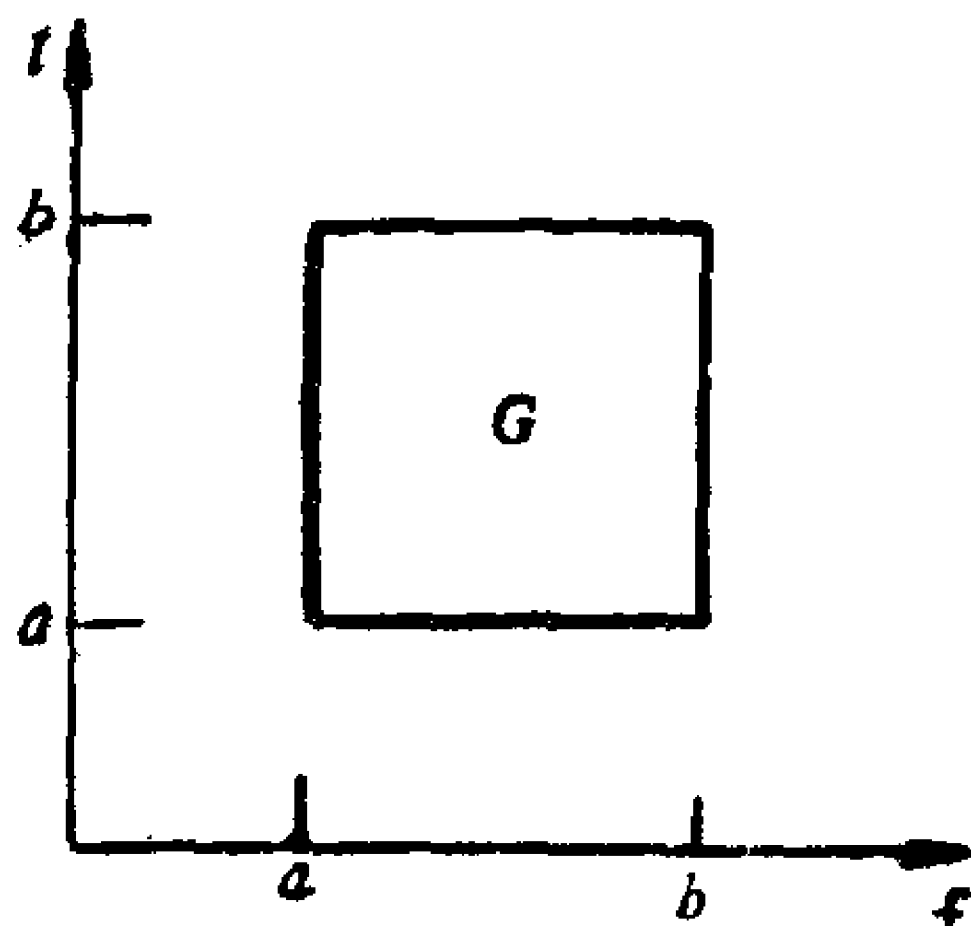


图35 定理5.2-5中 $K(t, \tau)$ 在 $a > 0, b > 0$ 时的定义域

证明 定义映射 $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 为

$$Tx(t) = V(t) + \mu \int_a^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (25)$$

由于 $K(t, \tau)$ 在有界闭域 R 上连续, 则 $K(t, \tau)$ 在 R 上为有界函数, 即存在常数 $c > 0$, 使得

$$|K(t, \tau)| \leq c \quad \text{对所有 } (t, \tau) \in R.$$

对于任意 $x(t), y(t) \in C[a, b]$ 我们可得到,

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau) [x(\tau) - y(\tau)] d\tau \right| \\
&\leq |\mu| \int_a^t |k(t, \tau)| |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \\
&\leq |\mu| c(t-a) \max_{\tau \in [a, b]} |x(\tau) - y(\tau)| \\
&= |\mu| c(t-a) d(x, y)
\end{aligned} \tag{26}$$

下面我们用数学归纳法证明:

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x, y) \tag{27}$$

对 $m=1$ 时, (27) 变为 (26). 已证成立. 假设对 m (27) 式成立. 则对 $m+1$ 有

$$\begin{aligned}
&|T^{m+1} x(t) - T^{m+1} y(t)| \\
&= |\mu| \left| \int_a^t K(t, \tau) [T^m x(\tau) - T^m y(\tau)] d\tau \right| \\
&\leq |\mu| c \int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(\tau-a)^m}{m!} d\tau \cdot d(x, y) \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y)
\end{aligned}$$

因此对任意自然数 m , (27) 式永远成立.

令 $\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}$, 则

$$d(T^m x, T^m y) \leq a_m$$

$d(x, y)$.

对于任意给定的 μ , 只要 m 充分大就有 $a_m < 1$, 因而对应的映射 T^m 在 $C[a, b]$ 上为压缩映射, 根据引理5.1-6, T 在 $C[a, b]$ 上有唯一的不动点 $x(t)$. 即 $x(t)$ 是积分方程(24)在 $[a, b]$ 上的唯一连续解.

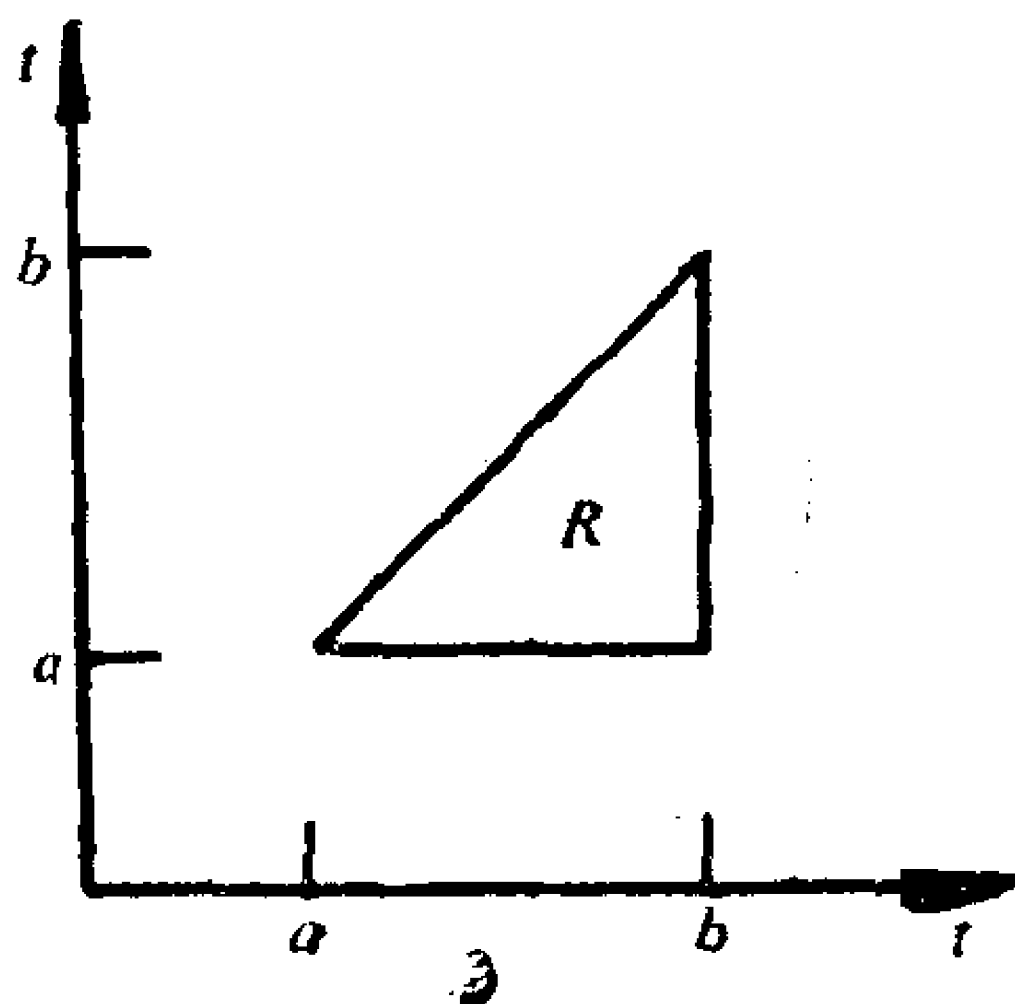


图36 定理5.2-6中 $a > 0$, $b > 0$ 时三角形域 R

习 题 5.2

1. 设线性代数方程组为

$$\begin{cases} 5\xi_1 - \xi_2 = 7 \\ -3\xi_1 + 10\xi_2 = 24 \end{cases}$$

(a) 求出准确解;

(b) 矩阵 C 满足条件(5)吗? 从 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 开始用Jacobi迭代计算 $x^{(1)}$ 、 $x^{(2)}$, 并对 $x^{(2)}$ 求出误差界, 将此误差界与实际误差进行比较.

(c) 应用Gauss-Seidel迭代完成(b)中的运算.

2. (Gershgorin定理) 若数 λ 是一方阵 $C = (c_{jk})$ 的特征值, 则对某一 $j (1 \leq j \leq n)$ 有,

$$|c_{jj} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |c_{jk}|$$

(a) 证明(4)式可以写成 $Kx = b$ 的形式, 其中 $K = I - C$, 并且Gershgorin定理和(5)式一起蕴涵 K 不可能有特征值0 (因而 K 为满秩, 即, $\det K \neq 0$, 于是 $Kx = b$ 有唯一解)

(b) 证明从(5)和Gershgorin定理可推出(6)式中 C 的谱半径小于1 (可证明这是迭代收敛的充要条件. C 的谱半径是 $\max |\lambda_j|$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 C 的特征值.)

3. (列和准则) 若用度量

$$d_1(x, z) = \sum_{j=1}^n |\xi_j - \zeta_j|$$

代替度量(1). 证明

$$\sum_{j=1}^n |C_{jk}| < 1 \quad (K = 1, 2, \dots, n)$$

是迭代(6)收敛的充分条件.

4. (平方和准则) 若用度量

$$d_2(x, z) = \left[\sum_{j=1}^n (\xi_j - \zeta_j)^2 \right]^{1/2}$$

代替度量(1), 证明迭代(6)收敛的充分条件是

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}^2 < 1$$

5. 若 $f(t, x)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在矩形域 R 上连续. 证明 f 在 R 上关于

第二个自变量 x 满足Lipschitz条件. ($R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$)

6. 对于微分方程

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

应用picard迭代(19), 验证 x_3 与准确解中所含 t, t^2, \dots, t^5 的项完全相同.

7. 选 $x_0 = v$, 用迭代法解下列积分方程.

$$x(t) - \mu \int_0^1 e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = v(t) \quad (|\mu| < 1)$$

8. (非线性积分方程) 设 $v(t)$ 和 $K(t, \tau, x(\tau))$ 分别在 (a, b) 和 $G = (a, b) \times (a, b) \times R$ 上连续. 且 K 在 G 上满足下述形式的 Lipschitz 条件:

$$|K(t, \tau, x_1(\tau)) - K(t, \tau, x_2(\tau))| \leq l |x_1 - x_2|$$

证明: 非线性积分方程

$$x(t) - \mu \int_a^b K(t, \tau, x(\tau)) d\tau = v(t)$$

对任一满足 $|\mu| < 1/l(b-a)$ 的 μ 有唯一解 $x(t)$.

9. 积分方程同样可从微分方程引出.

(a). 将始值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

写成积分方程的形式, 并说明是哪一类方程.

(b). 证明二阶常微分方程的始值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

可转换成一 Volterra 积分方程.

10. (Neumann 级数) 定义算子 S 为

$$Sx(t) = \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

令 $z_n = x_n - x_{n-1}$, 证明 (22) 蕴涵

$$z_{n+1} = \mu S z_n$$

选 $x_0 = v$, 证明 (22) 产生一 Neumann 级数

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = v + \mu S v + \mu^2 S^2 v + \mu^3 S^3 v + \dots$$

11. 解下列积分方程

$$x(t) - \mu \int_0^1 x(\tau) d\tau = 1$$

(a) 用Neumann级数解 (参看习题10)

(b) 用直接法解.

§5.3 赋范空间中的逼近

逼近理论是一个有着多方面应用的非常广泛的领域. 在这几节中, 我们将介绍赋范空间和Hilbert空间中逼近理论的基本概况.

这一节我们研究赋范空间中的逼近理论. 逼近理论要研究的问题是某类函数空间中的函数如何用其子空间中的函数来逼近.

一般地讲, 由集 Y 中元素逼近 X 中元素, 我们要考虑逼近的存在性、唯一性和在某一准则下的“最佳逼近”的结构等问题.

5.3-1 定义(最佳逼近). 设 Y 是赋范空间 $X = (X, \|\cdot\|)$ 的一固定子空间, 对于任一给定的 $x \in X$, x 到 Y 的距离为

$$\delta = \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \quad (1)$$

若存在 $y_0 \in Y$, 使得

$$\|x - y_0\| = \delta \quad (2)$$

则称 y_0 是 Y 中对 x 的最佳逼近.

从定义中可看出, 最佳逼近 y_0 是 Y 中与给定的 x 有最小距离的元素. 这样的 y_0 可能存在也可能不存在. 但对于 Y 是有穷维的情况, 最佳逼近 y_0 一定存在.

5.3-2 定理 (最佳逼近存在定理). 若 Y 为赋范空间

$X = (X, \|\cdot\|)$ 的一有穷维子空间, 则对于每一个 $x \in X$, 必存在 Y 中对 x 的最佳逼近.

证明 对于给定的 $x \in X$, 令,

$$\tilde{B} = \{y \in Y \mid \|y\| \leq 2\|x\|\}$$

则 $\theta \in \tilde{B}$. 因而对于 x 到 \tilde{B} 的距离有,

$$\delta(x, \tilde{B}) = \inf_{\tilde{y} \in \tilde{B}} \|x - \tilde{y}\| \leq \|x - \theta\| = \|x\|$$

若 $y \in Y, y \notin \tilde{B}$, 则 $\|y\| > 2\|x\|$, 且

$$\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\| > \|x\| \geq \delta(x, \tilde{B}) \quad (3)$$

显然对 $y \in \tilde{B}$ 有, $\|x - y\| \geq \delta(x, \tilde{B})$. 因此, 对于任意 $y \in Y$ 恒有,

$$\|x - y\| \geq \delta(x, \tilde{B})$$

由下确界的定义得,

$$\delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq \delta(x, \tilde{B}) \quad (4)$$

但 $\tilde{B} \subset Y$, 于是

$$\delta(x, Y) \leq \delta(x, \tilde{B}) \quad (5)$$

由(4)和(5)得, $\delta(x, Y) = \delta(x, \tilde{B})$. 并且由于(3)中的

“ $>$ ”若最佳逼近存在的话, 必在 \tilde{B} 中. 因为 Y 是有穷维的.

\tilde{B} 是 Y 的有界闭子集, 由定理 2.5-3, \tilde{B} 是紧的. 在 \tilde{B} 上定义

映射 $f: \tilde{B} \rightarrow R$ 为

$$f(y) = \|x - y\|.$$

由于范数的连续性, 则 f 是连续的. 根据2.5-7, f 在 \tilde{B} 上取得最小值. 即存在 $y_0 \in \tilde{B}$, 使得

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in \tilde{B}} \|x - y\| = \delta(x, Y).$$

5.3-3 空间 $C[a, b]$, 对于固定的 n , 令,

$$Y = \text{Span}\{x_0, \dots, x_n\}, x_i(t) = t^i$$

则 Y 是 $C[a, b]$ 的 $n+1$ 维的子空间, 由存在定理5.3-2知, 对于给定的 $[a, b]$ 上的一连续函数 $x(t)$, 必存在一个次数最多为 n 的多项式 $P_n(t)$, 使得对于每一个 $y \in Y$, 有,

$$\max_{t \in [a, b]} |x(t) - P_n(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

5.3-4 多项式. 在存在定理5.3-2中, Y 为有穷维的条件是必要的. 事实上, 令 Y 为 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上次数任意的所有多项式组成的集. 则 Y 是 $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 的一个子空间, 且 $\dim Y = \infty$.

对于 $x(t) = \frac{1}{1-t} \in C\left[0, \frac{1}{2}\right]$, 存在 $y_n = 1 + t + \dots + t^n \in Y$.

使得 $\|x - y_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 即 $\delta(x, Y) = 0$. 显然, 对于任意 $y \in Y$, $\|x - y\| \neq 0$. 故最佳逼近不存在.

现在我们来考虑最佳逼近的唯一性问题. 从观察两个例子开始.

【例1】 若 $X = R^3$, Y 为 $\xi_1\xi_2$ 平面($\xi_3 = 0$). 则对给定点 $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$, Y 中的最佳逼近是 $y_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, 0)$, 且 x_0 到 Y 的距离为 $\delta = |\xi_3^0|$. 这里的最佳逼近是唯一的.

【例2】 设 $X = (X, \|\cdot\|_1)$ 为有序实数对的向量空间 X

$= \{(\xi_1, \xi_2)\}$, 其范数定义为 (参看图20)

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| \quad (6)$$

令 $Y = \{y = (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 = \xi_2\}$. 取 $x = (1, -1)$

则对所有的 $y \in Y$, $y = (\eta, \eta)$ 有

$$\|x - y\|_1 = |1 - \eta| + |-1 - \eta| \geq 2$$

因此 x 到 Y 的距离 $\delta(x, Y) = 2$. 并且凡是满足 $|\eta| \leq 1$ 的 $y = (\eta, \eta)$ 均为 Y 中对 x 的最佳逼近.

该例表明即使这样简单的空间其最佳逼近也不是唯一的.

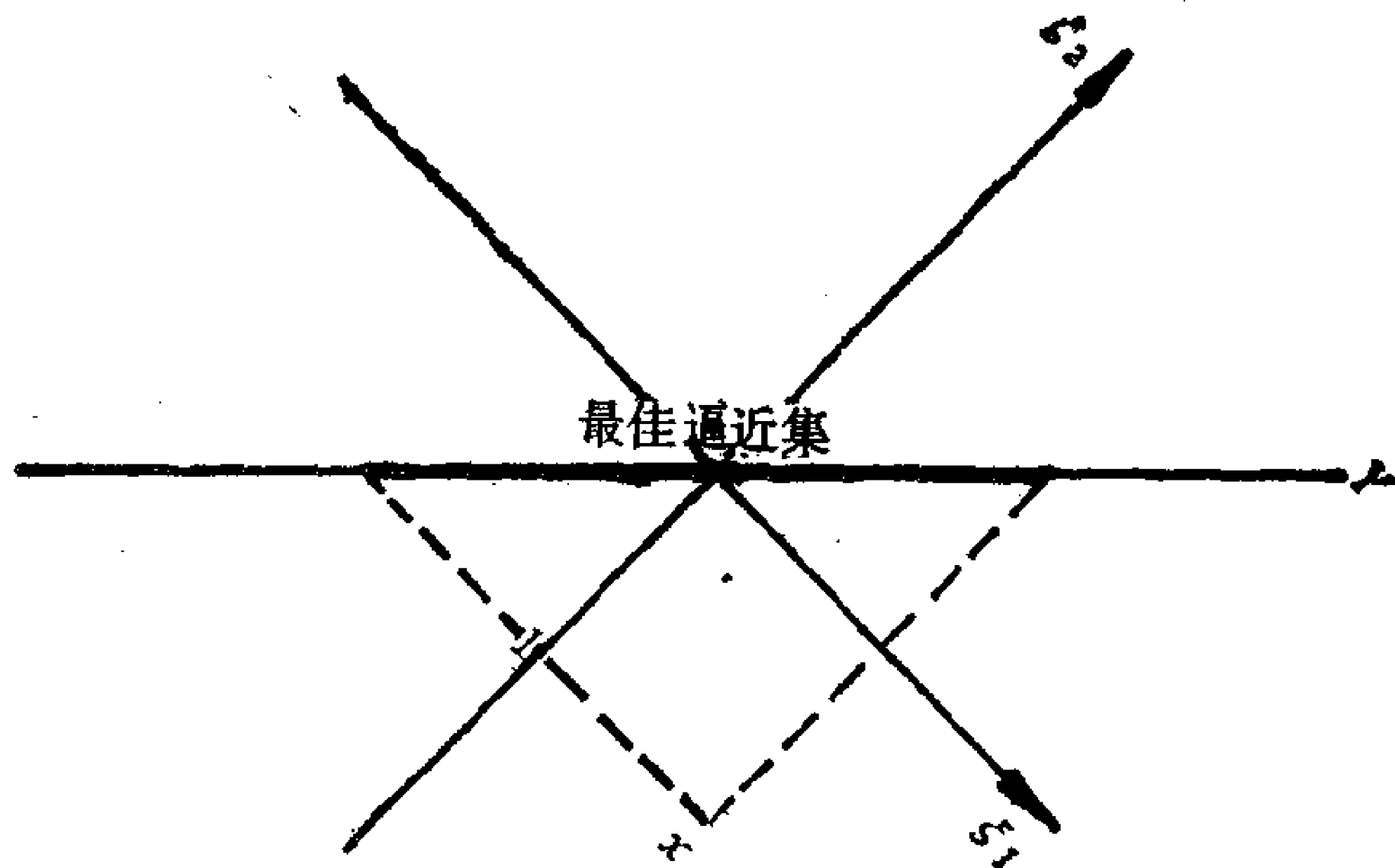


图37 例2中在范数(6)下的最佳逼近集

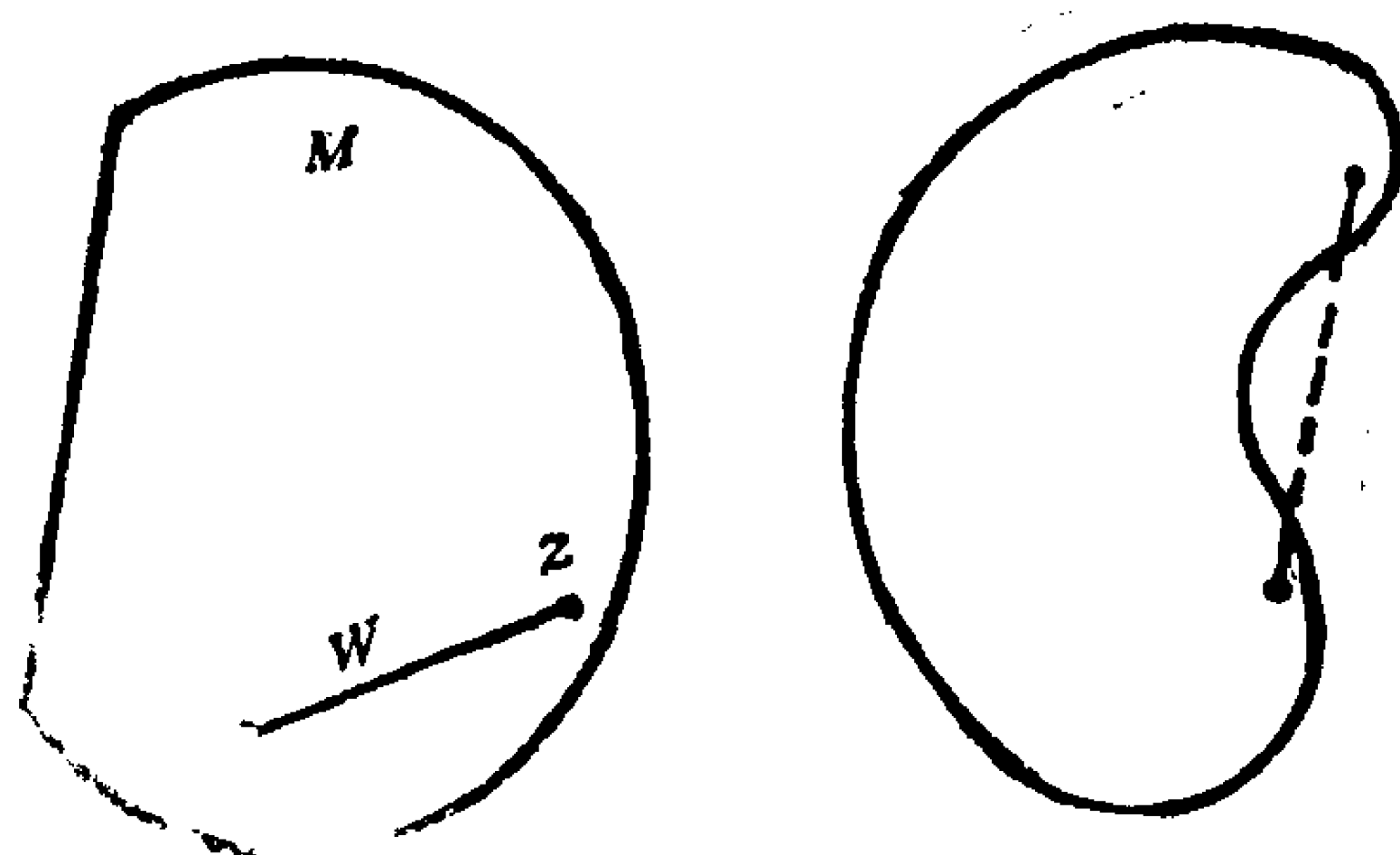
从例子中我们观察到最佳逼近集是凸的. 不仅如此, 凸性与最佳逼近的唯一性也是有联系的.

首先让我们回顾§ 3.2中凸集的定义. 向量空间 X 的子

集 M 称为凸的是指：对于任意 $y, z \in M$ ，闭线段

$$W = \{v = \alpha y + (1 - \alpha)z\} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

为 M 的子集， y 与 z 称为 W 的边界点， W 的其他点称为 W 的内点（参看图38）



凸集

非凸集

图38 凸集与非凸集

5.3-5 引理（凸性）. 在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中，子空间 Y 中对给定点 $x \in X$ 的最佳逼近集 M 是凸的.

证明 若 M 为空集或单点集，显然 M 是凸的. 现设 M 的元素多于一点，令 $\delta = \delta(x, Y)$. 则对 $y, z \in M$ 有，

$$\|x - y\| = \|x - z\| = \delta \quad (7)$$

我们证明(7) 蕴涵

$$W = \alpha y + (1 - \alpha)z \in M. \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (8)$$

事实上，由于 $w \in Y$ ， $\|x - w\| \geq \delta$ ，另一方面，

$$\begin{aligned} \|x - w\| &= \|\alpha(x - y) + (1 - \alpha)(x - z)\| \\ &\leq \alpha \|x - y\| + (1 - \alpha) \|x - z\| \\ &= \alpha \delta + (1 - \alpha) \delta = \delta \end{aligned}$$

因此, $\|x - w\| = \delta$. 即 $w \in M$. 因为 $y, z \in M$ 是任意的. 从而证明了 M 为凸集.

如果同时存在几个 Y 对 x 的最佳逼近, 那么由引理可知 Y 与闭球

$$\tilde{B}(x, \delta) = \{v \mid \|v - x\| \leq \delta\}$$

必有一公共线段 W . 显然 W 在闭球的界面 $S(x, \delta)$ 上, 而且, 对于每一个 $w \in W$, 对应着唯一的 $v = \delta^{-1}(w - x)$, 其范数为 $\|v\| = \|w - x\| / \delta = 1$, 这意味着由 (8) 给出的每一个最佳逼近在单位球面 $\{x \mid \|x\| = 1\}$ 上对应唯一的 v .

由此可见, 为了得到最佳逼近唯一性的条件, 必须排除使单位球面能包含直线段的那种范数.

5.3-6 定义 (严格凸性). 严格凸性的范数是指这样一种范数: 对于所有范数为 1 的 x, y , 且 $x \neq y$, 有

$$\|x + y\| < 2$$

具有这样范数的赋范空间称为严格凸的赋范空间.

5.3-7 引理 (严格凸性)

(a) Hilbert 空间是严格凸的.

(b) 空间 $C[a, b]$ 是非严格凸的.

证明 (a). 对于范数为 1 的所有 x, y , 且 $x \neq y$. 有 $\|x - y\| = \alpha > 0$, 由平行四边形等式得.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= -\|x - y\|^2 + \alpha(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &= -\alpha^2 + 2(1 + 1) < 4 \end{aligned}$$

因此, $\|x + y\| < 2$.

(b) 在 $C[a, b]$ 中取 $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \frac{t-a}{b-a}$ 则, $\|x_1\|$

$= \|x_2\| = 1, x_1 \neq x_2$, 但是,

$$\|x_1 + x_2\| = \max_{t \in [a, b]} \left| 1 + \frac{t-a}{b-a} \right| = 2.$$

因此, $C[a, b]$ 是非严格凸的.

5.3-8 定理 (最佳逼近的唯一性). 在严格凸的赋范空间 X 中, 已知子空间 Y . 则 Y 中对每个给定 $x \in X$ 的最佳逼近至多有一个.

证明. 用反证法证. 若 Y 中对 x 有两个最佳逼近 y 和 z , 且 $y \neq z$. 则,

$$0 < \|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\| = 2\delta$$

于是 $\delta > 0$. 令 $v_1 = \frac{x-y}{\delta}$, $v_2 = \frac{x-z}{\delta}$, 有

$\|v_1\| = \|v_2\| = 1, v_1 \neq v_2$. 由引理 5.3-5,

$\frac{1}{2}(y+z)$ 也是最佳逼近, 因此, $\|x - \frac{1}{2}(y+z)\| = \delta$

$$\left\| \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \right\| = \frac{1}{\delta} \|x - \frac{1}{2}(y+z)\| = 1, \text{ 即}$$

$\|v_1 + v_2\| = 2$. 这与 X 是严格凸空间矛盾. 故证得 Y 对 X 至多存在一个最佳逼近.

由定理 3.2-1 和引理 3.2-3, 我们得出下面的定理.

5.3-9 定理 (Hilbert 空间). 在 Hilbert 空间 H 中, 对每个给定 x 与每个已知的 H 的闭子空间 Y , 则 Y 中对 x 的最佳逼近唯一存在. (即是 $y = px$, p 是 H 到 Y 的投影算子).

习 题 5.3

1. 若 (X, d) 为一度量空间, Y 为 X 一紧子集, 则 Y 中对每个

$x \in X$ 均有一最佳逼近 y .

2. (凸函数) 一函数 $f: R^n \rightarrow R$ 称为凸的, 若它的定义域 $D(f)$ 是凸集, 而且对所有 $u, v \in D(f)$, 有,

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \quad \text{其中 } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

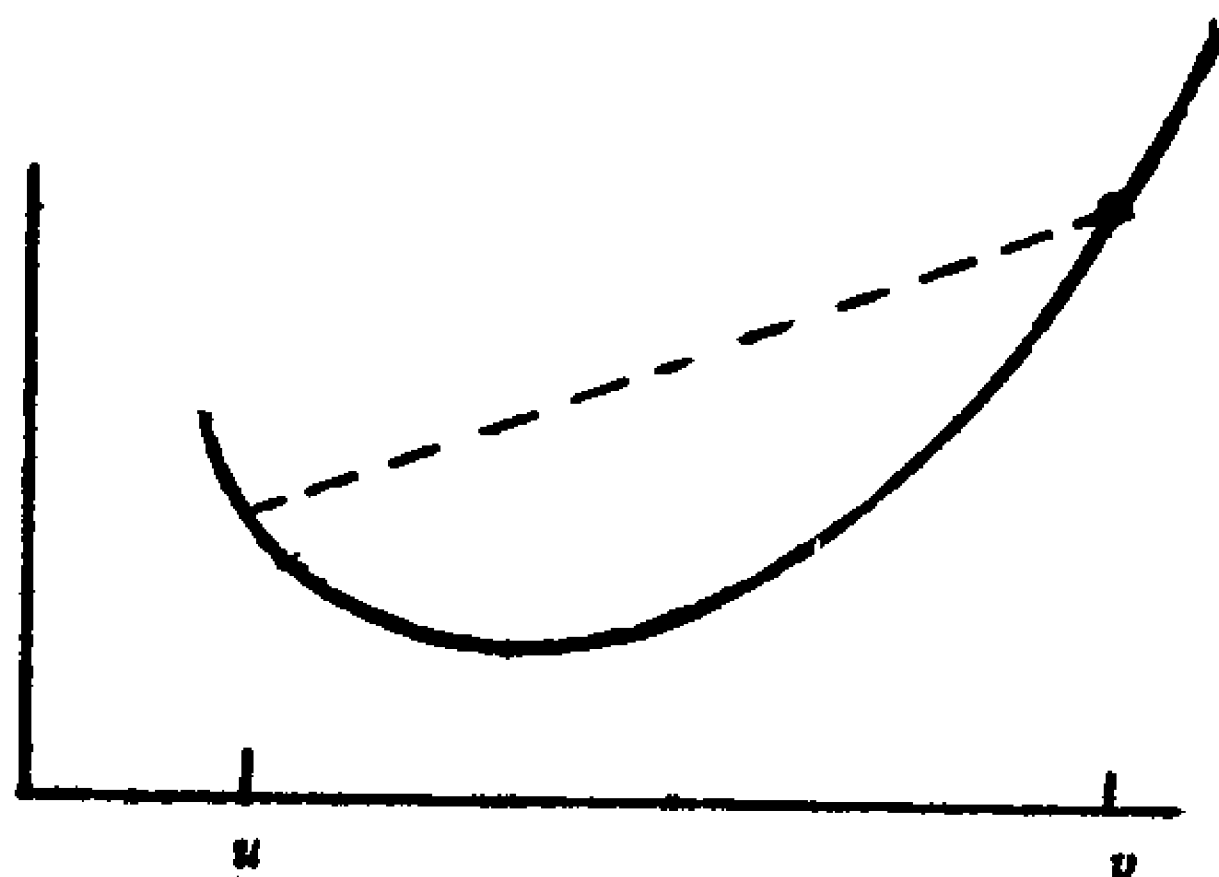


图39 关于单变量 t 的凸函数 f

设 Y 是赋范空间 X 的有穷维子空间, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 Y 的一个基. 对于固定的 $x \in X$, 定义函数 f 为

$$f(\alpha) = \|x - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\| \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

证明函数 f 为凸的.

3. 证明由 (6) 定义的范数不是严格凸的.

4. 在范数 (6) 下, 试确定单位闭球 \tilde{B} 上与点 $x = (2, 0)$ 的距离为最小的所有点 y , 并确定极小值 δ . (注: \tilde{B} 的球心在原点)

5. 所有有序实数对构成的向量空间, 其范数定义为

$$\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$$

证明此范数是非严格凸的. 并画出单位球面.

6. 证明 l^1 不是严格凸的 (可以证明 l^p , 且 $p > 1$ 时是严格凸的)

7. 若在赋范空间中, 子空间 Y 中对 x 的最佳逼近不唯一时, 证明 x 有无穷多个这样的最佳逼近.

8. 证明: 若一范数的严格凸的, 则,

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ 且 } x \neq y \text{ 蕴涵对所有 } 0 < \alpha < 1 \text{ 有,}$$

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1$$

并证明这一条件对严格凸性也是充分的.

9. 证明: 若一赋范空间 X 为严格凸的, 则,

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \quad (x \neq \theta, y \neq \theta)$$

蕴涵对某实数 C 有 $x = Cy$.

10. 证明习题9中的条件对严格凸性不仅是必要的而且是充分的. 即, 若条件对 X 中所有非零的 x 与 y 均成立, 则 X 为严格凸的.

11. 向量空间 X 中凸集 M 的端点是这样的点 x , $x \in M$, 但 x 不是线段 $\omega \subset M$ 的内点. 试证明: 若 X 是严格凸的赋范空间, 则 X 中单位球面上的每一点均是 X 中闭单位球的端点.

§5.4 一致逼近

根据需要, 选择不同的范数会得到不同的逼近. 一致逼近是指按 $C[a, b]$ 上的范数

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

得到的逼近.

本节考虑实空间 $C[a, b]$ 的 n 维子空间 Y 中对 $x \in C[a, b]$ 的最佳逼近的唯一性.

5.4-1 定义 (极值点). 设 $x \in C[a, b]$, $t_0 \in [a, b]$ 称为 $x(t)$ 的极值点是指: $|x(t_0)| = \|x\|$.

由 $C[a, b]$ 上范数的定义, 在 x 的极值点 $t_0 \in [a, b]$, $|x(t)|$ 有极大值.

5.4-2 定义 (Haar条件). 设 Y 是实空间 $C[a, b]$ 的 n 维子空间. 若每一个 $y \in Y$, $y \neq 0$, 在 $[a, b]$ 中至多有 $n-1$ 个零点, 则称 Y 满足Haar条件.

为方便起见. 我们证明与Haar条件等价的一个条件.

5.4-3 引理. n 维子空间 $Y \subset C[a, b]$ 满足Haar条件等价于对每一基 $\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ 和区间 $[a, b]$ 中任意 n 个不同的点 t_1, \dots, t_n , 均有

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1)$$

证明 任一 $y \in Y$ 可表示为 $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$. 子空间 Y 满足

Haar条件当且仅当对每一 $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$ 若在 $J = [a, b]$ 中有 n 个或多个多于 n 个的零点 t_1, \cdots, t_n, \cdots , 则 $y = 0$. 意即齐次线性方程组

$$y(t_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k(t_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \quad (2)$$

有唯一零解 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

而齐次线性方程组 (2) 只有零解的充分必要条件是行列式 (1) 不为零.

由下面引理可得出 Haar 条件是最佳逼近唯一性的充分条件.

5.4-4 引理 (极值点). 假设实空间 $C[a, b]$ 的 n 维子空间 Y 满足 Haar 条件. 对给定的 $x \in C[a, b]$ 和 $y \in Y$, 如果函数 $x - y$ 极值点的个数少于 $n + 1$, 则 y 不是 Y 中对 x 的最佳逼近.

证明 由假设函数 $v = x - y$. 有 $m \leq n$ 个极值点 t_1, \cdots, t_m . 若 $m < n$, 可在 $[a, b]$ 中选出点 t_{m+1}, \cdots, t_n , 加上去使 n 个点 t_1, \cdots, t_n 互不相同. 由于 Y 满足 Haar 条件. 根据引理 5.4-3, 对于这 n 个点和 Y 的一个基 $\{y_1, \cdots, y_n\}$, (1) 式成立. 因此非齐次线性方程组

$$\sum_{k=1}^n \beta_k y_k(t_j) = V(t_j) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

有唯一解 β_1, \dots, β_n . 利用此解定义

$$y_0 = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n$$

和

$$\tilde{y} = y + \varepsilon y_0$$

我们证明对一充分小的 ε , 函数 $\tilde{V} = x - \tilde{y}$ 满足

$$\|\tilde{V}\| < \|V\|$$

因而 y 不可能成为 Y 中对 x 的最佳逼近.

在 $V(t)$ 的极值点 t_1, \dots, t_n , $|V(t_j)| = \|V\|$. 由题设极值点的个数 $m \leq n$, 因此, $V(t) = x(t) - y(t) \neq 0$, (因为否则有无穷个极值点), 于是 $\|V\| > 0$. 由 (3) 及 y_0 的定义知, $V(t_j) = y_0(t_j) \neq 0$, 根据 $|V(t)|$ 和 $|y_0(t)|$ 连续, 对于每个 t_j , 均存在邻域 N_j , 使得在 $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_m$ 中, 有

$$\mu = \inf_{t \in N} |V(t)| > 0, \quad \inf_{t \in N} |y_0(t)| \geq \frac{1}{2} \|V\| > 0 \quad (5)$$

且对于所有的 $t \in N$, $\frac{y_0(t)}{V(t)} > 0$. 于是,

$$\frac{y_0(t)}{V(t)} = \frac{|y_0(t)|}{|V(t)|} \geq \frac{\inf_{t \in N} |y_0(t)|}{\|V\|} \geq \frac{1}{2} \text{ 对于所有}$$

$t \in N$. 设 $M_0 = \sup_{t \in N} |y_0(t)|$, 则对于每个正的 $\varepsilon < \mu/M_0$, 及每个 $t \in N$, 得,

$$\frac{\varepsilon y_0(t)}{V(t)} = \frac{\varepsilon |y_0(t)|}{|V(t)|} \leq \varepsilon \cdot \frac{M_0}{\mu} < 1$$

因为, $\tilde{V} = x - \tilde{y} = x - (y + \varepsilon y_0) = V - \varepsilon y_0$. 利用上述不等式, 可看出对所有的 $t \in N$, 与 $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{M_0}$.

$$\begin{aligned} |\tilde{V}(t)| &= |V(t) - \varepsilon y_0| \\ &= |V(t)| \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{y_0(t)}{V(t)} \right) \\ &\leq \|V\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \|V\| \end{aligned} \quad (6)$$

另一方面, 在余集 $K = [a, b] - N$ 上, 令

$$M_1 = \sup_{t \in K} |y_0(t)| \quad M_2 = \sup_{t \in K} |V(t)|$$

由于 N 包含了 $V(t)$ 的所有极值点, 因此,

$M_2 < \|V\|$ 且可写成

$$\|V\| = M_2 + \eta, \quad \text{其中 } \eta > 0.$$

选取一正 $\varepsilon < \eta/M_1$, 于是 $\varepsilon M_1 < \eta$ 且对所有的 $t \in K$ 有.

$$\begin{aligned} |\tilde{V}(t)| &\leq |V(t)| + \varepsilon |y_0(t)| \\ &\leq M_2 + \varepsilon M_1 < \|V\|. \end{aligned}$$

取 $\varepsilon < \min\{\mu/M_0, \eta/M_1\}$, 利用上述不等式和 (6) 并对 $|\tilde{V}(t)|$

(t) 在 $[a, b]$ 上取上确界, 因此得到, $\|\tilde{V}\| < \|V\|$.

利用这个引理, 可得出最佳逼近的唯一性定理.

5.4-5 Haar 唯一性定理 (最佳逼近). 设 Y 是实空间

$C[a, b]$ 的一个 n 维子空间, 则 Y 中对每一个 $x \in C[a, b]$ 的最佳逼近为唯一的充分且必要条件是 Y 满足Haar条件.

证明. (a), 充分性, 设 Y 满足Haar条件, $y_1 \in Y$ 与 $y_2 \in Y$ 同为某固定 $x \in C[a, b]$ 且($x \notin Y$)的最佳逼近. 令,

$$V_1 = x - y_1, V_2 = x - y_2,$$

则, $\|V_1\| = \|V_2\| = \delta$, 其中 δ 为 x 到 Y 的距离. 由引理5. 3-5,

$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ 亦是 Y 中对 x 的最佳逼近. 设

$$V = x - y = x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \quad (7)$$

根据引理5. 4-4, $V(t)$ 至少有 $n+1$ 个极值点 t_1, \dots, t_{n+1} , 且 $|V(t_i)| = \|V\| = \delta$. 而 $|V_k(t_i)| \leq \|V_k\| = \delta$ ($k=1, 2$), 由(7)有

$$\begin{aligned} |V_1(t_j)| &= |2V(t_j) - V_2(t_j)| \\ &\geq 2|V(t_j)| - |V_2(t_j)| \\ &\geq 2\delta - \delta = \delta. \end{aligned}$$

从而, $|V_1(t_j)| = \delta$. 同理, $|V_2(t_j)| = \delta$.

由(7), $V_1(t_j)$ 与 $V_2(t_j)$ 符号必相同, 即,

$$V_1(t_j) = V_2(t_j) = \delta \text{ 或 } -\delta. (j=1, 2, \dots, n+1)$$

这蕴涵 $y_1 - y_2 = V_1 - V_2$ 在 $[a, b]$ 中有 $n+1$ 个零点, 由于 Y 满足Haar条件, 因此, $y_1 - y_2 = 0$. 即 $y_1 = y_2$, 唯一性得证.

(b) 必要性, 假设 Y 不满足Haar条件, 我们来证存在 $x(t) \in C[a, b]$ 其最佳逼近不唯一.

因为假设 Y 不满足Haar条件, 由引理5. 4-3必存在 Y 的一个基 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 和 $[a, b]$ 中的 n 个值 t_1, \dots, t_n , 使得(1)中的

行列式为零. 因此齐次方程组

$$r_1 y_k(t_1) + r_2 y_k(t_2) + \cdots + r_n y_k(t_n) = 0 \quad k=1, \cdots, n,$$

有非零解 r_1, \cdots, r_n , 利用此解, 对任一 $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y$ 有,

$$\sum_{j=1}^n r_j y(t_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left[\sum_{j=1}^n r_j y_k(t_j) \right] = 0 \quad (8)$$

由于(1)中行列式为零. 所以转置方程组

$$\beta_1 y_1(t_j) + \beta_2 y_2(t_j) + \cdots + \beta_n y_n(t_j) = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

亦有非零解 β_1, \cdots, β_n , 利用这一解, 定义 $y_0 = \sum_{k=1}^n \beta_k y_k$, 则 y_0

$\neq 0$ (因为 y_1, \cdots, y_n 线性无关), 且, $y_0(t_j) = 0, j=1, 2, \cdots, n$, 取一数 λ 满足 $\|\lambda y_0\| \leq 1$, 设 $z \in C[a, b], \|z\| = 1$, 且

$$z(t_j) = \text{Sgn} r_j = \begin{cases} -1 & \text{若 } r_j < 0 \\ 1 & \text{若 } r_j \geq 0 \end{cases}$$

定义 $x \in C[a, b]$ 为

$$x(t) = z(t) (1 - |\lambda y_0(t)|)$$

由于 $y_0(t_j) = 0$, 则 $x(t_j) = z(t_j) = \text{Sgn} r_j$. 且

$\|x\| = 1$. 我们证明 Y 中对 x 的最佳逼近有无穷多个.

事实上, 因为, $|z(t)| \leq \|z\| = 1, |\lambda y_0(t)| \leq \|\lambda y_0\| \leq 1$, 所以, 对于每个 $\varepsilon \in [-1, 1]$, 有

$$\begin{aligned} & |x(t) - \varepsilon \lambda y_0(t)| \\ & \leq |x(t)| + |\varepsilon \lambda y_0(t)| \\ & = |z(t)| (1 - |\lambda y_0(t)|) + |\varepsilon \lambda y_0(t)| \\ & \leq 1 - |\lambda y_0(t)| + |\varepsilon| |\lambda y_0(t)| \\ & = 1 - (1 - |\varepsilon|) |\lambda y_0(t)| \leq 1. \end{aligned}$$

如果我们能证明

$$\|x - y\| \geq 1, \quad \text{对任意 } y \in Y \quad (9)$$

成立, 则每个 $\varepsilon \lambda y_0(t)$ ($\varepsilon \in [-1, 1]$) 就是 X 到 Y 的最佳逼近.

若 (9) 不成立, 那么, 必存在 $\tilde{y} \in Y$, 使得 $\|x - \tilde{y}\| < 1$,
 由于 $|x(t) - \tilde{y}(t)| \leq \|x - \tilde{y}\| < 1$ 及其 $x(t_i) = \text{Sgn} r_i = \pm 1$,
 则 $\tilde{y}(t_i) \neq 0$ 且,

$$\text{Sgn} \tilde{y}(t_i) = \text{Sgn} x(t_i) = \text{Sgn} r_i$$

因为有些 $r_i \neq 0$, 于是,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i \tilde{y}(t_i) &= \sum_{i=1}^n r_i |\tilde{y}(t_i)| \tilde{y} \text{Sgn} r_i \\ &= \sum_{i=1}^n |r_i| |\tilde{y}(t_i)| \neq 0. \end{aligned}$$

这与条件 (8) 矛盾. 因此 (9) 必成立.

若 Y 为次数不超过 n 的所有多项式与多项式 $y = 0$ 组成的子空间. 则, $\dim Y = n + 1$, 且 Y 满足 Haar 条件. 因此有下述定理.

5.4-6 定理 (多项式). 设 Y_n 是 $C[a, b]$ 中由 $y = 0$ 和所有次数不超过 n 的多项式构成的子空间. 则 Y 中对每一个 $x \in C[a, b]$ 的最佳逼近是唯一的.

此定理表明: 一般情况下不能保证最佳逼近的唯一性. 但是多项式逼近有唯一性. 多项式之所以有这样特别好的性质, 是由于它们满足 Haar 条件.

以上是在理论上研究了一致逼近的问题. 下面我们考虑 $C[a, b]$ 中函数 $x(t)$ 的最佳逼近的形式. 一般情况下这是一个很困难的问题. 我们这里只考虑一个简单而非常重要的古典例子.

求 $Y = \text{Span}\{y_0, \dots, y_{n-1}\}$, $y_j(t) = t^j$, ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 对 $C[-1, 1]$ 中函数 $x(t) = t^n$ 的最佳逼近 y .

即由一个次数小于 n 的多项式 y 逼近 $[-1, 1]$ 上的 $x(t) = t^n$. 这样的多项式 y 可写成.

$$y(t) = a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \dots + a_0, t \in [-1, 1].$$
 因此 $z = x - y$ 有如下形式

$$z(t) = t^n - (a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \dots + a_0), t \in [-1, 1] \quad (10)$$

z 是一个 n 次多项式, 其首项系数为 1 且 $\|z\| = \|x - y\|$ 是 x 到 Y 的距离. 因此我们的问题就等价于: 在所有次数为 n 且首项系数为 1 的多项式中求一多项式 z , 使其在所考虑区间 $[-1, 1]$ 上与 0 有最小的极大偏差, 为此我们引进下述概念.

5.4-7 定义(交错集). 设 Y 是实空间 $C[a, b]$ 的子空间, $x \in C[a, b]$, $y \in Y$. 点集 $\{t_0, \dots, t_k\} \subset [a, b]$ 且 $t_0 < t_1 < \dots < t_k$. 若 $x(t_j) - y(t_j)$ 在相邻的点 t_j 交错地取值 $+\|x - y\|$ 和 $-\|x - y\|$, 则称点集 $\{t_0, \dots, t_k\}$ 为函数 $x - y$ 的交错集.

从定义中可看出交错集中的点均为 5.4-1 所定义的极值点.

下述引理指出了交错集的重要性: 若 $x - y$ 存在一充分大的交错集, 则 y 是 Y 中对 x 的最佳逼近.

5.4-8 引理(最佳逼近) 设 Y 是实空间 $C[a, b]$ 的 n 维子空间且满足 Haar 条件 5.4-2, 给定 $x \in C[a, b]$. 设 $y \in Y$ 且 $x - y$ 在 $[a, b]$ 上有一含 $n + 1$ 个点的交错集. 则 y 是 Y 中对 x 的最佳逼近.

证明. 由定理 5.3-2 和 5.4-5 知 x 到 Y 里的最佳逼近唯一存在. 若最佳逼近不是 y 而是另外的 $y_0 \in Y$, 则

$$\|x - y\| > \|x - y_0\|$$

函数

$$y_0 - y = (x - y) - (x - y_0)$$

与 $x - y$ 在这 $n + 1$ 个极值点上有相同的符号, 这是因为 $x - y$ 在这些点的值等于 $\pm \|x - y\|$, 而右边的另一项 $x - y_0$ 的绝对值不会超过 $\|x - y_0\|$ 而严格小于 $\|x - y\|$. 这表明 $y_0 - y$ 在这 $n + 1$ 个点上交错取正和负. 因而 $y_0 - y$ 在 $[a, b]$ 中至少存在 n 个零点. 这与 Y 满足Haar条件矛盾. 因此 y 必为 Y 中对 x 的最佳逼近.

要想利用上述引理求出 $x = t^n$ 到 Y 的最佳逼近, (10)中的 $z(t)$ 应具有一个含 $n + 1$ 个点的交错集. 这使我们联想起函数

$$t = \cos \theta \quad (11)$$

当 θ 在 $[0, \pi]$ 上变化时, t 在 $[-1, 1]$ 上变此. 函数 $\cos n\theta$ 在 $[0, \pi]$ 上有 $n + 1$ 个极值点, 依次交替取值 ± 1 . 因此 $\cos(\arccos t)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在一含 $n + 1$ 个点的交错集. 我们希望 $\cos(\arccos t)$ 帮助解决上述问题, 其前提 $\cos(\arccos t)$ 能写成 t 的 n 次多项式的形式. 下面我们证明

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \cos^n \theta + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} \cos^i \theta \quad (\beta_{ni} \text{ 为常数}) \quad (12)$$

证明. 利用Demoivre公式:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

将左端用二项式定理展开, 等式两边的实部应相等, 得,

$$\cos n\theta = C_n^0 \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \dots$$

$$+ (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} \theta \sin^{2k} \theta \quad \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

$$= \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$+ C_n^4 \cos^{n-4} \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 + \dots$$

$$+ (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} \theta (1 - \cos^2 \theta)^k$$

$$\cos^n \theta \text{ 的系数} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2k} \quad k = \left[\frac{n}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{(由 } C_{n+1}^k &= C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots \\ &+ C_{n-1}^{k-1} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

因此(12)成立.

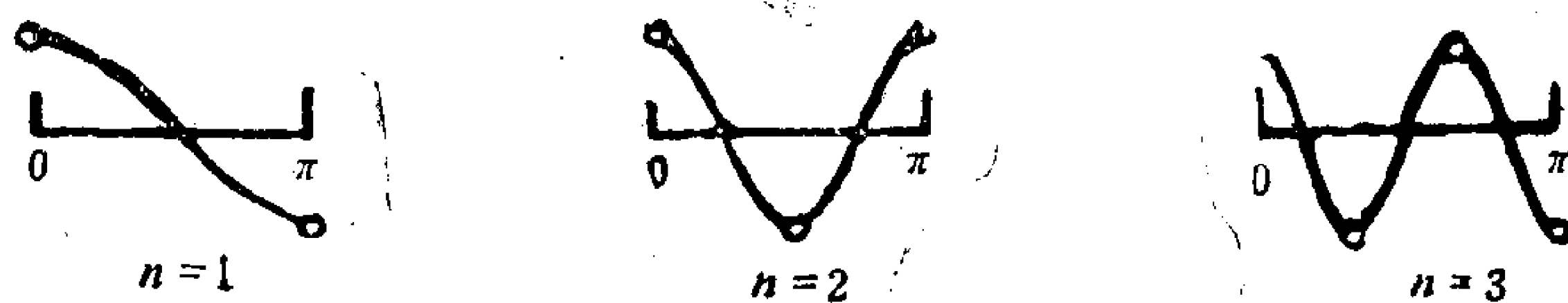


图40 $\cos n\theta$ 在 $[0, \pi]$ 上的 $n+1$ 个极值点.

5.4-9 定义(Chebyshev多项式). 称函数

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t) \quad t \in [-1, 1]$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

为第一类 n 次Chebyshev多项式. 显然有

$$T_n(t) = t^n - C_n^2 t^{n-2} (1 - t^2) + C_n^4 t^{n-4} (1 - t^2)^2$$

$$+ \dots + (-1)^k C_n^{2k} t^{n-2k} (1 - t^2)^k \quad k = \left[\frac{n}{2} \right]$$

由 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$

可得递推公式:

$$T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t) = 2tT_n(t)$$

于是依次可推出下列各次Chebyshev多项式:

$$T_0(t) = 1 \quad T_1(t) = t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1 \quad T_3(t) = 4t^3 - 3t \quad (14)$$

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1 \quad T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t, \dots,$$

$$T_n(t) = \frac{n}{2} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \frac{(n-j-1)!}{j!(n-2j)!} (2t)^{n-2j},$$

$$(n=1, 2, \dots) \quad (15)$$

5.4-10 定理(Chebyshev多项式)由

$$T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t)$$

$$(n \geq 1) \quad (16)$$

定义的多项式在 $[-1, 1]$ 上是所有次数为 n 、首项系数为1的实多项式中距0有最小的极大偏差. 即 $x = t^n$ 到 $Y = \text{Span}\{1, t, \dots, t^{n-1}\}$ 里的最佳逼近为

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) \quad (17)$$

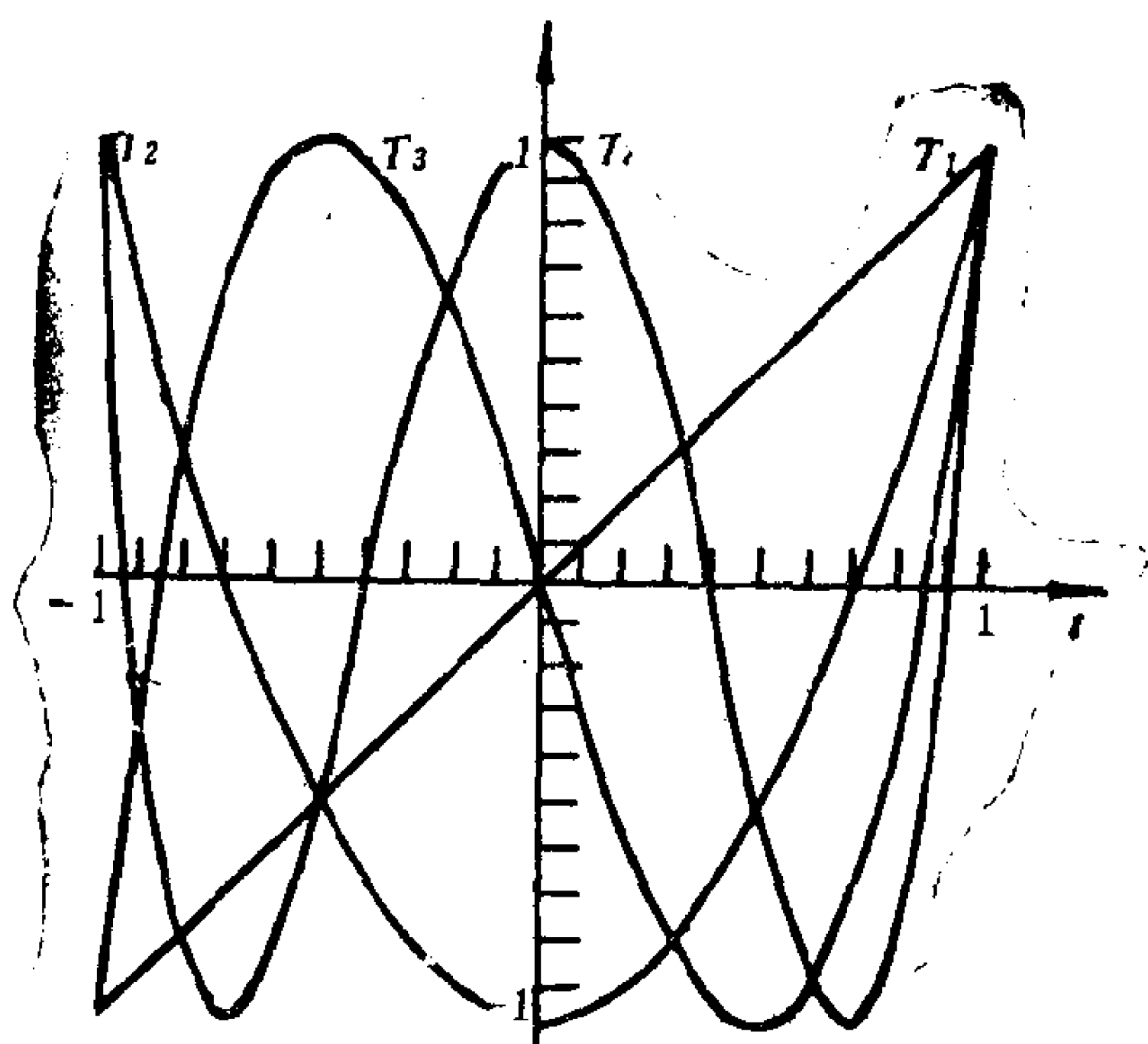


图41 Chebyshev多项式 T_1, T_2, T_3, T_4

习 题 5.4

1. 若 Y 为 $C[a, b]$ 的 n 维子空间且满足Haar条件. 证明将 Y 的元素限制到 $[a, b]$ 的任意由 n 个点组成的子集上, 仍构成 n 维向量空间.

2. 设 $x_1(t) = 1, x_2(t) = t^2$. 若 $Y = \text{Span} \{x_1, x_2\}$ 看成(a) $C[0, 1]$ 的子空间;

(b) $C[-1, 1]$ 的子空间.

问 Y 满足Haar条件吗?

3. 证明: n 维子空间 $Y = \text{Span} \{y_1, \dots, y_n\} \subset C[a, b]$ 满足Haar条件当且仅当对于任意 n 个不同的 $t_j \in [a, b], (j = 1, \dots, n)$ n 个向量.

$$v_j = [y_1(t_j), \dots, y_n(t_j)] \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

成一线性无关集.

4. 设 Y 是 $C[a, b]$ 的 n 维子空间且满足Haar条件. 对任一 $x \in C[a, b]$, 若 $y \in Y$ 是使得 $x - y$ 在 $[a, b]$ 中的 $n+1$ 个依次相邻的点的值交替取正与负的元素. 证明从 x 到 Y 里最佳逼近的距离 δ 不会小于 $x - y$ 在这 $n+1$ 个点处其绝对值最小者.

5. 在 $C[0, 1]$ 中试求 $Y = \text{Span} \{1, t\}$ 中对函数 $x(t) = e^t$ 的最佳逼近. 并与给定的线性Taylor多项式 $1 + t$ 进行比较.

6. 求 $x(t) = t^3 + t^2, t \in [-1, 1]$ 的二次多项式的最佳逼近 y_0 , 其极大偏差为多少?

7. 证明 $T_n(t)$ 的所有零点为实的、单根、并位于 $[-1, 1]$ 中.

8. 证明: $T_n(t)$ 的任二相邻的零点间存在 $T_{n-1}(t)$ 的一零点.

9. 证明: $T_n(t)$ 与 $T_{n-1}(t)$ 没有公共零点.

10. 证明: 在空间 $L^2[-1, 1]$ 中, 函数集合

$\{(1-t^2)^{-\frac{1}{4}} T_n(t)\}$ 是直交的, 即

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(t) T_m(t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

并证明若 $m = n = 0$ 时积分值为 π .

§5.5 Hilbert空间中的逼近

在Hilbert空间中对任一给定的 x 和一闭子空间 Y , Y 中对 x 的最佳逼近唯一存在 (参看定理5.3-9). 本节给出最佳逼近以及 x 与其最佳逼近 y 之间距离 $\|x - y\|$ 的Gram行列式表示.

设 Y 是Hilbert空间 H 的 n 维子空间. 由定理2.4-2知其完备. 从而 Y 是 H 的闭子空间. 根据定理3.2-5,

$$H = Y \oplus Z \quad (Z = Y^\perp) \quad (1a)$$

因此对每一个 $x \in H$, 有,

$$x = y + z \quad \text{其中 } z = (x - y) \perp y. \quad (1b)$$

即 $\langle x - y, y \rangle = 0$.

这里的 y 是 Y 中对 x 的最佳逼近. 令 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 是 Y 的一个基, 则 y 可唯一地表示成

$$y = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \quad (2)$$

因为 $x - y \perp Y$, 于是有

$$\langle y_j, x - y \rangle = \langle y_j, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \rangle = 0$$

即得到一个含 n 个未知量的 n 个方程的非齐次线性方程组.

$$\overline{\alpha_1} \langle y_j, y_1 \rangle + \dots + \overline{\alpha_n} \langle y_j, y_n \rangle = \langle y_j, x \rangle$$

$$(j = 1, \dots, n) \quad (3)$$

其系数行列式为

$$G(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_1, y_2 \rangle & \dots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \dots & \langle y_2, y_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y_n, y_1 \rangle & \langle y_n, y_2 \rangle & \dots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}$$

由于 y 存在且唯一, 则方程组 (3) 有唯一解, 因此, $G(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, $G(y_1, \dots, y_n)$ 称为 y_1, \dots, y_n 的 Gram 行列式. 可简记作 G .

由 Gram 规则, 将 y 的系数可表示成

$$\alpha_j = \overline{G}_j / \overline{G}, \text{ 其中 } \overline{G} \text{ 是 (4) 中 } G \text{ 的复共轭, } \overline{G}_j \text{ 是 } G \text{ 中第 } j$$

列用 $\begin{vmatrix} \langle y_1, x \rangle \\ \dots\dots\dots \\ \langle y_n, x \rangle \end{vmatrix}$ 代替所得的行列式

现在我们来考虑 x 与其 Y 对 x 的最佳逼近 y 之间的距离 $\|z\| = \|x - y\|$ 的 Gram 表示, 首先有下面定理.

5.5-1 定理 (线性无关). Hilbert 空间 H 的元素 y_1, \dots, y_n , 构成 H 中一线性无关集的充分必要条件为

$$G(y_1, \dots, y_n) \neq 0.$$

证明 必要性由前面的讨论已证明. 现只证充分性. 假设 $G(y_1, \dots, y_n) = 0$. 证 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 线性无关. 用反证法证, 若 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 线性相关, 则其中必有一向量 y_j 是其他向量的线性组合, 因而 $G(y_1, \dots, y_n)$ 的第 j 列是其他各列的线性组合, $G(y_1, \dots, y_n) = 0$, 这与假设 $G(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ 矛盾. 从而证得 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 线性无关.

5.5-2 定理 (距离). 设 Y 是 Hilbert 空间 H 的 n 维子空间. $\{y_1, \dots, y_n\}$ 是 Y 的一个基. 则 x 与其 Y 对 x 的最佳逼近

y 的距离 $\|z\| = \|x - y\|$ 可表示成

$$\|z\|^2 = \frac{G(x, y_1, \dots, y_n)}{G(y_1, \dots, y_n)} \quad (5)$$

$$\text{这里, } G(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y_1 \rangle & \cdots & \langle x, y_n \rangle \\ \langle y_1, x \rangle & \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y_n, x \rangle & \langle y_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}$$

证明 因为 $x = y + z$, $\langle y, z \rangle = 0$, 则,

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \langle z, z \rangle = \langle z, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ &= \langle x, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \rangle \end{aligned}$$

这可写成

$$\langle x, x \rangle - \|z\|^2 - \bar{\alpha}_1 \langle x, y_1 \rangle - \cdots - \bar{\alpha}_n \langle x, y_n \rangle = 0 \quad (6)$$

由(3)有,

$$\begin{aligned} \langle y_j, x \rangle - \bar{\alpha}_1 \langle y_j, y_1 \rangle - \cdots - \bar{\alpha}_n \langle y_j, y_n \rangle &= 0 \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

方程(6)与(7)合在一起可看作 $n+1$ 个未知量: $1, -\bar{\alpha}_1, \dots, -\bar{\alpha}_n$ 的 $n+1$ 个方程的线性齐次方程组.

由于此方程组有非零解, 则其系数行列式必为零. 即

$$\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle - \|z\|^2 & \langle x, y_1 \rangle & \cdots & \langle x, y_n \rangle \\ \langle y_1, x \rangle + 0 & \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y_n, x \rangle + 0 & \langle y_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

将此行列式按第一列化成二行列式之和, 并将第二个行列式

按第一列展开, 于是(8)可写成下述形式

$$G(x, y_1, \dots, y_n) - \|z\|^2 G(y_1, \dots, y_n) = 0.$$

由定理5.6-1, $G(y_1, \dots, y_n) \neq 0$. 因此(5)式得证.

若基 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 为一直交集, 则 $G(y_1, \dots, y_n) = 1$, 并将 $G(x, y_1, \dots, y_n)$ 按第一行展开. 由于 $\langle x, y_i \rangle \langle y_i, x \rangle = |\langle x, y_i \rangle|^2$, (5)式可写成

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, y_k \rangle|^2 \quad (9)$$

这与§3.3中的(5)式一致.

习 题 5.5

1. 证明

$$G(\dots, \alpha y_j, \dots) = |\alpha|^2 G(\dots, y_j, \dots)$$

2. 若 $G(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, 证明: $G(y_1, \dots, y_j) \neq 0$.
 $j = 1, \dots, n-1$.

3. 用Gram行列式表示Schwar不等式:

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. 并利用定理5.6-1求出等号成立的条件.

4. 证明 $G(y_1, \dots, y_n) \geq 0$. 由此可得下列命题: Hilbert空间 H 的有限子集为线性无关的充要条件是其元素的Gram行列式为正值.

5. 证明

$$G(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \alpha y_j) = G(y_1, \dots, y_n) \quad (j < n)$$

并用此式能证明定理5.5-2.

6. 设 $M = \{y_1, \dots, y_n\}$ 为Hilbert空间 H 中一线性无关集
 证明: 对任意子集 $\{y_k, \dots, y_m\}$ (其中 $k < m < n$) 有,

$$\frac{G(y_k, \dots, y_n)}{G(y_{n+1}, \dots, y_n)} \leq \frac{G(y_k, \dots, y_m)}{G(y_{n+1}, \dots, y_m)}$$

并证明.

$$\frac{G(y_m, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} \leq G(y_m)$$

7. 设 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 为 Hilbert 空间 H 的一线性无关集, 证明: 对 $m = 1, \dots, n-1$ 有

$$G(y_1, \dots, y_n) \leq G(y_1, \dots, y_m) G(y_{m+1}, \dots, y_n)$$

且等号成立的充分必要条件为集 $M_1 = \{y_1, \dots, y_m\}$ 的每一元素与集 $M_2 = \{y_{m+1}, \dots, y_n\}$ 的每一元素直交. (利用习题 6)

8. 证明: 对于习题 7 中的 y_1, \dots, y_n 有,

$$G(y_1, \dots, y_n) \leq \langle y_1, y_1 \rangle \cdots \langle y_n, y_n \rangle$$

且等号成立当且仅当 y_i 相互直交.

9. 在 Hilbert 空间 H 中一线性无关集 $\{x_1, x_2, \dots\}$ 的 Span $\{x_1, x_2, \dots\}$ 为稠密的充要条件是: 对每一 $x \in H$,

$$\frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

§5.6 样条逼近

样条逼近就是分段多项式逼近. 对于 $[a, b]$ 上给定的函数 x . 将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 然后在这些小区上用不同的多项式去逼近 x , 由这 n 个多项式组成的函数 y 作为 x 的逼近函数.

最简单的连续分段多项式是分段线性函数, 但是这样的函数在子区间的端点不可微. 我们希望逼近函数在 $[a, b]$ 上处处有一定阶的导数.

我们考虑 $J = [a, b]$ 上的三次样条函数. 给定区间 $J = [a, b]$ 一个划分 P_n :

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{1}$$

称 t_j ($0 \leq j \leq n$) 为 P_n 的结点. 以 t_j ($0 \leq j \leq n$) 为结点的三次样条函数 $y(t)$ 是指它满足以下两个条件:

(a) $y \in C^2[a, b]$. 这里 $C^2[a, b]$ 是具有二阶连续导数的实值函数组成的空间.

(b) 在每个子区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上, $0 \leq j \leq n-1$ y 是一个不超过3次的多项式.

对应区间 $[a, b]$ 的划分 P_n , 所有三次样条函数组成的向量空间记作

$$Y(P_n).$$

现在我们来说明, 如何用 $Y(P_n)$ 中的样条函数逼近 $[a, b]$ 上的实值函数 $x(t)$. x 的逼近函数可用插值法得到. 三次样条函数的样条插值是指取刚才定义过的样条函数其在每一结点的值与 x 的对应值一致. 这样的 y 是存在的. 并且若规定了 y 在端点 a 与 b 的导数值. 则 y 是唯一的.

5.6-1 定理(样条插值). 设 x 为定义在 $J = [a, b]$ 上的实值函数. 设 P_n 为 J 的形如(1)的划分. 并设 k_0' 与 k_n' 为任意两实数. 则存在唯一的三次样条函数 $y \in Y(P_n)$ 满足下述 $n+3$ 个条件

$$\begin{aligned} (a) \quad & y(t_j) = x(t_j) \quad (j = 0, \dots, n) \\ (b) \quad & y'(t_0) = k_0' \quad y'(t_n) = k_n' \end{aligned} \quad (2)$$

证明 在每个子区间 $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ 中, $j = 0, \dots, n-1$. 样条函数 $y(t)$ 与一个次数不超过三的多项式 $P_j(t)$ 一致. 且满足.

$$P_j(t_j) = x(t_j) \quad P_j(t_{j+1}) = x(t_{j+1})$$

记 $1/t_{j+1} - t_j = \tau_j$, 并令

$$P_j'(t_j) = k_j' \quad P_j'(t_{j+1}) = k'_{j+1},$$

这里 k_0' 和 k_n' 是给定的常数. 而 k_1', \dots, k'_{n-1} 可在后面确定. 由直接计算可以验证满足上述四个条件的唯一三次多项式 $P_j(t)$ 为

$$\begin{aligned} P_j(t) = & x(t_j) \tau_j^2 (t - t_{j+1})^2 [1 + 2\tau_j (t - t_j)] \\ & + x(t_{j+1}) \tau_j^2 (t - t_j)^2 [1 - 2\tau_j (t - t_{j+1})] \\ & + k_j' \tau_j^2 (t - t_j) (t - t_{j+1})^2 \\ & + k'_{j+1} \tau_j^2 (t - t_j)^2 (t - t_{j+1}) \end{aligned}$$

微分两次得到.

$$\begin{aligned} P_j''(t_j) = & -6\tau_j^2 x(t_j) + 6\tau_j^2 x(t_{j+1}) - 4\tau_j k_j' \\ & - 2\tau_j k'_{j+1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P_j''(t_{j+1}) = & 6\tau_j^2 x(t_j) - 6\tau_j^2 x(t_{j+1}) + 2\tau_j k_j' \\ & + 4\tau_j k'_{j+1} \end{aligned} \quad (4)$$

因为 $y \in C^2[a, b]$, 在结点处两个对应的多项式的二阶导数必一致:

$$P''_{j-1}(t_j) = P_j''(t_j) \quad (j=1, \dots, n-1)$$

在(4)中用 $j-1$ 代替 j , 并利用(3), 于是这 $n-1$ 个方程变成如下形式

$$\begin{aligned} & \tau_{j-1} k'_{j-1} + 2(\tau_{j-1} + \tau_j) k_j' + \tau_j k'_{j+1} \\ & = 3(\tau_{j-1}^2 \Delta x_j + \tau_j^2 \Delta x_{j+1}), \end{aligned}$$

其中 $\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1})$, $\Delta x_{j+1} = x(t_{j+1}) - x(t_j)$
 $(j=1, \dots, n-1)$

由于 k_0' 与 k_n' 已给定. 所以上述方程组含 $n-1$ 个未知量 k_1', \dots, k'_{n-1} 并具有 $n-1$ 个方程, 其系数行列式为:

$$A = \begin{vmatrix} 2(\tau_0 + \tau_1) & \tau_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tau_1 & 2(\tau_1 + \tau_2) & \tau_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 2(\tau_2 + \tau_3) & \tau_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-2} & 2(\tau_{n-2} + \tau_{n-1}) \end{vmatrix}$$

由于 $\tau_i > 0$, A 是对角绝对优势的行列式, 即主对角线上的每一元素均较同行其他元素的和为大, 由5.2-2知方程组有唯一解 k_1', \dots, k'_{j-1} . 因此每个子区间 I_j 上的三次多项式 $P_j(t)$ 唯一确定. 即三次样条函数 y 唯一确定.

最后介绍三次样条函数一个重要性质

5.6-2 定理(极小性质). 在定理5.6-1中, 假设 $x \in C^2[a, b]$, 且有,

$$y'(a) = x'(a), \quad y'(b) = x'(b). \quad (5)$$

$$\text{则} \quad \int_a^b x''(t)^2 dt \geq \int_a^b y''(t)^2 dt \quad (6)$$

证明 因为 $x' - y'$ 在 a 与 b 处均为0, 利用分部积分得,

$$\begin{aligned} & \int_a^b y''(t)[x''(t) - y''(t)] dt \\ &= - \int_a^b y'''(t)[x'(t) - y'(t)] dt \end{aligned}$$

由于 y''' 在划分的每个小区间上为常数, 所以上述积分右端为0. 从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [x''(t) - y''(t)]^2 dt \\ &= \int_a^b x''(t)^2 dt - \int_a^b y''(t)^2 dt. \end{aligned}$$

即证得(6)式成立. 等号成立当且仅当 x 为三次样条函数.

习 题 5.6

1. 证明: 对应区间 $[a, b]$ 一给定划分 p_n 的所有三次样条函数构成一向量空间 $Y(p_n)$. 此空间的维数是多少?

2. 证明: 对于给定的形如(1)的划分 p_n , 存在唯一的一组 $n+1$ 个样条函数 y_0, \dots, y_n , 使得

$$y_j(t_k) = \delta_{jk}$$

$$y'_j(a) = y'_j(b) = 0$$

如何由它们求出 $y(p_n)$ 的一个基?

3. 用对应划分 $p_2 = \{-1, 0, 1\}$ 且满足(2a)与(5)的三次样条函数来逼近 $[-1, 1]$ 上的函数 $x(t) = t^4$. (先猜测 y 可能是什么样子然后再计算)

4. 设 $x(t) = t^4$, $t \in [-1, 1]$. 求出次数不超过3的多项式空间关于 x 的 Chebyshev 逼近 \tilde{y} . 试问 \tilde{y} 满足(2a)与(5)吗? 将 \tilde{y} 与习题3中的样条函数 y 用图形进行比较.

5. 证明: 习题4中的 Chebyshev 逼近比习题3中的样条逼近 y 对 x 有较大的极大偏差.

6. 若 $[a, b]$ 上的一个三次样条函数 y 具有连续的三阶导数, 则 y 必为一个多项式.

7. 有时可能会出现 $[a, b]$ 的相邻子区间上样条函数是用相同多项式表示. 求出 $x(t) = \sin t$ 对应于划分 $\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$ 且满足(2a)与(5)的三次样条逼近 y . 并以此为例, 说明上述情况.

8. 对于 $x, y \in C^2[a, b]$, 定义

$$\langle x, y \rangle_2 = \int_a^b x''(t) y''(t) dt$$

$$p(x) = \langle x, x \rangle_2^{1/2}$$

证明 p 是一个拟范数 (参看 §2.3 习题10), 但不是范数.

9. 证明对任意 $x \in C^2[a, b]$ 与其满足 (2a) 与 (5) 的样条函数 y , 可用 p 估计偏差 (参看习题 8), 而与划分的具体选择无关.

$$\|x - y\|_2 \leq p(x).$$

第六章 赋范空间线性算子的谱论

谱论是近代泛函分析及应用内容中主要的一部分. 粗略地讲, 谱论涉及某些算子的不变子空间、逆算子的一般性质及与原算子的关系, 而这类逆算子问题可由解各类线性代数、微分、积分方程中很自然地引出. 研究谱论对于深入认识算子本身也很有意义.

本章首先从有限维向量空间开始, 其谱论实质是矩阵的特征值理论, 这虽比无限维空间算子的谱论要简单得多, 但在实际中是很重要的, 如应用在数值分析方面; 并且用其来说明一般情况下的背景及在无限维空间中谱论的某些概念. 在第3、4节里将介绍赋范空间与Banach空间中有界线性算子谱的重要性质, 最后还将某些结果推广到Banach代数中去.

为了理论完整, 除特殊声明外, 不考虑平凡向量空间 $\{0\}$, 并假定所有空间都是复的.

§6.1 有限维赋范空间的谱论

设 X 为有限维赋范空间, $T: X \rightarrow X$ 为一线性算子, 则 T 可由矩阵表示 (其依赖于 X 基的选择). 因此我们从讨论矩阵开始, 对于给定的 (实或复) 的 n 阶方阵 $A = (a_{jk})$, 其特征值和特征向量依下面方程

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

定义如下:

6.1-1 定义; (矩阵的特征值、特征向量、特征空间、谱、预解集). 方阵 $A = (a_{jk})$ 的特征值是使 (1) 有 $x \neq 0$ 解的数 λ , 并称 x 为对应特征值 λ 的一特征向量. 对应于特征值 λ 的全体特征向量与零向量形成一向量子空间, 称其为对应特征值 λ 的特征空间. A 的所有特征值集 $\sigma(A)$ 称为 A 的谱. 其在复平面的余集 $\rho(A) = C - \sigma(A)$ 称为 A 的予解集.

例如: 二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 由验算知 $x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $x_2 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 分别为对应特征值 $\lambda_1 = 6$ 与 $\lambda_2 = 1$ 的特征向量. 在一般

情况下矩阵特征值是否存在? 特征值、特征向量又如何计算? 为此首先注意方程 (1) 可改写成

$$(A - \lambda I)x = 0. \quad (2)$$

其中 I 为 n 阶单位方阵. (2) 是含有 x 的 n 个未知分量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 的齐次线性方程组, 为使 (2) 存在 $x \neq 0$ 解, 其系数行列式 $\det(A - \lambda I)$ 值应为零, 这样就得到 A 的特征方程:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

并称 $\det(A - \lambda I)$ 为 A 的特征行列式, 其展开为一 λ 的 n 次多项式, 称做 A 的特征多项式.

由上述得到下面基本结果:

6.1-2 定理(矩阵的特征值). n 阶方程 $A = (a_{jk})$ 的特征值由解 A 的特征方程 (3) 得出, 因此 A 至少有一特征值,

至多有 n 个不同的特征值.

(由代数基本定理及因式分解知 n 次多项式在复数中必有根, 且至多有 n 个不同的根. 注意 A 是实的, 其特征值可能是复的).

在上例中

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

则 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6$ 与 $\lambda_2 = 1$; 谱为 $\{6, 1\}$; 对应的特征向量可分别由

$$\begin{cases} -\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ \xi_1 - 4\xi_2 = 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases}$$

得到.

将上述结果用于 n 维赋范空间 X 上的线性算子 $T: X \rightarrow X$. 设 $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 为 X 的任一基, 并设 $T_e = (a_{ij})$ 为 T 关于该基的矩阵, 并称 T_e 的特征值、谱和予解集为算子 T 的特征值、谱和预解集; 这样规定合理性可由下面定理得知.

6.1-3 定理(算子的特征值). 在有限维赋范空间 X 上给定线性算子 $T: X \rightarrow X$, 对于 X 的不同基 T 的表示矩阵均有相同的特征值.

证明: 设 $e = (e_1, \dots, e_n)$ 与 $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ 为 X 中任意两基. 由基定义 e_i 可由 \tilde{e}_k 线性表示, 反之亦然, 即存在满秩方阵 C 有

$$\tilde{e} = eC \tag{4}$$

由于任一 $x \in X$ 对每一基均有唯一表示式则

$$x = ex_1 = \sum \xi_j e_j = \tilde{e} x_2 = \sum \tilde{\xi}_k \tilde{e}_k,$$

其中 $x_1 = (\xi_j)$ 与 $x_2 = (\tilde{\xi}_h)$ 为列向量, 由 (4) 则 $ex_1 = \tilde{e}x_2 = eCx_2$, 得

$$x_1 = Cx_2 \quad (5)$$

类似地, 对 $Tx = y = ey_1 = \tilde{e}y_2$ 亦有

$$y_1 = Cy_2 \quad (6)$$

若 T_1 与 T_2 各表示 T 在 e 与 \tilde{e} 下的矩阵, 则

$$y_1 = T_1x_1 \quad \text{与} \quad y_2 = T_2x_2 \text{ 并由 (5) 与 (6) 得}$$

$$CT_2x_2 = Cy_2 = y_1 = T_1x_1 = T_1Cx_2$$

左乘以 C^{-1} 得到矩阵变换关系,

$$T_2 = C^{-1}T_1C \quad (7)$$

下面证明对应 T_1 和 T_2 的特征行列式相等.

$$\begin{aligned} \det(T_2 - \lambda I) &= \det(C^{-1}T_1C - \lambda C^{-1}IC) \\ &= \det[C^{-1}(T_1 - \lambda I)C] \\ &= \det(C^{-1})\det(T_1 - \lambda I) \cdot \det C \\ &= \det(T_1 - \lambda I) \end{aligned} \quad (8)$$

由定理 6.1-2 知 T_1 与 T_2 有相同的特征值

上述结果可利用相似矩阵的概念表述如下: 若 n 阶方阵 T_1 与 T_2 , 存在满秩矩阵 C 有 (7) 式关系, 称 T_1 与 T_2 为相似矩阵. 则

(i) 有限维赋范空间 X 上的线性算子 T , 对任二不同基其表示矩阵是相似的.

(ii) 相似矩阵有相同的特征值.

由定理 6.1-2 与 6.1-3 还可直接得出.

6.1-4 存在定理(特征值) 有限维复的赋范空间 $X \neq \{\theta\}$ 上的线性算子, 至少存在一特征值.

另外在(8)中取 $\lambda = 0$ 得 $\det T_1 = \det T_2$,此行列式值反映了算子 T 的内在本质,故可用其确切地表达量 $\det T$.

习 题 6.1

1. 求下列矩阵之特征值与特征向量,其中 a 与 b 为实数且 $b \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

2. (Hermite矩阵) 证明Hermite矩阵 $A = (a_{jk})$ 的特征值均为实的(即 $\overline{A^T} = A$)

3. (斜-Hermite矩阵) 证明斜-Hermite矩阵 $A = (a_{jk})$ 的特征值为纯虚数或零(即 $\overline{A^T} = -A$)

4. (酉矩阵) 证明酉矩阵的特征值其绝对值(或模)为1.(即 $\overline{A^T} = A^{-1}$).

5. 设 X 为有限维内积空间, $T: X \rightarrow X$ 为线性算子.若 T 为自伴算子证明其谱是实的;若 T 为酉算子,证明其特征值的绝对值为1.

6. (迹) 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 n 阶方阵 $A = (a_{jk})$ 的 n 个特征值,其中某些或全部 λ_j 可以是相等的.证明各特征值之积等于 $\det A$;其和等于 A 的迹,即 A 之主对角线各元素的和记为:

$$\text{trace } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

7. (逆) 证明方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 存在的充分且必要条件是 A 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 均异于零.若 A^{-1} 存在证明其特征值为 $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$.

8. 证明二阶满秩矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ 其逆矩阵}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

若 A 的特征值为 λ_1, λ_2 , 如何从上式得出 A^{-1} 的特征值为 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2$?

9. 若方阵 $A = (a_{jk})$ 有特征值 λ_j , ($j = 1, \dots, n$) 证明 kA 有特征值 $k\lambda_j$; A^m ($m \in N$) 有特征值 λ_j^m

10. 若方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 且 P 为任一多项式, 证明方阵 $P(A)$ 的特征值为 $P(\lambda_j)$ $j = 1, \dots, n$.

11. 设 x_j 是 n 阶方阵 A 对应特征值 λ_j 的特征向量, C 为任一满秩 n 阶方阵. 证明: λ_j 为 $\tilde{A} = C^{-1}AC$ 的特征值且 $y_j = C^{-1}x_j$ 为对应的特征向量

12. 举一简单例说明一 n 阶方阵, 对于 R^n (或 C^n) 的基可以不完全是特征向量,

例如考虑

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. (相重数) 矩阵 A 的特征值 λ 之代数重数为其特征多项式根 λ 的重数, 对于 λ 的特征空间的维数, 称为 λ 的几何重数. 求下列变换对应矩阵的特征值及其重数并加以解释

$$n_j \xi_j + \xi_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad \eta_n = \xi_n$$

14. 证明: 特征值的几何重数不超过其代数重数 (参看习题 13)

15. 设 x 为不超过 $n-1$ 次的多项式与 $x=0$ 组成的空间 (通常对 $x=0$ 的次数不予定义), T 为 X 上的微分算子. 求 T 的所有特征值和特征向量以及其代数重数和几何重数.

§6.2 基本概念

上一节中的空间是有限维的, 现在研究任意维的赋范空间, 其谱论比起来要复杂了.

设 $X \neq \{\theta\}$ 为一复的赋范空间, $T: D(T) \rightarrow X$ 为线性算

子, 其中 $D(T) \subset X$. 今考察与 T 相联系的算子,

$$T_\lambda = T - \lambda I \quad (1)$$

其中 λ 为一复数, I 为与 $D(T)$ 上的恒等算子. 如果 T_λ 存在逆算子记为 $R_\lambda(T)$ 即

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \quad (2)$$

称其为 T 的预解算子, 或简称为 T 的预解式, 若在特定情况下算子 T 无需说明时, $R_\lambda(T)$ 可简写为 R_λ .

使用预解式的词是很贴切的, 因为 $R_\lambda(T)$ 是由解方程 $(T - \lambda I)x = y$ 而得到, 当 $R_\lambda(T)$ 存在时, 则 $x = T_\lambda^{-1}y = R_\lambda(T)y$.

重要的是: 研究 R_λ 的性质是认识算子 T 本身的基础. 当然 T_λ 与 R_λ 的许多重要性质要依赖于 λ . 需要考虑的有: 在复平面上使 R_λ 存在的所有 λ 集合; R_λ 的有界性; 及 λ 取什么值使 R_λ 的定义域在 X 中稠密等几个方面.

为了研究 T 、 T_λ 与 R_λ 下面引进谱论的基本概念:

6.2-1 定义(正则集、预解集、谱). 设 $X \neq \{\theta\}$ 为一复赋范空间, 且 $T: D(T) \rightarrow X$ 为定义域 $D(T) \subset X$ 上的线性算子, T 的正则值为一复数 λ 且同时满足:

(R_1) $R_\lambda(T)$ 存在

(R_2) $R_\lambda(T)$ 有界

(R_3) $R_\lambda(T)$ 定义在 X 的稠密子集上

T 的**预解集** $\rho(T)$ 是 T 的所有正则值的集. 其在复平面上的余集称为 T 的**谱**. $\sigma(T) = C - \rho(T)$, 且 $\lambda \in \sigma(T)$ 称为 T 的一**谱值**. 此外, 将谱 $\sigma(T)$ 分成以下三个互不相交集:

点谱或离散谱 $\sigma_p(T)$: 是使 $R_\lambda(T)$ 不存在的集; $\lambda \in \sigma_p(T)$ 称为 T 的**特征值**.

连续谱 $\sigma_c(T)$: 是使 $R_\lambda(T)$ 存在且满足 (R_3) 但不满足 (R_2) , 即 $R_\lambda(T)$ 是无界的.

剩余谱 $\sigma_r(T)$: 是使 $R_\lambda(T)$ 存在 (可以有界或无界) 但不满足 (R_3) , 即 $R_\lambda(T)$ 在 X 中的定义域不是稠密的.

定义 6.2-1 中的条件要求可概述如下表:

满 足	不 满 足	λ 属 于
$(R_1), (R_2), (R_3),$		$\rho(T)$
(R_1)	(R_1)	$\sigma_p(T)$
(R_3)	(R_2)	$\sigma_c(T)$
(R_1)	(R_3)	$\sigma_r(T)$

在上述定义中的集有时有的可能为空集, 而这正是需要讨论的存在性问题. 例如在 6.1-2 中有限维的情况下 $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \phi$. 表中的四集为互不相交, 且其并为整个复平面.

$$C = \rho(T) \cup \sigma(T)$$

$$= \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

由定理 2.6-10 得知若预解算子 $R_\lambda(T)$ 存在则其为线性的, 且 $R_\lambda(T): R(T_\lambda) \rightarrow D(T_\lambda)$ ($R(T_\lambda)$ 为 T_λ 的值域) 存在当且仅当: 由 $T_\lambda x = \theta$ 蕴涵 $x = \theta$, 即 T_λ 的零空间为 $\{\theta\}$.

因此对 $x \neq \theta$ 且 $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = \theta$ 由定义知 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 即 λ 为 T 的特征值. 向量 x 称为 T 的对应特征值 λ 的特征向量 (若 X 为函数空间, x 也可称作 T 的特征函数), 由对应 T 的特征值 λ 的所有特征向量与零向量组成 $D(T)$ 的子空间, 称作 T 的对应特征值 λ 的特征空间.

可以看到在这里定义的特征值与前一节的定义是一致

的, 在有限维空间线性算子的谱是纯点谱, 即其连续谱与剩余谱均为空集, 从而每一个谱值都是特征值. 但在无限维空间线性算子 T 可以有非特征值的谱值.

6.2-2 例(具有不是特征值的谱值的算子). 在 Hilbert 序列空间 $X = l^2$ (参看 3.1-6) 上, 由

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots) \quad (3)$$

定义线性算子 $T: l^2 \rightarrow l^2$, 其中 $x = (\xi_j) \in l^2$, 称算子 T 为右移算子, 由

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 = \|x\|^2$$

知 T 是有界的且 $\|T\| = 1$. 算子 $R_0(T) = T^{-1}: T(X) \rightarrow X$ 是存在的, 其为左移算子由

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots)$$

给定. 但 $R_0(T)$ 并不满足 (R_3) , 因为由 (3) 可知 $T(X)$ 是由所有的 $y = (\eta_j)$ 且 $\eta_1 = 0$ 构成的子空间 Y , 但 Y 在 X 中不是稠密的, 所以根据定义 $\lambda = 0$ 是 T 的谱值但不是特征值. 这还可直接从 (3) 式中看出, 由 $Tx = \theta$ 得到 $x = \theta$, 而零向量不是特征向量.

结合有界逆算子定理 4.11-3 可得以下结论: 若 X 为完备空间, 且 $T: X \rightarrow X$ 为有界线性算子, 又对某些 λ : 预解式 $R_\lambda(T)$ 存在并在全空间 X 上有定义, 则对应 λ 的预解式 $R_\lambda(T)$ 为有界的.

此外, 以下的结论在后面要用到, 且有助于更好地理解当前的概念.

6.2-3 引理(R_λ 的定义域). 设 X 为复的 Banach 空间, $T: X \rightarrow X$ 为线性算子且 $\lambda \in \rho(T)$, 若

(a) T 是闭的. 或者

(b) T 是有界的.

则 $R_1(T)$ 在整个空间 X 上有定义且有界.

证明: (a)由 T 是闭的, 根据4.12-3知 T_1 是闭的, 因而 R_1 是闭的, 从 (R_2) 得 R_1 有界, 再将4.12-5(b)用于 R_1 , 则

R_1 的定义域 $D(R_1)$ 是闭的, 根据 (R_3) $D(R_1) = \overline{D(R_1)} = X$

(b)因 $D(T) = X$ 是闭的, 由4.12-5(a)知 T 是闭的, 再由(a)之结果得证

习 题 6.2

1. (恒等算子) 求赋范空间 X 上恒等算子 I 的特征值、特征空间及 $\sigma_p(I)$ 和 $R_1(I)$.

2. 证明: 对线性算子 T , 集 $\rho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, 和 $\sigma_r(T)$ 互不相交, 它们的并为复平面.

3. (不变子空间) 赋范空间 X 的子空间 Y 在线性算子 $T: X \rightarrow X$ 下, 若 $T(Y) \subset Y$, 称 Y 为在 T 下的不变子空间. 证明: T 的特征空间是 T 下的不变子空间. 试给出一例.

4. 若 Y 是 n 维赋范空间 X 的线性算子 T 下的不变子空间, 若 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 X 的一基且

$Y = \text{span} \{e_1, \dots, e_n\}$ 对于算子 T 其在基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 下的表示矩阵有什么特点?

5. 设 (e_k) 为可分Hilbert空间 H 中的完全标准直交序列, 且 $T: H \rightarrow H$ 由

$$T e_k = e_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

定义并线性与连续地扩充到整个 H 的算子, 求其不变子空间并证明 T 无特征值.

6. (扩张) 在算子扩张下考察谱的各部分变化有实际意义. 若 T

为有界线性算子, T_L 是 T 的扩张, 试证明 $\sigma_p(T_L) \supset \sigma_p(T)$ 且 对任意 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 对应 T 的特征空间包含于 T_L 的特征空间中.

7. 证明习题 6 中的 $\sigma_r(T_L) \subset \sigma_r(T)$

8. 证明习题 6 中的 $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(T_L) \cup \sigma_p(T_L)$

9. 直接证明 (不用习题 6 与 8 的结果) 习题 6 中的 $\rho(T_L) \subset \rho(T) \cup \sigma_r(T)$

10. 根据习题 6 与习题 8 的结果如何证明习题 9?

§6.3 有界线性算子谱的性质

算子谱的性质, 依赖于算子所定义的空间及算子的类型, 为此分别研究其谱具有共同性质的几大类算子. 首先考察的是复的 Banach 空间 X 上有界线性算子 T , 即 $T \in B(X, X)$. 下面定理是其谱论的关键.

6.3-1 定理 (逆算子). 设 X 为 Banach 空间, $T \in B(X, X)$, 若 $\|T\| < 1$, 则 $(I - T)^{-1}$ 存在, 其为全空间 X 上的有界线性算子, 且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i = I + T + T^2 + \dots \quad (1)$$

(右边的级数依 $B(X, X)$ 上的范数收敛)

证明: 由 T 有界易知, $\|T^i\| \leq \|T\|^i$, (1) 中级数对 $\|T\| < 1$ 绝对收敛. 由 X 为完备再根据 2.7-14 知, $B(X, X)$ 完备, 且由 2.3 节得知绝对收敛蕴涵收敛.

$$\text{设 } S = \sum_{i=0}^{\infty} T^i \quad \text{今证 } S = (I - T)^{-1} \text{ 由}$$

$$(I - T)(I + T + \dots + T^n)$$

$$= (I + T + \dots + T^n)(I - T) = I - T^{n+1} \quad (2)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 由 $\|T\| < 1$, 则 $T^{n+1} \rightarrow 0$, 得

$$(I - T)S = S(I - T) = I \quad (3)$$

则 $S = (I - T)^{-1}$ 得证

应用上述定理证明有界线性算子谱的重要性质：其在复平面上为闭集.

6.3-2 定理(谱的闭性). Banach空间 X 上的有界线性算子的预解集 $\rho(T)$ 为开集, 即其谱 $\sigma(T)$ 为闭集.

证明: 若 $\rho(T) = \emptyset$ 定理得证.

设 $\rho(T) \neq \emptyset$, 对固定 $\lambda_0 \in \rho(T)$ 与任一 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned} T - \lambda I &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}] \end{aligned}$$

令 $V = [I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}] = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}$, 则上式可写成

$$T_\lambda = T_{\lambda_0} V \quad (4)$$

由 $\lambda_0 \in \rho(T)$ 且 T 有界由6.2-3引理(b)知 $R_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}^{-1} \in B(X, X)$ 对于所有的 $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1$, 即

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \quad (5)$$

的 λ , 由定理6.3-1知 V 在 $B(X, X)$ 中有一逆

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \quad (6)$$

再由 $T_{\lambda_0}^{-1} = R_{\lambda_0} \in B(X, X)$, 由(4)式对满足(5)的 λ , 算子 T_λ 存在逆算子

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0} \quad (7)$$

所以(5)式表示 T 的正则值 λ 集为 λ_0 一邻域, 由 $\lambda_0 \in \rho(T)$ 为任意则 $\rho(T)$ 为开集, 其余集 $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ 为闭集

从上述证明中, 还可以得到用 λ 的幂级数来表示预解式

这一重要结果. 事实上从(5)、(6)、(7)式可直接得出下面基本表示式:

6.3-3 表示定理(预解式). 对于6.3-2的 X 与 T , 及每一 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 预解式 $R_\lambda(T)$ 可表示为

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}$$

该级数对于复平面上满足 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ 的开圆盘中的 λ 绝对收敛, 且此圆盘为 $\rho(T)$ 的子集.

从6.3-1定理可以得到下面的重要结论: 有界线性算子的谱在复平面上为有界集, 精确表叙如下:

6.3-4 定理(谱) 复的Banach空间 X 上的有界线性算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 为圆盘

$$|\lambda| \leq \|T\| \quad (8)$$

上的紧集 (从而 $\rho(T) \neq \emptyset$)

证明: 设 $\lambda \neq 0$ 且 $k = 1/\lambda$, 由定理6.3-1得.

$$\begin{aligned} R_\lambda &= (T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} (I - kT)^{-1} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (kT)^j = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^j \end{aligned} \quad (9)$$

级数对于满足

$$\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1 \quad \text{即} \quad |\lambda| > \|T\|$$

所有 λ 收敛且 $\lambda \in \rho(T)$, 因此谱 $\sigma(T) = C - \rho(T)$ 必在圆盘(8)中, 故 $\sigma(T)$ 有界, 再由6.3-2知 $\sigma(T)$ 为闭集故其为紧

集.

从上面定理知该谱有界, 自然会考虑包含整个谱的最小圆盘问题, 为此引出下述概念:

6.3-5 定义 (谱半径). 复Banach空间 X 的算子 $T \in B(X, X)$ 的谱半径 $r_o(T)$ 为在复 λ -平面上以原点为中心的包含 $\sigma(T)$ 之最小圆盘的半径, 即

$$r_o(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

又从(8)式得知

$$r_o(T) \leq \|T\|$$

利用解析函数性质还可以进一步证明:

$$\sigma(T) \neq \emptyset$$

$$r_o(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

习 题 6.3

1. 设 $X = C[0, 1]$, 并依 $Tx = Vx$ ($V \in X$ 且固定) 定义 T , 求 $\sigma(T)$. (注意 $\sigma(T)$ 为闭)
2. 求一线性算子 $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ 其谱为给定的区间 $[a, b]$
3. 若 V 为对应于算子 T 的特征值 λ 的特征空间, $T|V$ 的谱是什么?
4. 设 $T: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为 $y = Tx$, $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$
 $\eta_j = a_j \xi_j$, 其中 $\{a_j\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密. 试求 $\sigma_p(T)$ 及 $\sigma(T)$
5. 在习题4中若 $\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$ 证明 $R_\lambda(T)$ 无界.
6. 扩充习题4, 求一线性算子 $T: l^2 \rightarrow l^2$, 其特征值在给定紧集 $K \subset \mathbb{C}$ 为稠密且 $\sigma(T) = K$
7. 若 $T \in B(X, X)$ 证明当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 $\|R_\lambda(T)\| \rightarrow 0$
8. 设 $X = C[0, \pi]$ 并定义 $T: D(T) \rightarrow X$ 为 $x \mapsto x''$, 其中:

$$D(T) = \{x \in X \mid x', x'' \in X, x(0) = x(\pi) = 0\}$$

证明 $\sigma(t)$ 不是紧集.

9. 设 $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ 定义为 $x \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots)$ 其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$

(a) 若 $|\lambda| > 1$ 证明: $\lambda \in \rho(T)$

(b) 若 $|\lambda| \leq 1$ 证明: λ 为一特征值, 并求对应特征空间 Y .

10. 设 $T: l^p \rightarrow l^p$ 定义为 $x \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots)$ 其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ 且 $1 \leq p < +\infty$, 若 $|\lambda| = 1$ (如习题 9) 其为 T 的特征值吗?

§6.4 预解式与谱的其他性质

下面的几个定理进一步给出预解式和谱的重要和基本性质.

6.4-1 定理 (预解方程, 交换性). 设 X 为一复的 Banach 空间, $T \in B(X, X)$ 且 $\lambda, \mu \in \rho(T)$, 则

(a) T 的预解式 R_λ 满足下面预解方程或称为 Hilbert 关系式:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu \quad (1)$$

(b) 若对任意 $S \in B(X, X)$ 均能与 T 交换, 则其亦能与 R_λ 交换.

(c) 下式成立

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \quad (2)$$

证明 (a) 由 6.2-3 知 R_λ 定义域为整个 X 空间, 因此 $T_\lambda R_\lambda = I$ (恒等算子), 同理 $R_\mu T_\mu = I$

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= R_\mu (T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu) R_\lambda \\ &= R_\mu (T_\lambda - T_\mu) R_\lambda \\ &= R_\mu [T - \lambda I - (T - \mu I)] R_\lambda \\ &= (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \end{aligned}$$

(b) 由假设 $ST = TS$ 因而 $ST_\lambda = T_\lambda S$ 利用 $T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda = I$ 得

$$R_\lambda S = R_\lambda ST_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = S R_\lambda$$

(c) 在(b)中第一次令 $S = T$, 再令 $S = R_\lambda$ 得

$$R_\lambda R_\lambda = R_\lambda R_\lambda$$

下一个结果是重要的谱映射定理, 其可以从矩阵特征值定理中得到启示:

若 λ 为方阵 A 之特征值, 则存在 $x \neq 0$ 使 $Ax = \lambda x$, 将 A 作用其上得

$$A^2 x = A \lambda x = \lambda A x = \lambda^2 x$$

归纳证明对任意正整数 m 均有

$$A^m x = \lambda^m x$$

即 λ 若为 A 的一特征值, 则 λ^m 为 A^m 的一特征值. 更一般地得到

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

为方阵

$$p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$$

的一特征值. 我们可将此性质推广到任意维 Banach 空间中去, 为证明方便起见, 引用下列符号

$$p(\sigma(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu = p(\lambda), \lambda \in \sigma(T)\} \quad (3)$$

即 $p(\sigma(T))$ 为对于谱值 $\lambda \in \sigma(T)$ 上的多项式 $p(\lambda)$ 所有复数之集. 同样 $p[\rho(T)]$ 也有类似的意义.

6.4-2 谱的多项式映射定理. 设 X 为一复 Banach 空间, $T \in B(X, X)$ 且

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \quad (\alpha_n \neq 0)$$

则 $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$

即：算子

$$p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1} T^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$$

的谱值 $\sigma(p(T))$ 为值 $\sigma(T)$ 上的多项式 $p(\sigma(T))$ 所有复数之集

证明：假设 $\sigma(T) \neq \phi$ (见6.3-5)

当 $n=0$ 时 $p(\sigma(T)) = \{\alpha_0\} = \sigma(p(T))$ 命题成立

$n>0$ (a) 先证

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)) \quad (4)$$

令 $S = p(T)$ 则

$$S_\mu = p(T) - \mu I \quad (\mu \in C)$$

若 S^{-1} 存在则其应为 $p(T)$ 的预解算子，现将 μ 固定，由于 X 为复的，多项式 $S_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$ 可分解为 n 个一次因式：

$$S_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu = \alpha_n (\lambda - r_1) (\lambda - r_2) \cdots (\lambda - r_n) \quad (5)$$

其中 r_1, r_2, \cdots, r_n 为 $S_\mu(\lambda)$ 的根，对应的算子为

$$S_\mu = p(T) - \mu I = \alpha_n (T - r_1 I) (T - r_2 I) \cdots (T - r_n I)$$

若每一 r_i 在 $\rho(T)$ 中，由定理6.2-3每一 $(T - r_i I)$ 存在定义在整个空间 X 上的有界逆算子，且

$$S_\mu^{-1} = \frac{1}{\alpha_n} (T - r_n I)^{-1} (T - r_{n-1} I)^{-1} \cdots (T - r_1 I)^{-1}$$

故 $\mu \in \rho(p(T))$ 其等价于

$$\mu \in \sigma(p(T)) \implies \text{存在 } r_i \in \sigma(T)$$

由(5)得

$$S_\mu(r_i) = p(r_i) - \mu = 0$$

因此

$$\mu = p(r_i) \in p(\sigma(T))$$

由 $\mu \in \sigma(p(T))$ 为任意则 (4a) 得证

(b) 再证

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T)) \quad (6)$$

即 $K \in p(\sigma(T)) \implies K \in \sigma(p(T))$

令 $K \in p(\sigma(T))$ 由定义存在一谱值 $\beta \in \sigma(T)$ $K = p(\beta)$

下面分作两种情况讨论

(A) $T - \beta I$ 不存在逆算子

从 $K = p(\beta)$ 得 $p(\beta) - K = 0$ 则 β 为多项式

$$S_k(\lambda) = p(\lambda) - K$$

的一根, 故

$$S_k(\lambda) = p(\lambda) - K = (\lambda - \beta)g(\lambda)$$

其中 $g(\lambda)$ 可以表示为 α_n 与其他 $n-1$ 个一次因子的乘积, 其所对应的算子为

$$S_k = p(T) - KI = (T - \beta I)g(T) \quad (7)$$

由于 $g(T)$ 的所有因子均可与 $T - \beta I$ 交换, 则可得到

$$S_k = g(T)(T - \beta I) \quad (8)$$

假如 S_k 存在逆算子, 由 (7)、(8) 可推得

$$I = (T - \beta I)g(T)S_k^{-1} = S_k^{-1}g(T)(T - \beta I)$$

这说明 $T - \beta I$ 存在逆算子, 与假设矛盾. 因此, 对于 K , $p(T)$ 不存在预解式 S_k^{-1} , 故 $K \in \sigma(p(T))$ 由 $K \in p(\sigma(T))$ 为任意, 命题在 $T - \beta I$ 不存在逆的情况下成立

(B) $T - \beta I$ 存在逆算子

设 $\beta \in \sigma(T)$, $k = p(\beta)$ 由 $(T - \beta I)^{-1}$ 存在, 则 $T - \beta I$ 的值域

$$R(T - \beta I) \neq X \quad (9)$$

否则, 将 4.11-3 有界逆算子定理应用于算子 $T - \beta I$ 得

$\beta \in p(T)$ 这与假设 $\beta \in \sigma(T)$ 矛盾

再由 (7) 与 (9) 知

$$R(s_k) \neq X$$

这意味着 $k \in \sigma[p(T)]$, 不然的话则 $k \in \rho(p(T))$, 应用 6.2-3 引理 (b) 于 $p(T)$ 得 $R(s_k) = X$ 矛盾.

由 (A)、(B) 则 (b) 得证. 联合 (a)、(b) 命题成立

最后研究特征向量的一基本性质

6.4-3 定理 (线性无关性). 在向量空间 X 上, 对应线性算子 T 的不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量 x_1, x_2, \dots, x_n , 组成一线性无关集.

证明: 先假设 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 线性相关, 然后导出矛盾. 令 x_m 为第一个可由前面几个向量线性表出的向量 即

$$x_m = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} \quad (10)$$

且 $\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ 为线性无关的. 对 (10) 的两边施以 $T - \lambda_m I$ 得

$$\begin{aligned} (T - \lambda_m I)x_m &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (T - \lambda_m I)x_j \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m)x_j \end{aligned}$$

由 x_m 为对应 λ_m 的特征向量, 上式左端应为零. 再由 x_1, \dots, x_{m-1} 的线性无关假设得

$\alpha_j (\lambda_j - \lambda_m) = 0$, 但 $\lambda_j \neq \lambda_m (j = 1, 2, \dots, m-1)$ 因而 $\alpha_j = 0$, 由 (10) 得 $x_m = 0$ 与 x_m 为特征向量矛盾, 命题得证.

习 题 6.4

1. 不用 (1) 或 6.4-(b) 来直接证明 (2)
2. 从 (1) 导出 (2)
3. 若 $S, T \in B(X, X)$, 证明对任意 $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$

$$R_A(s) - R_A(T) = R_A(s)(T - s)R_A(T)$$

4. 设 X 为复 Banach 空间, $T \in B(X, X)$, 且 p 为一多项式, 证明方程

$$p(T)x = y \quad (x, y \in X)$$

对每一 $y \in X$ 有唯一解 x 的充分必要条件是: 对所有 $\lambda \in \sigma(T)$ $p(\lambda) \neq 0$

5. 在定理 6.4-2 中, 为什么空间 X 必需为复的?

6. 用定理 6.4-2, 求 n 阶方程存在 n 个能张成全空间 C^n (或 R^n) 的特征向量的充分条件.

7. 证明, 复 Banach 空间 X 上任一算子

$$T \in B(X, X) \text{ 有}$$

$$r_s(\alpha T) = |\alpha| r_s(T), \quad r_s(T^k) = [r_s(T)]^k \quad (k \in N)$$

其中 r_s 表示谱半径

8. 确定下述矩阵的特征值(α)通过直接计算.

(b) 通过证明 $A^2 = I$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. (幂等算子) 设 T 为 Banach 空间上有界线性算子, 若 $T^2 = T$ 称 T 为幂等的. 试举一例并证明若 $T \neq 0$ 且 $\neq I$ 则其谱为 $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

(a) 通过 6.3 节 (9) 式证明

(b) 通过 6.4-2 定理证明

10. 证明矩阵

$$T_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表示一关于标准化直交基 B 的等幂算子

$T: R^3 \rightarrow R^3$

(a) 利用习题9证明 $\sigma(T) = \{0, 1\}$

(b) 直接计算

并求其特征向量与特征空间.

§6.5 Banach 代 数

值得考虑的是, 谱的存在也与Banach代数有关. 所谓Banach代数其既为Banach空间同时又是一代数. 并且在此两概念中有一个“相容关系”. 下面我们先从有关的概念开始介绍.

一数域 K 上的代数 A 为 K 上的向量空间, 且在其上定义了乘法, 即对于 A 中任一对有序元素 $x, y \in A$, 存在唯一元素 $xy \in A$. 并满足下列运算性质:

对所有 $\alpha \in K$ 及 $x, y, z \in A$ 有,

$$(xy)z = x(yz) \quad (1)$$

$$x(y+z) = xy + xz \quad (2a)$$

$$(x+y)z = xz + yz \quad (2b)$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad (3)$$

若 $K = R$ 或 C , 则 A 称为实的或复的代数.

若 A 中的乘法是交换的, 即对于任何 $x, y \in A$, 有

$$xy = yx \quad (4)$$

则称 A 为交换 (或Abel) 代数.

若 A 中含一元素 e 使得对所有 $x \in A$ 有,

$$ex = xe = x \quad (5)$$

称 e 为 A 的单位元素. 并称 A 为有单位元素的代数. 若 A 有单位元素, 则其是唯一的. 事实上, 若 e 与 e' 均为 A 的单元

素. 则,

$$ee' = e \quad (e' \text{ 是单位元素})$$

$$ee' = e' \quad (e \text{ 是单位元素})$$

$$\text{即 } e = e'$$

6.5-1 定义 (赋范代数, Banach代数). 赋范代数 A 为一赋范空间又是一代数且对于所有的 $x, y \in A$ 有,

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad (6)$$

若 A 含单位元素 e 时设其范数 $\|e\| = 1$.

Banach代数为一赋范代数, 将其看作赋范空间时它还是完备的.

注意(6) 式为乘法和范数联系关系. 并且从

$$\begin{aligned} \|xy - x_0y_0\| &= \|x(y - y_0) + (x - x_0)y_0\| \\ &\leq \|x\| \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \|y_0\| \end{aligned}$$

看出, 乘积为其因子的二元连续函数.

从下面诸例可以看出, 很多常见的空间都是 Banach 代数.

例:

6.5-2 空间 R 与 C . 实直线 R 与复平面 C 为具有单位元素 $e = 1$ 的交换 Banach 代数.

6.5-3 空间 $C[a, b]$. 乘积按通常定义:

$$(xy)(t) = x(t)y(t) \quad t \in [a, b]$$

其为具有单位元素 ($e = 1$) 的交换 Banach 代数, 关系式(6) 不难验证成立

由一切多项式构成的 $C[a, b]$ 子空间是一含单位元素 ($e = 1$) 的交换赋范代数.

6.5-4 矩阵. 所有复 $n \times n$ 矩阵 ($n > 1$ 且固定) 组成的向量空间 X 是具有单位元素 I (n 阶单位矩阵) 的不可交换代数, 且通过在 X 上定义一范数 (见2.7节习题8), 可得到Banach代数.

6.5-5 空间 $B(X, X)$. 复Banach空间 $X \neq \{\theta\}$ 上的一切有界线性算子组成的Banach空间 $B(X, X)$ 其中乘法定义为算子的合成, 关系式(6) 是

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$$

故其为含单位元素 I (X 上的恒等算子) 的Banach代数, 除了 $\dim X = 1$, $B(X, X)$ 均为不可交换的.

设 A 为具有单位元素的代数, $x \in A$ 若存在 $x^{-1} \in A$, 使得

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e$$

称 x^{-1} 为 x 的逆并称 x 为可逆的.

若 x 为可逆的, 则其逆是唯一的. 事实上, 由 $yx = e = xz$ 得

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

用上述概念, 可表达下列定义.

6.5-6 定义(预解集、谱). 设 A 为一具有单位元素的Banach代数, $x \in A$ 的预解集 $\rho(x)$ 为使 $x - \lambda e$ 为可逆的所有复数 λ 所成之集. x 的谱 $\sigma(x)$ 为 $\rho(x)$ 在复平面上的余集 $\sigma(x) = C - \rho(x)$, 任一 $\lambda \in \sigma(x)$ 称为 x 的谱值.

因此: $x \in A$ 的谱值是复数 λ 其使 $x - \lambda e$ 不存在逆.

自然会考虑这样一个问题, 若 X 为复的Banach空间, 则 $B(X, X)$ 为一Banach代数, 上述6.5-6定义可以使用, 但其是否与前边的6.2-1定义相一致? 下面的结果证明确系如此.

设 $T \in B(X, X)$ 且 λ 依 6.5-6 定义属于预解集 $\rho(T)$ 因而 $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ 存在且 $R_\lambda(T) \in B(X, X)$, 即 $R_\lambda(T)$ 为定义在 X 上的有界线性算子则 $\lambda \in \rho(T)$, 其中 $\rho(T)$ 是由 6.2-1 定义的.

反之, 设 $\lambda \in \rho(T)$, 其中 $\rho(T)$ 由 6.2-1 定义, 则 $R_\lambda(T)$ 存在且为线性、有界并定义在 X 一稠密子集上. 由引理 6.2-3(b) 推得 $R_\lambda(T)$ 定义在全空间上, 因此 $\lambda \in \rho(T)$, 其中 $\rho(T)$ 是由 6.5-6 定义的.

故 6.2-1 与 6.5-6 所定义的预解集和谱是一致的.

习 题 6.5

1. 例 6.5-4 中 X 为什么是完备的?
2. 证明例 6.5-3 中的 (6) 式成立.
3. 怎样使 n 个复数有序组构成的向量空间成为一 *Banach* 代数?
4. (a) 6.5-2, (b) 6.5-3 (c) 6.5-4

中的可逆元素各是什么?

5. 证明 6.5-4 中 X 元素的谱其按 6.5-6 定义与按 6.1-1 定义相一致.

6. 求 $x \in C[a, b]$ 的 $\sigma(x)$ 其中 $x(t) = \sin t$

对任意 $x \in C[a, b]$ 求出 $\sigma(x)$.

7. 证明一向量空间到自身的所有线性算子所成之集构成一代数.

8. 设 A 为含单位元素的复 *Banach* 代数, 若对于 $x \in A$ 存在 $y, z \in A$, 且 $yx = e, xz = e$, 试证 x 为可逆的且 $y = z = x^{-1}$.

9. 若 $x \in A$ 为可逆且与 $y \in A$ 可交换, 试证 x^{-1} 与 y 亦可交换.

10. 代数 A 的子集 A_1 , 若将各运算作用于 A_1 中的元素结果仍在 A_1 中时, 称 A_1 为 A 的子代数. 与 A 中所有元素均能交换的元素所成集 C 称为 A 的中心, 试给出实例. 并证明 C 是 A 的一可交换的子代数.

§6.6 Banach代数的进一步性质

这一章要说明这样一重要事实，就是本章前几节的某些结果可以推广到Banach代数中去.

6.6-1 定理(逆). 设 A 为含有单位元素 e 的复Banach代数, 若 $x \in A$ 且 $\|x\| < 1$, 则 $e - x$ 为可逆的且

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{i=1}^{\infty} x^i, \quad (1)$$

证明: 由上节(6)式得 $\|x^i\| \leq \|x\|^i$, 又因 $\|x\| < 1$ 所以级数(1)绝对收敛, 再由 A 是完备的知其收敛. 令 S 为其和, 今证 $S = (e - x)^{-1}$

$$\begin{aligned} & (e - x)(e + x + \cdots + x^n) \\ &= (e + x + \cdots + x^n)(e - x) = e - x^{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由 $\|x\| < 1$ 则 $x^{n+1} \rightarrow 0$, 且 A 中乘法是连续的, 故由(2)式得

$$(e - x)S = S(e - x) = e$$

即 $S = (e - x)^{-1}$ 定理得证

若给定一含单位元素 e 的复Banach代数 A , 考虑 A 中所有可逆元素构成的子集 G , 其所以用 G 表示, 因为其为一群(参看附录1的A.18)

事实上, $e \in G$, 若 $x \in G$ 由 $(x^{-1})^{-1} = x \in G$ 知 $x^{-1} \in G$ 又若 $x, y \in G$ 由

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = e = (y^{-1}x^{-1})(xy),$$

知 $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$ 即 $xy \in G$.

下面证明 G 为开集

6.6-2 定理(可逆元素). 设 A 为一具有单位元素的复

Banach代数, 则 A 之所有可逆元素之集 G 为 A 的开子集, 即所有不可逆元素之集 $M = A - G$ 为 A 闭子集.

证明: 若 $x_0 \in G$, 则 $\|x_0^{-1}\| \neq 0$, 今证明对于 $x \in A$ 且满足

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$$

之 x 均在 G 中.

令 $z = e - x_0^{-1}x$ 则

$$\begin{aligned}\|z\| &= \|e - z\| = \|x_0^{-1}x - x_0^{-1}x_0\| \\ &= \|x_0^{-1}(x - x_0)\| \leq \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\| < 1\end{aligned}$$

由6.6-1定理知 $e - z = x_0^{-1}x \in G$, 又由 G 为一群故

$$x_0(x_0^{-1}x) = x \in G$$

由 x 的任意性证得 G 为开集其余集 M 为闭集

参照6.5-6定义, $x \in A$ 的谱半径 $r_0(x)$ 定为

$$r_0(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \quad (3)$$

6.6-3 定理(谱). 设 A 为含单位元素 e 的复Banach代数, 则对于任意 $x \in A$, 其谱 $\sigma(x)$ 为紧的且其谱半径满足

$$r_0(x) \leq \|x\| \quad (4)$$

证明: 若 $|\lambda| > \|x\|$ 则 $\|\lambda^{-1}x\| < 1$, 根据6.6-1 $e - \lambda^{-1}x$ 为可逆的, 故 $-\lambda(e - \lambda^{-1}x) = x - \lambda e$ 亦为可逆的, 即 $\lambda \in \rho(x)$, (4)式得证. 且 $\sigma(x)$ 为有界.

若 $\lambda_0 \in \rho(x)$ 则 $x - \lambda_0 e$ 由定义知其可逆, 根据6.6-2存在 $x - \lambda_0 e$ 为中心一邻域 $N \subset A$, 其中全为可逆元素. 现对固定的 x 映射 $\lambda \mapsto x - \lambda e$ 为连续的, 当 λ 充分接近 λ_0 时, 如 $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ 其中 $\delta > 0$ 相应的 $x - \lambda e \in N$, 由这些 $x - \lambda e$ 可逆, 故 $\lambda \in \rho(x)$. 由于 $\lambda_0 \in \rho(x)$ 的任意性可知 $\rho(x)$ 为开集,

$\sigma(x) = C - \rho(x)$ 为闭集.

上述定理也证明了 $\rho(x) \neq \phi$, 利用解析函数知识还可以证明: 在同样假设条件下 $\sigma(x) \neq \phi$

在以往的讨论中, 单位元素 e 的存在是必不可少的, 在许多应用中的 A 确具有单位元素, 但也要提一下在不存在单位元素时该怎么办? 下面是对 A 提供一单位元素的典型方式

令 \tilde{A} 为一切有序对 (x, α) 所成之集, 其中 $x \in A$, α 为数量、并定义

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta)$$

$$\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta \alpha)$$

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta)$$

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$$

$$\tilde{e} = (0, 1)$$

则 \tilde{A} 为一具有单位元素 \tilde{e} 的 Banach 代数, 事实上 6.5 节的 (1), (2), (3), (6) 与 (7) 很容易验证, \tilde{A} 的完备性可从 A 与 C 完备中得出.

此外, 当 A 与 \tilde{A} 均看作赋范空间时, 映射 $x \mapsto (x, 0)$ 为 A 到 \tilde{A} 一子空间的同构. 该子空间的剩余维数为 1. 若将 x 与 $(x, 0)$ 看作一样的, 则 \tilde{A} 可简化为 A 再加上由 \tilde{e} 生成的一维向量空间.

习 题 6.6

1. 若 $\|x - e\| < 1$, 试证 x 为可逆的, 且

$$x^{-1} = e + \sum_{j=1}^{\infty} (e - x)^j$$

2. 在定理6.6-1中证明

$$\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

3. 若 x 为可逆的且 y 满足 $\|yx^{-1}\| < 1$
对任意 $a \in A$ 记 $a^0 = e$, 试证 $x - y$ 为可逆的且

$$(x - y)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} x^{-1} (yx^{-1})^j$$

4. 试证一切形如

$$x = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的复数阵所成之集为由二阶方阵集所成之代数的子代数, 并求 $\sigma(x)$

5. Banach代数 A 之元素 x 的谱 $\sigma(x)$ 要依赖于 A . 试证明若 B 为 A 的子代数, 则

$$\widetilde{\sigma}(x) \supset \sigma(x) \text{ 这里 } \widetilde{\sigma}(x) \text{ 为将 } x \text{ 看作 } B \text{ 之元素的谱.}$$

6. 设 $\lambda, \mu \in \rho(x)$ 试证预解方程

$$v(\mu) - v(\lambda) = (\mu - \lambda)v(\mu)v(\lambda)$$

成立, 其中 $v(x) = (x - \lambda e)^{-1}$

7. 可除代数为一含有单位元素的代数且对每一非零元素均为可逆的.

若复Banach代数 A 为可除代数, 试证 A 为单位元素与所有数量乘积所成之集.

8. 设 G 是6.6-2所定义的, 试证由

$x \rightarrow x^{-1}$ 确定的映射 $G \rightarrow G$ 为连续的.

9. $x \in A$ 的左逆元素为 $y \in A$, 即 $yx = e$, 类似地若 $xz = e$ 则²
为 x 一右逆元素. 若一代数 A 的每一元素 $x \neq 0$ 均有左逆, 试证 A 为一

可除代数

10. 若 (x_n) 与 (y_n) 为一赋范代数 A 中的 Cauchy 序列, 试证 $(x_n y_n)$ 亦为 A 中的 Cauchy 序列. 此外, 若 $x_n \rightarrow x$ 和 $y_n \rightarrow y$, 证明 $x_n y_n \rightarrow xy$.

第七章 赋范空间上的紧线性算子及其谱

紧线性算子有很重要的应用，其在积分方程及众多数学物理问题中均起关键作用，而其性质又近似于有限维空间上的算子。对于紧线性算子的谱论，可视为线性积分方程中著名的Fredholm理论到含复参数 λ 的线性泛函方程 $Tx - \lambda x = y$ 上的推广，其一般化即所谓的Riesz-Schauder理论。

重要概念、主要内容的概述

线性算子的紧性（定义7.1-1）其由积分方程抽象而得，且为Fredholm理论中所必需的性质。在7.1和7.2节中将讨论紧线性算子一般的、重要的性质，7.3和7.4节为其谱的性质，基于此建立了Riesz-Schauder理论。7.5-7.7节研究有界算子方程的一些结果，并包括其在积分方程上的应用。

§7.1 赋范空间上紧线性算子

紧线性算子定义如下：

7.1-1 定义(紧线性算子)。设 X 与 Y 为赋范空间，算子 $T: X \rightarrow Y$ 称为紧线性算子（或全连续线性算子）若 T 为线性的且对 X 的每一有界子集 M ，其象 $T(M)$ 为相对紧的（即其闭包 $\overline{T(M)}$ 为紧的）

在分析中很多线性算子是紧的，紧线性算子类的理论是由下列积分方程中引出。

$$(T - \lambda I)x(s) = y(s) \text{ 其中}$$

$$Tx(s) = \int_a^b k(s, t)x(t)dt \quad (1)$$

其中 $\lambda \in C$ 为一参数 (假定 $\lambda \neq 0$ 则 (1) 式称为第二类的, 若 $\lambda = 0$ 称为第一类的, 对应这二类的理论有很大差别) y 与核 K 为给定的函数 (满足一定的条件), x 为未知函数. 这类方程在常、偏微分方程中均有一定的位置. D. Hilbert (1912) 发现一个使人惊异的事实: 关于 (1) 式的可解性的基本结论 (“Fredholm 理论”) 是: 并不依赖于 (1) 式中 T 的积分表示式的存在而仅依赖于 (1) 式中 T 假设为 “紧” 线性算子.

术语 “紧” 是由定义中引出的. 旧的辞 “全连续” 可从下述引理结果中得出, 其证明了一紧线性算子必为连续, 但反之一般并不成立.

7.1-2 引理(连续性). 设 X 与 Y 为赋范空间. 则:

(a) 每一紧线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 为有界的, 因而连续.

(b) 若 $\dim X = \infty$ 恒等算子 $I: X \rightarrow X$ (其为连续) 不是紧的.

证明 (a) 单位球面 $U = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 为有界, 由 T 为紧的, 则 $\overline{T(U)}$ 为紧集, 由 2.5-2 知其为有界, 故

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$$

因此 T 为有界再由定理 2.7-10 知其为连续.

(b) 闭单位球 $M = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ 为有界, 若

$\dim X = \infty$, 由 2.5-5 知 M 不为紧集, 因此 $I(M) = M = \overline{M}$ 不

是相对紧的.

由集的紧性定义, 不难得到下面判定算子紧性的规则.

7.1-3 定理(紧性判定准则). 设 X 与 Y 为赋范空间且 $T: X \rightarrow Y$ 为一线性算子, 则 T 为紧的充分且必要条件是: 其将 X 中的每一有界序列 (x_n) 映射到 Y 中的序列 (Tx_n) 均含有一收敛的子序列.

证明 若 T 为紧的且 (x_n) 为有界则 Y 中的 (Tx_n) 的闭包是紧的, 并由定义 2.5-1 知 (Tx_n) 包含一收敛的子序列.

反之, 设每一有界序列 (x_n) 包括一子序列 (x_{n_k}) 使得 (Tx_{n_k}) 在 Y 中收敛. 今考察任一有界子集 $B \subset X$, 且设 (y_n) 为 $T(B)$ 中任一序列, 则有某一 $x_n \in B$, $y_n = Tx_n$, 由 B 为有界知 (x_n) 为有界. 由假设 (Tx_n) 包含一收敛的子序列, 根据定义 2.5-1 及 $\{y_n\}$ 在 $T(B)$ 中为任意知 $\overline{T(B)}$ 为紧的, 故 T 满足紧算子的定义条件.

根据此定理可以得到两紧线性算子 $T_1, T_2: X \rightarrow Y$ 的和 $T_1 + T_2$ 是紧的 (参考习题 2) 类似地, 若 α 为任一数量则 αT_1 为紧的. 故有下述结论:

从 X 射到 Y 的紧线性算子形成一向量空间.

此外, 紧性判定准则在有限维情况下可得到更简单的结果.

7.1-4 定理(定义域或值域为有限维). 设 X 与 Y 为赋范空间且 $T: X \rightarrow Y$ 为一线性算子, 则,

(a) 若 T 有界且 $\dim T(X) < \infty$, 则算子 T 为紧的.

(b) 若 $\dim X < \infty$, 则算子 T 是紧的,

证明 (a) 设 (x_n) 为 X 中任意有界序列, 则由 $\|Tx_n\| \leq$

$\|T\| \|x_n\|$ 得知 (Tx_n) 为有界, 因 $\dim T(X) < \infty$ 再根据 2.5-3 知 (Tx_n) 为相对紧, 由此得 (Tx_n) 有一收敛的子序列. 因 (x_n) 为 X 中任意有界序列, 由定义 7.1-3 知算子 T 为紧的.

(b) 由 2.7-8 知 $\dim X < \infty$ 推得 T 为有界. 再由 2.6-9(b) 知 $\dim T(X) \leq \dim X$, 再由 (a) 得证.

我们常称一算子 $T \in B(X, Y)$ 且 $\dim T(X) < \infty$ 为有限秩算子.

下述定理说明在什么条件下一紧线性算子序列的极限仍为紧的. 其重要性在于: 为证明给定算子为紧的, 定理可提供一方法是: 将其表示为一致紧线性算子序列的极限.

7.1-5 定理(紧线性算子序列). 令 (T_n) 为一从赋范空间 X 到 Banach 空间 Y 的紧线性算子的序列. 若 (T_n) 为一致算子收敛, 即 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ (参看 4.8 节) 则其极限算子 T 为紧的.

证明 利用“对角线法”证明对 X 中任意有界序列 (x_m) 其象 (Tx_m) 存在一收敛的子序列, 然后再应用定理 7.1-3.

由 T_1 为紧的, (x_m) 存在一子序列 $(x_{1,m})$ 使得 $(T_1 x_{1,m})$ 为 Cauchy 序列, 类似地 $(x_{1,m})$ 存在一子序列 $(x_{2,m})$ 使得 $(T_2 x_{2,m})$ 为 Cauchy 序列, 继续下去. 可以看到“对角线序列” $(y_m) = (x_{m,m})$ 为 (x_m) 的一子序列, 且对于任意固定的正整数 n 序列 $(T_n y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ 为 Cauchy 序列. 由 (x_m) 为有界, 即对所有的 m , $\|x_m\| \leq C$. 因此 $\|y_m\| \leq C$, 令 $\varepsilon > 0$, 由 $T_n \rightarrow T$ 故存在一 $n = p$ 使得 $\|T - T_p\| < \varepsilon/3C$. 又 $(T_p y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ 为 Cauchy 序列, 则存在一 N 使得

$$\|T_p y_j - T_p y_k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (j, k > N)$$

因此对于 $j, k > N$ 均有

$$\begin{aligned} \|Ty_j - Ty_k\| &\leq \|Ty_j - T_p y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| \\ &\quad + \|T_p y_k - Ty_k\| \end{aligned}$$

$$\leq \|T - T_p\| \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\|$$

$$\|y_k\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c = \varepsilon.$$

这就证明 (Ty_n) 为 Cauchy 序列, 由 Y 的完备性知其收敛. 注意到 (y_m) 为任意有界序列的子序列, 根据 7.1-3 定理推得算子 T 为紧的.

注意上述定理条件若用强算子收敛 $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$ 代替一致算子收敛则命题不成立. 这可由下例看出. $T_n: l^2 \rightarrow l^2$ 由 $T_n x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ 定义, 其中 $x = (\xi_j) \in l^2$. 因为 T_n 为线性、有界, 由 7.1-4(a) 知 T_n 为紧的, 显然 $T_n x \rightarrow x = Ix$, 但 I 由于 $\dim l^2 = \infty$ 知其为非紧的.

下面例子说明如何使用上述定理来证明一给定算子为紧的.

7.1-6 例(空间 l^2). 证明 $T: l^2 \rightarrow l^2$ 由 $y = (\eta_j) = Tx$ 定义 (其中 $x = (\xi_j) \in l^2$ $\eta_j = \xi_j / j$ $j = 1, 2, \dots$) 为紧的.

解: T 为线性. $x = (\xi_j) \in l^2$ 显然 $y = (\eta_j) \in l^2$. 令 $T_n: l^2 \rightarrow l^2$ 定义如下:

$$T_n x = \left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots \right)$$

T 为线性且有界, 由 7.1-4(a) 知其为紧的, 且

$$\begin{aligned}\|(T - T_n)x\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\xi_j|^2 \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

取所有范数为 1 的 x 的上确界得:

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

因此 $T_n \rightarrow T$. 且由定理 7.1-5 知 T 为紧的.

有关紧线性算子其他重要基本性质为: 其将弱收敛序列转化为强收敛序列, 结果如下:

7.1-7 定理 (弱收敛). 设 X 与 Y 为赋范空间, 且 $T: X \rightarrow Y$ 为一紧线性算子, 设 (x_n) 在 X 中为弱收敛, 即 $x_n \xrightarrow{w} x$. 则 (Tx_n) 在 Y 中为强收敛且具有极限 $y = Tx$.

证明: 设 $y_n = Tx_n$ 和 $y = Tx$, 首先证明

$$y_n \xrightarrow{w} y. \quad (2)$$

再证明

$$y_n \rightarrow y \quad (3)$$

令 g 为 Y 上任意有界线性泛函. 现定义 X 上一泛函 f 为

$$f(z) = g(Tz) \quad (z \in X)$$

f 为线性. 由 T 为紧的则其为有界故 f 为有界且

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\| \|Tz\| \leq \|g\| \|T\| \|z\|.$$

由定义 $x_n \xrightarrow{w} x$ 蕴涵 $f(x_n) \rightarrow f(x)$, 因此 $g(Tx_n) \rightarrow g(Tx)$ 即, $g(y_n) \rightarrow g(y)$ 因 g 为任意, (2) 得证.

现证 (3). 设 (3) 式不成立, 则 (y_n) 存在一子序列 (y_{n_k})

使得对某个 $\eta > 0$

$$\|y_{n_k} - y\| \geq \eta \quad (4)$$

由 (x_n) 为弱收敛, 由 4.7-3(c) 知 (y_n) 为有界, 因而 (x_{n_k}) 亦有界, 根据 7.1-3T 的紧性蕴涵 (Tx_{n_k}) 存在一收敛的子序列, 如 (\tilde{y}_i) , 设 $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}$.

$$\tilde{y}_i \xrightarrow{w} \tilde{y} \text{ 由 (2) 及 4.7-3(b) 知 } \tilde{y} = y.$$

因此

$$\|\tilde{y}_i - y\| \rightarrow 0$$

但由 (4) $\|\tilde{y}_i - y\| \geq \eta > 0$ 矛盾. 则 (3) 式必成立

习 题 7.1

1. 证明: 任意赋范空间上的零算子为紧的.
2. 若 T_1 与 T_2 为从一赋范空间 X 到一赋范空间 Y 的紧线性算子, 证明 $T_1 + T_2$ 为紧线性算子. 再证明从 X 到 Y 的紧线性算子构成 $B(X, Y)$ 的子空间 $C(X, Y)$
3. 若 Y 为 Banach 空间, 证明习题 2 中的 $C(X, Y)$ 为 $B(X, Y)$ 的闭子集.
4. 若 Y 为 Banach 空间, 证明习题 2 中的 $C(X, Y)$ 为一 Banach 空间.
5. 在课文已经证得, 定理 7.1-5 中的一致算子收敛条件若用强算子收敛条件代替时, 命题不成立. 证明: 该反例中的算子 T_n 为有界.
6. 有意义的是: 在 7.1-5 中的条件能减弱但并不影响紧线性算子的概念. 为此试证明: 一线性算子 $T: X \rightarrow Y$ (X, Y 为赋范空间) 为紧的充分必要条件是: 单位球 $M \subset X$ 的象 $T(M)$ 在 Y 中为相对紧的.
7. 证明: 一线性算子 $T: X \rightarrow X$ 为紧的充分必要条件是对每一个范数不超过 1 的向量序列其象 (Tx_n) 序列有收敛的子序列.

8. 若 z 为赋范空间 X 中一固定元素且 $f \in X^*$, 证明: 由 $Tx = f(x)z$ 定义的算子 $T: X \rightarrow X$ 为紧的.

9. 若 X 为一内积空间, 证明: 对固定的 y 与 z 由 $Tx = \langle x, y \rangle z$ 定义的算子 T 为 X 上的紧线性算子.

10. 设 Y 为一 Banach 空间, 且 $T_n: X \rightarrow Y, n = 1, 2, \dots$, 为有限秩算子. 若 (T_n) 为一致算子收敛, 证明其极限算子为紧的.

11. 证明: Hilbert 空间 H 到 H 的一有限维子空间上的投影算子为紧的.

12. 证明: $T: l^2 \rightarrow l^2$ 其由 $Tx = y = (\eta_j), x = (\xi_j), \eta_j = \xi_j / 2^j$ 定义为紧的.

13. 证明: $T: l^p \rightarrow l^p, 1 \leq p < +\infty$, 其由 $Tx = y = (\eta_j), x = (\xi_j), \eta_j = \xi_j / j$ 定义为紧的.

14. 证明 $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ 其由 $Tx = y = (\eta_j), x = (\xi_j), \eta_j = \xi_j / j$ 定义, 为紧的.

15. (连续映射) 设 $T: X \rightarrow Y$ 为度量空间 X 到度量空间 Y 的连续映射, 证明相对紧集 $A \subset X$ 的象为 Y 中的相对紧集.

§7.2 紧线性算子的进一步性质

在这一节我们证明在赋范空间上的紧线性算子的值域为可分的, 并且其伴随算子也是紧的, 在下一节研究紧算子谱时要用到这些性质. 以上的讨论都基于以下与集的紧性相关的两个重要概念.

7.2-1 定义 (ε -网, 全有界性). 设 B 为一度量空间 X 的子集, 给定 $\varepsilon > 0$, 若存在集 $M_\varepsilon \subset X$, 使得对每一点 $z \in B, M_\varepsilon$ 存在一点其到 z 的距离小于 ε , 则称 M_ε 为 B 的一个 ε -网. 又若对每一 $\varepsilon > 0, B$ 都存在着有限 ε -网 (其中“有限”意味着 M_ε 为有限元素构成之集), 则称 B 为全有界的.

因此, B 的全有界性意味着:对每一 $\varepsilon > 0$, 集 B 包含在有限多个半径为 ε 的开球的并之中.

从下面引理中可看出上述定义的重要意义, 该引理还是本节各命题证明的关键.

7.2-2 引理(全有界性). 设 B 为一度量空间 X 的子集, 则:

(a) 若 B 为相对紧的, 则 B 是全有界的.

(b) 若 B 是全有界且 X 为完备则 B 是相对紧的.

(c) 若 B 是全有界则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都相应存在一有限的 ε -网 $M_\varepsilon \subset B$.

(d) 若 B 为全有界则 B 是可分的.

证明: (a) 设 B 为相对紧的, 任意给定 $\varepsilon_0 > 0$, 现证明 B 对应存在一有限 ε_0 -网. 若 $B = \phi$ 则 ϕ 就是 B 的 ε_0 -网. 若 $B \neq \phi$, 取一 $x_1 \in B$, 若对所有的 $z \in B$ $d(x_1, z) < \varepsilon_0$, 则 $\{x_1\}$ 为 B 的一 ε_0 -网. 否则取一点 $x_2 \in B$ 且 $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$, 若对所有 $z \in B$ 有

$$d(x_1, z) < \varepsilon_0 \quad (j = 1 \text{ 或 } 2) \quad (1)$$

则 $\{x_1, x_2\}$ 为 B 的一 ε_0 -网. 否则存在 $z = x_3 \in B$ 不满足(1). 此时若对所有的 $z \in B$,

$$d(x_1, z) < \varepsilon_0 \quad (j = 1, 2 \text{ 或 } 3)$$

则 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 为 B 的一 ε_0 -网. 否则选取一 $x_4 \in B$, 以此类推. 可以断定存在一正整数 n , 在 n 步后可使集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 B 的一 ε_0 -网. 事实上, 若不存在这样的 n , 则可构造一序列 (x_i) 使其满足

$$d(x_i, x_k) \geq \varepsilon_0 \quad \text{对 } i \neq k$$

显然, (x_i) 不存在一Cauchy子序列, 因而 (x_i) 不存在 (在 X

中)收敛的子序列, 由 (x_i) 为 B 中序列. 这与 B 的相对紧性相矛盾. 故 B 必存在一有限的 ε_0 -网. 由 $\varepsilon_0 > 0$ 为任意, 推得 B 为完全有界的.

(b) 设 B 为完全有界的且 X 为完备. 考察 B 中任一序列 (x_n) 现证明其在 X 中有收敛的子序列, 因而 B 为相对紧的.

由假设对 $\varepsilon = 1$, B 有一 ε -网, 因此 B 包含在有限多个半径为1的开球的并集中, 从这些球中取一球 B_1 , 其包括 (x_n) 的无限多项(重复计数), 并设 $(x_{1,n})$ 为 (x_n) 在 B_1 中的子序列. 类似地 B 还可包含在半径为 $1/2$ 的有限多个开球的并集中, 从这些球中选取一球 B_2 其包含子序列 $(x_{1,n})$ 的一子序列 $(x_{2,n})$, 连续递推, 取 $\varepsilon = 1/3, 1/4 \cdots$ 并令 $y_n = x_{n,n}$. 则对于任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在一 N (依赖于 ε)使得对于 $n > N$ 的 y_n 均在半径为 ε 球中. 因此 (y_n) 为Cauchy序列, 由 X 完备故其在 X 中收敛, 如 $y_n \rightarrow y \in X$, 且 $y_n \in B$ 这蕴涵着 $y \in \overline{B}$. 但还需证明下面结果, 由闭包定义, 对于 \overline{B} 的任一序列 (z_n) 相应地在 B 中均存在一序列 (x_n) , 对每一 n 均满足 $d(x_n, z_n) \leq \frac{1}{n}$, 由

(x_n) 在 B 中, 如上所证其存在一子序列在 \overline{B} 中收敛. 再由 $d(x_n, z_n) \leq \frac{1}{n}$, 因而 (z_n) 在 \overline{B} 中同样有一收敛的子序列, 则

\overline{B} 是紧的, 即 B 是相对紧的.

(c) 在 $B = \emptyset$ 时显然成立, 设 $B \neq \emptyset$ 由假设对任意给定的 $\varepsilon > 0$, B 存在一有限的 ε_1 -网 $M_1 \subset X$, 其中 $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, 因而 B 包含于有限多个以 M_1 元素为中心半径为 ε_1 的开球的并集

中, 设 B_1, B_2, \dots, B_n 为与 B 相交的球, 其中心各为 x_1, \dots, x_n . 今选一点 $z_j \in B \cap B_j$ (参看图42) 则 $M_\varepsilon = \{z_1, \dots, z_n\} \subset B$ 为 B 的 ε -网, 因为对每一 $z \in B$, 存在一 B_j 包含 z 且

$$d(z, z_j) \leq d(z, x_j) + d(x_j, z_j) < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

(d) 设 B 为全有界, 则由(c) B 包含一个对自身的 ε -网 $M_{1/n}$, 其中 $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$. 所有这些网的并 M 为可数集, 且 M 在 B 中稠密. 事实上, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在

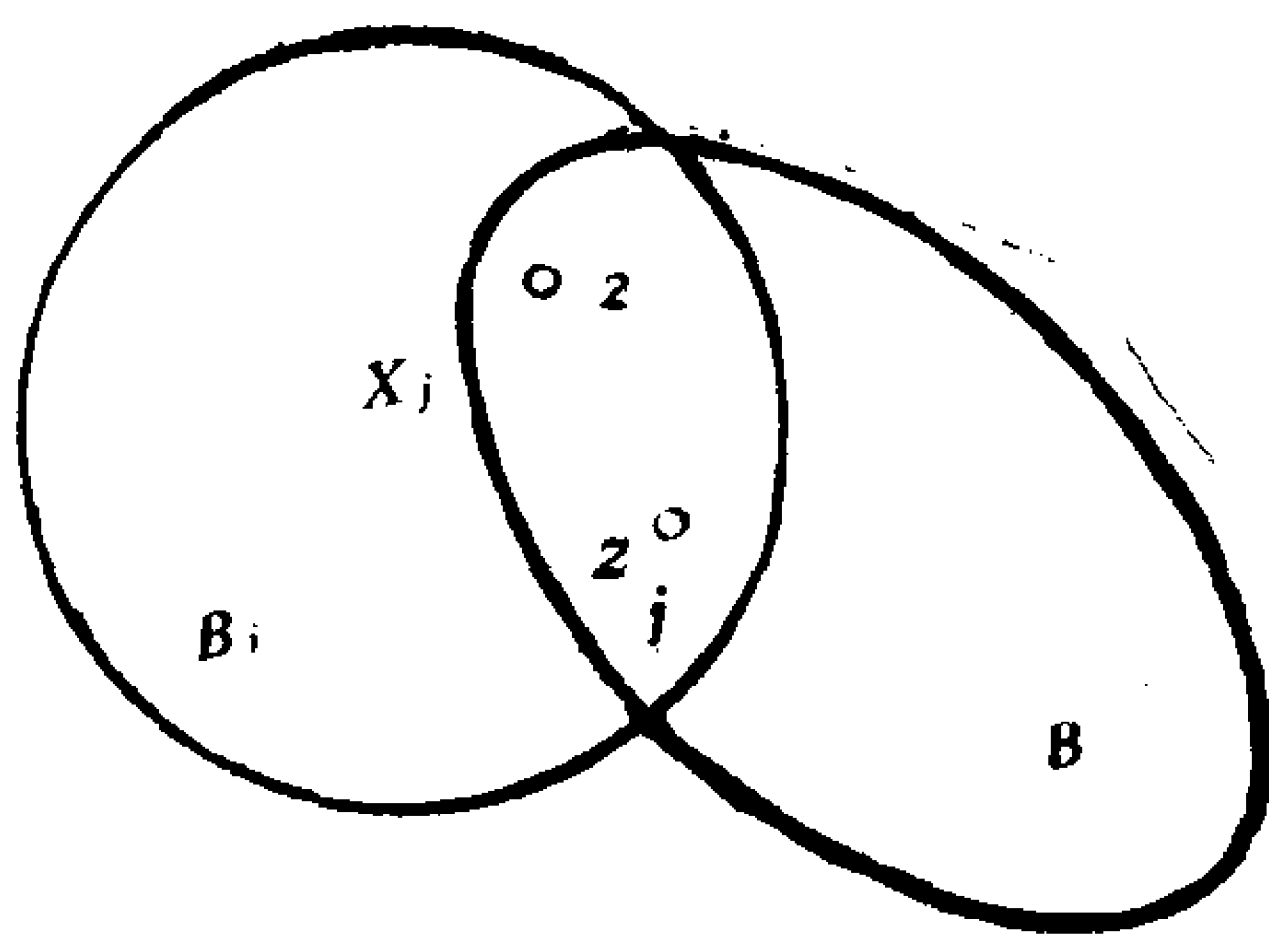


图42 引理7.2-2(c)的证明图示

n 使得 $1/n < \varepsilon$, 因此对任意 $z \in B$ 存在 $a \in M_{1/n} \subset M$, 使得 $d(z, a) < \varepsilon$. 这就证明了 B 为可分.

全有界蕴涵有界, 反之一般不成立.

上述命题第一部分较显然. 而后一部分可从下面看出: 闭单位球 $U = \{x \mid \|x\| \leq 1\} \subset l^2$ 为有界的但非全有界. 因为 l^2 为无限维且完备, 因而 U 非紧的 (参看 7.5-5), 由 7.2-2, b) 知 U 不能是全有界的.

引理 7.2-2 包括了进一步研究所需要的性质 而其他虽有意义但本书并不考虑, 将在习题 2 至 4 中予以介绍.

7.2-3 定理 (值域的可分性). X 与 Y 为赋范空间, 紧线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 的值域 $R(T)$ 为可分的.

证明: 考察球 $B_n = B(0, n) \subset X$, 由 T 为紧的, 其象 $C_n = T(B_n)$ 为相对紧的, 再由引理 7.2-2 知 C_n 为可分的, 对任

意的 $x \in X$ 其范数为有限, 即 $\|x\| < n$, 因此存在足够大的 n , $x \in B_n$, 故

$$(a) \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad (b) \quad T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \\ = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n. \quad (2)$$

因 C_n 为可分, 其有可数的稠密子集 D_n 且其并

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

为可数. 由(26)可知 D 在值域 $R(T) = T(X)$ 中稠密.

下面定理说明: 赋范空间 X 上紧线性算子可扩张到 X 的完备化空间上, 扩张后算子仍为线性和紧的.

7.2-4 定理 (紧扩张). 从一赋范空间 X 到一 Banach 空间 Y 的紧线性算子 $T: X \rightarrow Y$, 有一紧线性扩张 $\tilde{T}: \hat{X} \rightarrow Y$ 其中 \hat{X} 为 X 的完备化空间.

证明: 参看定理 2.3-3 可将 X 作为 \hat{X} 的一个子空间, 因 T 为有界的 (参看 7.1-2), 由 2.7-12 知其有一有界线性扩张 $\tilde{T}: \hat{X} \rightarrow Y$ 现证明: T 的紧性蕴涵 \tilde{T} 亦为紧的. 为此考察 \hat{X} 中任意有界序列 (\hat{x}_n) 并证明 $T(\hat{x}_n)$ 具有一收敛的子序列.

由 X 在 \hat{X} 中稠密, 则在 X 中存在一序列使得 $\hat{x}_n - x_n \rightarrow 0$, 显然 (x_n) 亦有界. 根据 T 为紧的, 则 $T(x_n)$ 存在一收敛的子序列 (Tx_{n_k}) ; 令

$$Tx_{n_k} \rightarrow y_0 \in Y \quad (3)$$

由 $\hat{x}_n - x_n \rightarrow 0$ 得 $\hat{x}_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow 0$, 及 \tilde{T} 为线性有界知其为连续的

(参看1.4-8)

$$\widetilde{T}\hat{x}_{n_k} - Tx_{n_k} = \widetilde{T}(\hat{x}_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow \widetilde{T}O = O.$$

由(3)知 $\widetilde{T}\hat{x}_{n_k} \rightarrow y_0$, 这就证明了任意有界序列 (\hat{x}_n) 有一子序列 (\hat{x}_{n_k}) 使得 $(\widetilde{T}\hat{x}_{n_k})$ 收敛. 由7.1-3证得 \widetilde{T} 为紧的.

在本章的后面还可以看到: 在算子方程中紧线性算子的存在具有重要的理论与实际意义, 算子方程可解性的一般理论不可避免的要用到伴随算子, 这中间联系的最关键是: 紧线性算子的伴随算子为紧的. 现予以证明.

7.2-5 定理 (伴随算子). 设 $T: X \rightarrow Y$ 为一线性算子, 若 T 是紧的则其伴随算子 $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ 亦为紧的. 其中 X 与 Y 为赋范空间, X^* 与 Y^* 为对应的对偶空间.

证明: 考察 Y^* 中任意有界子集 B , 即

$$\|g\| \leq C \quad \text{对所有的 } g \in B$$

并证明其象 $T^*(B) \subset X^*$ 为全有界的, 由 X^* 为完备 (参看2.8-13)从7.2-2(6)可得 $T^*(B)$ 为相对紧的.

照此应证明对任意给定的 $\varepsilon_0 > 0$, 象 $T^*(B)$ 存在有限的 ε_0 -网. 因 T 为紧的, 则单位球 $U = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ 的象 $T(U)$ 为相对紧的, 由7.2-2(a)知 $T(U)$ 为全有界的. 再据7.2-2(c)知 $T(U)$ 存在一有限的 ε_1 -网 $M \subset T(U)$, 其中 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/4C$. 这意味着 U 包含点 x_1, \dots, x_n 对 $x \in U$ 均有

$$\|Tx - Tx_i\| < \frac{\varepsilon_0}{4C} \quad \text{对某个 } i \quad (4)$$

今定义一线性算子 $A: Y^* \rightarrow R^n$ 其为

$$Ag = [g(Tx_1), g(Tx_2), \dots, g(Tx_n)] \quad (5)$$

其中 g 由假设为有界且 T 由 7.1-2(a) 亦为有界. 由此根据 7.1-4 知 A 为紧的. 由于 B 有界 $A(B)$ 为相对紧, 再根据 7.2-2(a) 知 $A(B)$ 为全有界的. 并由 7.2-2(c) 知其本身含一 ε -网 $\{Ag_1, \dots, Ag_m\}$ 其中 $\varepsilon_2 = \varepsilon_0/4$. 这意味着对每一 $g \in B$ 满足下式

$$\|Ag - Ag_k\|_0 < \frac{1}{4}\varepsilon_0 \quad (6)$$

对某个 k 其中 $\|\cdot\|_0$ 为 R^n 上的范数. 假若 $\{T^x g_1, \dots, T^x g_m\}$ 即为所要求的 $T^x(B)$ 的 ε_0 -网, 证明就完整了.

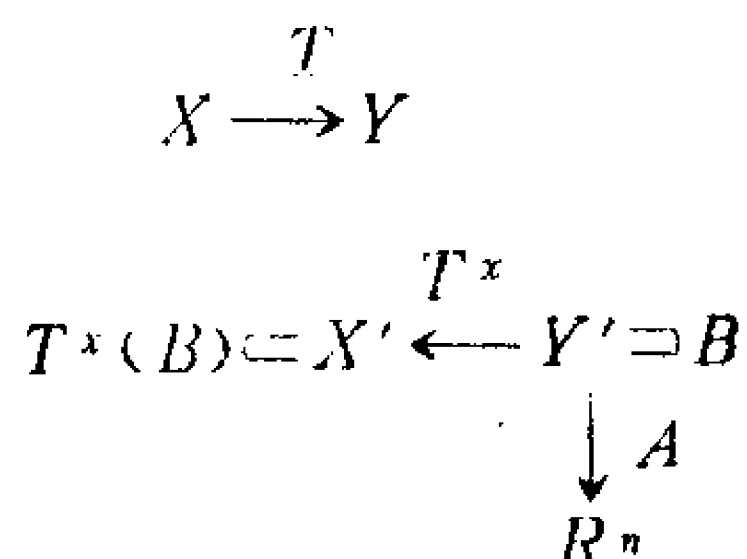


图 13 定理 7.2-5 的图示

从 (5) 及 (6) 直接可看出, 对每一 j 与每一 $g \in B$ 均存在一 k 使得

$$\begin{aligned}
 |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2 &\leq \sum_{i=1}^n |g(Tx_{ji}) - g_k(Tx_{ji})|^2 \\
 &= \|A(g - g_k)\|_0^2 < \left(\frac{1}{4}\varepsilon_0\right)^2 \quad (7)
 \end{aligned}$$

设 $x \in D$ 为任意, 则存在一 j 使 (4) 式成立. 令 $g \in B$ 为任意, 则有一 k 使得 (6) 成立, 且对该 k 及任意 j (7) 式成立. 因此得

$$\begin{aligned}
 |g(Tx) - g_k(Tx)| &\leq |g(Tx) - g(Tx_j)| \\
 &\quad + |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)| \\
 &\quad + |g_k(Tx_j) - g_k(Tx)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \|g\| \|Tx - Tx_1\| + \frac{\varepsilon_0}{4} \\
&\quad + \|g_k\| \|Tx_1 - Tx\| \\
&\leq C \cdot \frac{\varepsilon_0}{4C} + \frac{\varepsilon_0}{4} + C \cdot \frac{\varepsilon_0}{4C} < \varepsilon_0
\end{aligned}$$

上述结果对任意 $x \in U$ 成立且由 T^* 定义得

$g(Tx) = (T^*g)(x)$, 等等. 最后有:

$$\begin{aligned}
\|T^*g - T^*g_k\| &= \sup_{\|x\|=1} |(T^*(g - g_k))(x)| \\
&= \sup_{\|x\|=1} |g(Tx) - g_k(Tx)| < \varepsilon_0
\end{aligned}$$

这就证明了 $\{T^*g_1, \dots, T^*g_m\}$ 为 $T^*(B)$ 的一 ε_0 -网. 由 $\varepsilon_0 > 0$ 为任意, $T^*(B)$ 为全有界再由 7.2-2(b) 知其为相对紧, 由 B 为 Y^* 的任意为界子集证得 T^* 为紧的.

习 题 7.2

1. 设 X 为一全有界变量空间. 证明: 任意无限子集 $V \subset X$ 均有一直径小于给定 $\varepsilon > 0$ 的无限子集.

2. 若 X 为紧度量空间. 证明: X 为完备的. 再证明完备性并不蕴涵紧性.

3. 举例说明全有界性为紧性的必要但非充分条件.

4. 证明: 一度量空间 X 为紧的充分必要条件是其为完备且全有界.

5. 若度量空间 (X, d) 为紧的. 证明对任意 $\varepsilon > 0$ 空间 X 有一有限子集 M 使得对 X 中任意点 x 到 M 的距离 $\delta(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y) < \varepsilon$.

6. 算子 $T: l^2 \rightarrow l^2$ 由 $Tx = y = (\eta_i)$, 其中 $x = (\xi_i)$ 且

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$$

定义, 试证明 T 为紧的 (利用 7.1-5)

7. 证明习题 6 中的算子类构成 $B(l^2, l^2)$ 的一子空间, 举例说明习题 6 的条件是算子 T 为紧的充分但非必要的条件.

8. 一满射紧线性算子 $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ 是否存在?

9. 若 $T \in B(X, Y)$ 是非紧的, T 是否能限制在 X 的一无限维子空间上而使其为紧的?

10. 设 (λ_n) 为一数列, 且当 $n \rightarrow \infty$, $\lambda_n \rightarrow 0$. 算子 $T: l^2 \rightarrow l^2$ 由 $Tx = y = (\eta_j)$, $\eta_j = \lambda_j \xi_j$ 定义的其中 $x = (\xi_j)$, 证明 T 为紧的.

§7.3 赋范空间上紧线性算子谱的性质

在本节与下一节中, 将考察赋范空间 X 上的紧线性算子谱的性质. 为此仍需利用算子

$$T_\lambda = T - \lambda I \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

及与 6.2 节有同样定义的关于谱论的基本概念.

紧线性算子的谱论是有限维度量空间的特征值理论的较为简单的推广, 并且在很多方面类似于有限维的情况, 这可从下面的 7.3 与 7.4 节的摘要看出.

摘要: 一赋范空间 X 上的紧线性算子 $T: X \rightarrow X$ 具有如下性质:

T 的特征值集为可数的 (或者有限甚至为空集) (参看 7.3-1)

$\lambda = 0$ 是该集可能存在的唯一聚点 (参看 7.3-1)

每一谱值 $\lambda \neq 0$ 为一特征值 (参看 7.4-4). 若 X 为无限维则 $0 \in \sigma(T)$

对 $\lambda \neq 0$ T 的任一特征空间的维数为有限 (参看 7.3-3)

对 $\lambda \neq 0$ $T_\lambda, T_\lambda^2, T_\lambda^3 \cdots$ 各自对应的零空间的维数为有

限, 且这些算子的值域均为闭的 (参看7.3-5, 7.3-6)

存在一数 r (依赖于 λ , 其中 $\lambda \neq 0$) 使得

$$X = N(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X)$$

(参看7.4-5);

零空间满足

$$N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = N(T_\lambda^{r+2}) = \dots$$

值域满足

$$T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = T_\lambda^{r+2}(X) = \dots$$

(参看7.4-3) .

若 $r > 0$, 则成立下面的真包含关系:

$$N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda^1) \subset \dots \subset N(T_\lambda^r)$$

和

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda^1(X) \supset \dots \supset T_\lambda^r(X)$$

(参看7.4-3) .

下面的第一个定理与特征值有关, 将证明紧线性算子的点谱并不复杂. 在下一节还可以看到紧线性算子若存在 $\lambda \neq 0$ 的谱值则其为特征值. 这说明紧线性算子的谱在很大程度上类似于有限空间.

7.3-1 定理 (特征值). 一赋范空间上的紧线性算子 $T: X \rightarrow X$ 之特征值集为可数的 (或有限甚至为空集) 且 $\lambda = 0$ 是该集可能存在的唯一聚点.

证明: 显然若证得对任一实数 $k > 0$, 使得对所有 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 且 $|\lambda| \geq k$ 的集均为有限时, 命题得证.

反之, 若对某一 $k_0 > 0$, 假设不成立, 则存在一由不同特征值组成的序列 (λ_n) 使 $|\lambda_n| \geq k_0$, 且存在 $x_n \neq 0$ 有 $Tx_n = \lambda_n x_n$. 由定理6.4-3知所有 x_n 的集为线性无关. 令 $M_n =$

$\text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$, 则对任意 $x \in M_n$ 有唯一表示式

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

利用 $T - \lambda_n I$ 及 $Tx_j = \lambda_j x_j$ 得

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1}$$

注意等式右边不出现 x_n , 则

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1} \quad \text{对所有 } x \in M_n \quad (2)$$

M_n 为闭的 (参看 2.4-3), 由 Riesz 引理 2.5-4, 存在一序列 (y_n) 使得

$$y_n \in M_n \quad \|y_n\| = 1, \quad \text{对所有 } x \in M_{n-1}$$

$$\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}$$

下面来证明:

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}k_0 \quad (n > m) \quad (3)$$

由 $k_0 > 0$ 知 (Ty_n) 不存在收敛的子序列, 再由 y_n 为有界的, 这就与 T 的紧性相矛盾.

用加减项可得

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \tilde{x} \quad \text{其中} \quad \tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m \quad (4)$$

令 $m < n$. 今证明 $\tilde{x} \in M_{n-1}$. 由 $m \leq n-1$, 可以看出 $y_m \in M_m \subset M_{n-1} = \text{Span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, 再由 $Tx_j = \lambda_j x_j$ 知 $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据 (2)

$$\lambda_n y_n - Ty_n = -(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}$$

把两结果合在一起得 $\tilde{x} \in M_{n-1}$. 同样可知 $x = \lambda_n^{-1} \tilde{x} \in M_{n-1}$, 由 $|\lambda_n| \geq k_0$ 得

$$\|\lambda_n y_n - \tilde{x}\| = |\lambda_n| \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} |\lambda_n| \geq \frac{1}{2} k_0 \quad (5)$$

根据(4)与(5)可知(3)成立, 因此对某一 $k_0 > 0$ 存在无限多个特征值, 且满足 $|\lambda_n| \geq k_0$ 的假设不成立, 定理由此得证.

此定理证明了一赋范空间上的紧线性算子若存在无限多个特征值则可将其排成一收敛于零的序列.

一紧线性算子与一有界线性算子相乘可得到一紧线性算子. 这一有意义的结果是下面引理的内容, 其有多方面的应用, 当前用来证明紧线性算子的一个基本性质.

7.3-2 引理 (乘积的紧性). 设 X 为一赋范空间, $T: X \rightarrow X$ 为一紧线性算子且 $S: X \rightarrow X$ 为一有界线性算子, 则 TS 与 ST 均为紧的

证明: 设 $B \subset X$ 为任意有界集, 由 S 为有界算子, 则 $S(B)$ 为有界集. 再根据 T 为紧的则集 $T[S(B)] = TS(B)$ 为相对紧的, 即 TS 为紧线性算子.

再证明 ST 亦为紧的. 设 (x_n) 为 X 中任意有界序列, 则由 7.1-3 (Tx_n) 含有一收敛的子序列 (Tx_{n_k}) , 另根据 1.4-8 (STx_{n_k}) 收敛, 因此由 7.1-3 知 ST 为紧的.

在本章开始时曾表明过紧线性算子的谱论几乎与有限维空间上线性算子同样地简单 (本质是有限维度量空间的特征值理论) 根据之一是下面定理: 一紧线性算子其可能存在的 (亦可能不存在) 非零特征值之特征空间为有限维的.

7.3-3 定理 (零空间). 若 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间 X 上

的紧线性算子, 则对每一 $\lambda \neq 0$ $T_\lambda = T - \lambda I$ 的零空间 $N(T_\lambda)$ 为有限维的.

证明: 现证明 $N(T_\lambda)$ 的闭单位球 M 为紧的然后再使用定理 2.5-5

设 (x_n) 在 M 中, 则 (x_n) 为有界 ($\|x_n\| \leq 1$), 由 7.1-3 知 (Tx_n) 含有一收敛的子序列 (Tx_{n_k}) , 由 $x_n \in M \subset N(T_\lambda)$ 则 $T_\lambda x_n = Tx_n - \lambda x_n = 0$ 即 $x_n = \lambda^{-1}Tx_n$ ($\lambda \neq 0$), 故 $(x_{n_k}) = (\lambda^{-1}Tx_{n_k})$ 亦收敛, 根据 M 为闭知其极限在 M 中, 因为 (x_n) 为 M 中任意序列由定义 2.5-1 知 M 为紧的, 再由 2.5-5 证得 $\dim N(T_\lambda) < \infty$

7.3-4 系 (零空间) . 在定理 7.3-3 中

$$\dim N(T_\lambda^n) < \infty \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

且

$$\{0\} = N(T_\lambda^1) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \dots \quad (7)$$

证明: 由 T_λ 为线性的其将 0 映射到 0 (参看 § 2.6) 因此 $T_\lambda^n x = 0$ 蕴涵 $T_\lambda^{n+1} x = 0$ 故 (7) 式成立.

现证明 (6), 由二项式定理

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (T - \lambda I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} \\ &= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k} \end{aligned}$$

可写成

$$T_\lambda^n = W - \mu I \quad \mu = -(-\lambda)^n,$$

其中 $W = TS = ST$ 且 S 表示上式右边中的和, T 为紧的且由 T 有界知 S 亦有界 (由 7.1-2(a)). 因此由引理 7.3-2 得 W 为紧的, 应用定理 7.3-3 于 $W - \mu I$ 得 $\dim N(T_\lambda^n) < \infty$

下面考察紧线性算子 T 当 $\lambda \neq 0$ 时 T_1, T_1^2, T_1^3, \dots 的值域. 为此首先应注意到一线性有界算子其零空间总是闭的, 但其值域并不总为闭的 (参看2.7-11与2.7节习题2), 然而若 T 为紧的, 则 T_1 对于 $\lambda \neq 0$ 定有闭的值域. 且 T_1^2, T_1^3, \dots 亦有同样的结果. 下面首先对 T_1 加以证明, 然后可直接推广到对任意的 $n \in N$ 的 T_1^n 上去.

7.3-5 定理 (值域). 设 $T: X \rightarrow X$ 为一赋范空间 X 上的紧线性算子, 则对每一 $\lambda \neq 0$ 的 $T_1 = T - \lambda I$ 其值域为闭的.

证明: 用反证法. 假定值域 $T_1(X)$ 为非闭, 并由之导出矛盾. 证明过程的思路是

(a) 从集 $T_1(X) - T_1(X)$ 中取一元素 y , 并取一序列 $(T_1 x_n)$ 收敛于 y , 要证明 $x_n \notin N(T_1)$ 但 $N(T_1)$ 内包含一序列 (z_n) 其使得 $\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$, 其中 δ_n 为 x_n 到 $N(T_1)$ 的距离.

(b) 要证明 $a_n \rightarrow \infty$, 其中 $a_n = \|x_n - z_n\|$

(c) 考察序列 (ω_n) 其中 $\omega_n = a_n^{-1}(x_n - z_n)$ 并由之得到预期的矛盾.

详细论证如下:

(a) 假设 $T_1(X)$ 为非闭, 则存在 $y \in T_1(X)$ 但 $y \notin T_1(X)$ 且在 X 中存在一序列 (x_n) 使得

$$y_n = T_1 x_n \rightarrow y. \quad (8)$$

由 $T_1(X)$ 为一向量空间, 则 $0 \in T_1(X)$, 但 $y \notin T_1(X)$ 故 $y \neq 0$ 这蕴涵着对于所有充分大的 n $y_n \neq 0$ 和 $x_n \notin N(T_1)$ 不失一般性可假设所有的 n 上述成立. 因为 $N(T)$ 是闭的, 从 x_n 到 $N(T_1)$ 的距离为正, 即

$$\delta_n = \inf_{z \in N(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0$$

由下确界定义 $N(T_\lambda)$ 存在一序列 (z_n) 使得

$$a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n \quad (9)$$

(b) 现证明

$$a_n = \|x_n - z_n\| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad (10)$$

假定(10)不成立. 则 $(x_n - z_n)$ 含有一有界子序列, 因为 T 是紧的, 根据7.1-3知 $\{T(x_n - z_n)\}$ 有一收敛的子序列, 由 $T_\lambda = T - \lambda I$ 与 $\lambda \neq 0$ 得 $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$ 利用 $T_\lambda z_n = 0$ (注意 $z_n \in N(T_\lambda)$) 可得

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)(x_n - z_n) = \frac{1}{\lambda}[T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n]$$

由 $(T(x_n - z_n))$ 含有一收敛的子序列且由(8) $(T_\lambda x_n)$ 收敛因此 $(x_n - z_n)$ 有一收敛的子序列, 如 $x_{n_k} - z_{n_k} \rightarrow v$. 因 T 是紧的因而连续, 故 T_λ 亦连续. 由1.4-8定理得

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \rightarrow T_\lambda v.$$

再由 $z_n \in N(T_\lambda)$ 则 $T_\lambda z_{n_k} = 0$, 根据(8)还得到

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda x_{n_k} \rightarrow y.$$

因而 $T_\lambda v = y$. 则 $y \in T_\lambda(X)$, 这与 $y \in T_\lambda(X)$ (参看(a)证明之开始部分) 矛盾, 这就否定了(10)不成立的假设.

(c) 再次使用(10)中定义的 a_n 并设

$$\omega_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n) \quad (11)$$

则 $\|\omega_n\| = 1$, 因 $a_n \rightarrow \infty$ 由 $T_\lambda z_n = 0$ 及 $(T_\lambda x_n)$ 收敛得

$$T_{\lambda} \omega_n = \frac{1}{a_n} T_{\lambda} x_n \rightarrow 0 \quad (12)$$

再用 $I = \lambda^{-1}(T - T_{\lambda})$ 得到

$$\omega_n = \frac{1}{\lambda} (T w_n - T_{\lambda} w_n) \quad (13)$$

因 T 为紧的且 (w_n) 有界, 则 $(T w_n)$ 含有一收敛的子序列, 且由 (12) 知 $(T_{\lambda} w_n)$ 收敛, 则从 (13) 得知 (w_n) 有一收敛的子序列, 如

$$w_{n_j} \rightarrow w \quad (14)$$

与 (12) 相比较可推出 $T_{\lambda} w = 0$, 因此 $w \in N(T_{\lambda})$ 同时因 $z_n \in N(T_{\lambda})$ 则

$$u_n = z_n + a_n w \in N(T_{\lambda})$$

这样从 x_n 到 u_n 的距离必有

$$\|x_n - u_n\| \geq \delta_n$$

将 u_n 代入再利用 (11) 与 (9) 则得

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \|x_n - z_n - a_n w\| = \|a_n w_n - a_n w\| \\ &= a_n \|w_n - w\| < 2\delta_n \|w_n - w\| \end{aligned}$$

除以 $2\delta_n > 0$ 得到 $\frac{1}{2} < \|w_n - w\|$ 这与 (14) 矛盾, 因而定理得证

7.3-6 系(值域). 在定理 7.3-5 假设条件下, 对任意 $n = 0, 1, 2, \dots$, $T^n \dots$ 的值域关闭的且

$$X = T_0^0(X) \supset T_1^0(X) \supset T_2^0(X) \supset \dots$$

证明: 命题第一部分可从定理 7.3-5 得出, 注意在 7.3-4 证明中 $T_1^n = W - \mu I$ 其中的 W 为紧的, 命题的第二部分可归纳证

得, 首先 $T^0(X) = I(X) = X \supset T_1(X)$, 再设 $T_1^{n-1}(X) \supset T_1^n(X)$ 得到 $T_1^n(X) \supset T_1^{n+1}(X)$

习 题 7.3

1. 证明定理7.3-1其中假设条件减弱为对某一正整数 p , T^p 为一紧线性算子.

2. 设 X, Y 与 Z 为赋范空间且 $T_1: X \rightarrow Y$ 与 $T_2: Y \rightarrow Z$, 若 T_1 与 T_2 为紧线性算子, 试证明: $T_2 T_1: X \rightarrow Z$ 为一紧线性算子.

3. 若 T 为一紧线性算子, 证明对任意给定的数 $k > 0$, 对应绝对值大于 k 的 T 之特征值, 至多存在有有限多个线性无关特征向量.

4. $T_j: X_j \rightarrow X_{j+1}$, $j = 1, 2, 3$ 为赋范空间上的有界线性算子. 若 T_2 为紧的, 证明 $T = T_3 T_2 T_1: X_1 \rightarrow X_4$ 为紧的.

5. 基于考察有界序列, 试给出7.3-2中 TS 为紧的证明.

6. 设 H 为 Hilbert 空间, $T: H \rightarrow H$ 为一有界线性算子且 T^* 为 T 的 Hilbert-伴随算子, 试证明 T 为紧的充分必要条件是 $T^* T$ 为紧的.

7. 在习题 6 中若 T 为紧的, 试证明 T^* 为紧的.

8. 若在一无限维空间 X 上的紧线性算子 $T: X \rightarrow X$, 有一定义在全空间 X 上逆, 试证明该逆不可能是有界的.

9. 利用 Riesz 引理 2.5-4 代替定理 2.5-5 来证明定理 7.3-3.

10. 证明定理 7.3-3 其中假设条件减弱为对一 $p \in \mathbb{N}$ T^p 为一紧线性算子 (利用习题 9 中的证明).

11. 用简单的实例证明定理 7.3-3 中 T 为紧的与 $\lambda \neq 0$ 的条件均不可少.

12. 若 X 为 Hilbert 空间, 对定理 7.3-3 给出一独立的证明.

13. 试在较弱条件为: 对某一 $p \in \mathbb{N}$, T^p 为一紧线性算子之下, 证明系 7.3-4.

14. 设 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间上一紧线性算子. 若 $\dim X = \infty$, 试证

明 $0 \in \delta(T)$.

15. 设 $T: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为 $y = (y_j) = Tx, x = (\xi_j), y_{2k} = \xi_{2k}$ 且 $y_{2k-1} = 0 \quad k = 1, 2, \dots$. 试求 $N(T_\lambda^n)$. 且 T 是否为紧的?

§7.4 紧线性算子谱的进一步性质

从前节得知对一赋范空间 X 的紧线性算子 T 当 $\lambda \neq 0$ 时零空间 $N(T_\lambda^n) \quad n = 1, 2, \dots$ 为有限维并满足 $N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1})$ 又值域 $T_\lambda^n(X)$ 为闭的并满足 $T_\lambda^n(X) \supset T_\lambda^{n+1}(X)$.

下面可进一步得出: 到某一 $n = r$ 后所有的零空间均相同 (引理 7.4-1); 到某一 $n = q$ 后所有的值域均相同 (引理 7.4-2); 且 $q = r$ (定理 7.4-3, 其中 q, r 为具有该性质的最小整数)

7.4-1 引理 (零空间). 设赋范空间 X 上一紧线性算子 $T: X \rightarrow X$ 且 $\lambda \neq 0$, 则存在一最小整数 r (依赖于 λ) 使得到一某 $n = r$ 后所有零空间 $N(T_\lambda^n)$ 全部相等, 且若 $r > 0$ 下面均为真包含关系.

$$N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda^1) \subset \dots \subset N(T_\lambda^r).$$

证明: 为简单起见, 令 $N_n = N(T_\lambda^n)$, 证明思路如下.

(a) 假设不存在 $N_m = N_{m+1}$ 由之引出矛盾, 在证明中必需的工具是 Riesz 引理 2.5-4.

(b) 证明 $N_m = N_{m+1}$ 蕴涵对所有 $n > m \quad N_n = N_{n+1}$. 详细论证如下:

(a) 由 7.3-4 已知 $N_m \subset N_{m+1}$. 假设不存在一 m 使得 $N_m = N_{m+1}$, 则对每一 $n \quad N_n$ 为 N_{n+1} 的真子集, 由于这些零空间均为闭的, 根据 Riesz 引理 2.5-4 则存在一序列 (y_n) 使得

$$y_n \in N_n, \quad \|y_n\| = 1, \quad \text{对所有的 } x \in N_{n-1} \quad \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}$$

(1)

下面证明

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2} |\lambda| \quad (m < n) \quad (2)$$

因 $|\lambda| > 0$ 故 (Ty_n) 不含收敛的子序列, 再由 (y_n) 为有界这就与 T 的紧性矛盾。

从 $T_\lambda = T - \lambda I$ 得 $T = T_\lambda + \lambda I$ 且

$$Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \tilde{x} \quad \text{其中} \quad \tilde{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y$$

令 $m < n$, 现证明 $\tilde{x} \in N_{n-1}$, 由于 $m \leq n-1$ 显然 (3)

$\lambda y_m \in N_m \subset N_{n-1}$. 而 $y_m \in N_m$ 知

$$0 = T_\lambda^m y_m = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m)$$

即 $T_\lambda y_m \in N_{m-1} \subset N_{n-1}$, 同理由 $y_n \in N_n$ 知 $T_\lambda y_n \in N_{n-1}$,

合在一起得 $\tilde{x} \in N_{n-1}$, 令 $x = \lambda^{-1} \tilde{x}$ 则 $x \in N_{n-1}$, 故由 (1) 得

$$\|\lambda y_n - \tilde{x}\| = |\lambda| \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} |\lambda|$$

结合 (3) 得出 (2). 因此假设不存在 m 使得 $N_m = N_{m+1}$ 不能成立. 即存在 m 使得 $N_m = N_{m+1}$

(b) 现证对所有的 $n > m$ 由 $N_m = N_{m+1}$ 蕴涵着 $N_n = N_{n+1}$, 假设不成立, 则对某一 $n > m$ N_n 为 N_{n+1} 的真子集. 今考察 $x \in N_{n+1} - N_n$, 由定义

$$T_\lambda^{n+1} x = 0 \quad \text{但} \quad T_\lambda^n x \neq 0$$

因 $n > m$ 则 $n - m > 0$, 设 $z = T_\lambda^{n-m} x$, 则

$$T_\lambda^{m+1} z = T_\lambda^{n+1} x = 0 \quad \text{但} \quad T_\lambda^m z = T_\lambda^n x \neq 0$$

故 $z \in N_{m+1}$ 但 $z \notin N_m$ 所以 N_m 为 N_{m+1} 的真子集, 这与 $N_m = N_{m+1}$ 矛盾, 则定存在最小整数 r 使得 $N_r = N_{r+1}$ 若 $r > 0$ 则 $N(T_1^0) \subset N(T_1) \subset \cdots \subset N(T_1^r)$ 为真包含关系.

上面引理证明了紧线性算子 T 且 $\lambda \neq 0$ 时, $T_\lambda, T_\lambda^2, \dots$ 零空间的关系, 下面证明其值域存在类似的关系.

7.4-2 引理 (值域). 在引理 7.4-1 的前提下, 存在最小的整数 q (依赖于 λ), 使得到某一 $n = q$ 以后值域 $T_\lambda^n(X)$ 全部相等, 且若 $q > 0$ 下面均为真包含关系

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^q(X)$$

证明: 证明过程与前面相似. 令 $R_n = T_\lambda^n(X)$, 假设不存在 s 使得 $R_s = R_{s+1}$ 则对每一 n , R_{n+1} 为 R_n 的真子空间 (参看 7.3-6), 由 7.3-6 知值域为闭, 根据 2.5-4 Riesz 引理定存在一序列 (x_n) 使得

$$x_n \in R_n, \|x_n\| = 1, \text{ 对所有 } x \in R_{n+1} \quad \|x_n - x\| \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

令 $m < n$, 由 $T = T_\lambda + \lambda I$ 则

$$Tx_m - Tx_n = \lambda x_m - (-T_\lambda x_m + T_\lambda x_n + \lambda x_n) \quad (5)$$

在等式右边 $\lambda x_m \in R_m$, $x_m \in R_m$, 则 $T_\lambda x_m \in R_{m+1}$ 且由 $n > m$ 有 $T_\lambda x_n + \lambda x_n \in R_n \subset R_{m+1}$, 因此 (5) 可写成下式

$$Tx_m - Tx_n = \lambda(x_m - x) \quad x \in R_{m+1}$$

再由 (4) 得

$$\|Tx_m - Tx_n\| = |\lambda| \|x_m - x\| \geq \frac{1}{2} |\lambda| > 0 \quad (6)$$

则 (6) 式与 T 为紧且 (x_n) 为有界必含一收敛子序列相矛盾, 这就证得定存在某一 s 使得 $R_s = R_{s+1}$, 令 q 为上述关系成

立的最小整数, 若 $r > 0$ 则 $T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^q(X)$ 为真包含关系。且 $R_{q+1} = R_q$ 即 T_λ 将 R_q 映射为本身, 重复使用 T_λ 得到: 对任意 $n > q$ $R_{n+1} = R_n$.

将引理 7.4-1 与 7.4-2 结合起来得到下面重要定理。

7.4-3 定理 (零空间与值域) 令 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间 X 上紧线性算子且 $\lambda \neq 0$, 则存在一最小整数 $n = r$ (依赖于 λ) 使得

$$N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1}) = N(T_\lambda^{n+2}) = \cdots \quad (7)$$

$$T_\lambda^n(X) = T_\lambda^{n+1}(X) = T_\lambda^{n+2}(X) = \cdots \quad (8)$$

并且若 $r > 0$, 下面包含关系是真包含

$$N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset \cdots \subset N(T_\lambda^n) \quad (9)$$

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^n(X) \quad (10)$$

证明: 引理 7.4-1 得到 (7) 与 (9), 引理 7.4-2 由 q 代替 r 得到 (8) 与 (10), 现在必需证明 $q = r$. 首先在 (a) 部分证明 $q \geq r$, 再在 (b) 部分证明 $q \leq r$. 与前面类似 令: $N_n = N(T_\lambda^n)$; $R_n = T_\lambda^n(X)$.

(a) 由引理 7.4-2 知 $R_{q+1} = R_q$ 这表明 $T_\lambda(R_q) = R_q$.

因此

$$y \in R_q \implies \text{存在 } x \in R_q \text{ 使得 } y = T_\lambda x \quad (11)$$

下面证明:

$$T_\lambda x = \theta \text{ 且 } x \in R_q \implies x = \theta. \quad (12)$$

假设 (12) 不成立, 则存在非零元素 $x_1 \in R_q$ $T_\lambda x_1 = \theta$. 对 $y = x_1$ 用 (11) 得 $x_2 \in R_q$ 有 $x_1 = T_\lambda x_2$. 类似地存在 $x_3 \in R_q$ 使得 $x_2 = T_\lambda x_3$ 等等, 则对任意 n 通过代换得

$$\theta \neq x_1 = T_\lambda x_2 = \cdots T_\lambda^{n-1} x_n \quad \text{但 } \theta = T_\lambda x_1 = T_\lambda^n x_n$$

因此 $x_n \in N_{n-1}$ 但 $x_n \in N_n$, 但由7.4-1知 $N_{n-1} \subset N_n$, 即对任意 n 均为真包含关系这与7.4-1矛盾故(12)得证。

由7.4-2知 $R_{q+1} = R_q$, 现在证明 $N_{q+1} = N_q$, 因 r 为满足条件的最小整数, 这就说明 $q \geq r$.

已知 $N_{q+1} \supset N_q$, 再证 $N_{q+1} \subset N_q$, 即由 $T_1^{q+1}x = \theta$ 蕴涵 $T_1^q x = \theta$. 设其不成立, 则存在一 x_0 使得

$$y = T_1^q x_0 \neq \theta \quad \text{但} \quad T_1 y = T_1^{q+1} x_0 = \theta$$

因此 $y \neq \theta$ 且 $y \in R_q$ 与 $T_1 y = \theta$, 在(12)式中令 $y = x$ 得出矛盾, 这证明 $N_{q+1} \subset N_q$, 因此 $N_{q+1} = N_q$ 且 $q \geq r$.

(b) 再证明 $q \leq r$. 若 $q = 0$ 时显然成立。今设 $q \geq 1$, 如证得 N_{q-1} 为 N_q 的真子空间, 由 r 是使 $N_n = N_{n+1}$ 最小整数, 则 $q \leq r$.

由7.4-2中 q 之定义 $R_q \subset R_{q-1}$ 为真包含关系, 设 $y \in R_{q-1} - R_q$. 则 $y \in R_{q-1}$ 即存在 x 使 $y = T_1^{q-1}x$. 同时 $T_1 y \in R_q = R_{q+1}$ 蕴涵着存在一 z 使得 $T_1 y = T_1^{q+1}z$. 由于 $T_1^q z \in R_q$ 但 $y \notin R_q$ 得到

$$T_1^{q-1}(x - T_1 z) = y - T_1^q z \neq \theta$$

因此 $x - T_1 z \notin N_{q-1}$, 但

$$T_1^q(x - T_1 z) = T_1 y - T_1 y = \theta$$

故 $x - T_1 z \in N_q$, 这就证了 $N_{q-1} \neq N_q$, 即 N_{q-1} 为 N_q 的真子空间, 则 $q \leq r$, 但由(a)证 $q \geq r$, 故 $q = r$ 得证。

由上述定理几乎可直接推得下面 Banach 空间上紧线性算子谱的重要特性 (在7.6-4中将看到该结论在不完备空间仍可成立)

7.4-4 定理 (特征值). 设 $T: X \rightarrow X$ 为 Banach 空

间 X 上的紧线性算子, 则 T 的每一谱值 $\lambda \neq 0$ (若其存在①) 为 T 的特征值.

证明: 若 $N(T_\lambda) \neq \{\theta\}$, 则 λ 为 T 的一特征值. 假设 $N(T_\lambda) = \{\theta\}$, 其中 $\lambda \neq 0$, 则 $T_\lambda x = \theta$ 蕴涵 $x = \theta$ 由2.6-10知 $T_\lambda^{-1}: T_\lambda(X) \rightarrow X$ 存在. 因

$$\{\theta\} = N(I) = N(T_\lambda^0) = N(T_\lambda)$$

从7.4-3得 $r = 0$ 因此 $X = T_\lambda^0(X) = T_\lambda(X)$, 故 T_λ 为双射, 因为 X 是完备的; 根据4.11-3有界逆算子定理知 T_λ^{-1} 为有界的, 再由定义得 $\lambda \in \rho(T)$.

关于 $\lambda = 0$: 本章中很多定理将其排除, 自然要考虑在一复赋范空间 X 上的紧算子 $T: X \rightarrow X$ 对 $\lambda = 0$ 时有些什么结果. 若 X 为有限维, 则 T 可由矩阵表示, 显然0可以属于或不属于 $\sigma(T) = \sigma_p(T)$; 即: 若 $\dim X < \infty$, 可能有 $0 \in \sigma(T)$; 则此时 $0 \in p(T)$. 但在 $\dim X = \infty$, 必有 $0 \in \sigma(T)$ (参看前一节习题14) 并且下面三种情况均有可能

$$\sigma \in \sigma_p(T) \quad \sigma \in \sigma_c(T) \quad \sigma \in \sigma_r(T)$$

其在本节习题4与5有所说明

作为定理7.4-3重要的应用; 可将 X 表示为两个闭子空间, 也就是 T 的零空间与值域的直和 (参看3.3节).

7.4-5 定理 (直和). 设 X, T, λ 与 r 与定理7.3-4中一致、则② X 可表为下述形式

① 习题5证明 T 可不存在特征值. 还可证明一复Hilbert空间 $H \neq \{\theta\}$ 上的伴随紧线性算子 T , 至少存在一特征值.

② 若 X 为一向量空间, 则对任意子空间 $Y \subset X$ 定存在一子空间 $Z \subset X$ 使得 $X = Y \oplus Z$ (参看§3.2) 若 X 为一赋范空间 (甚至为一Banach空间) 对 $Y \subset X$ 为一闭子空间, 不一定存在一闭子空间 $Z \subset X$ 使得 $X = Y \oplus Z$, 若 X 为一Hilbert空间则对任意闭子空间 Y 总存在闭子空间 $Z = Y^\perp$ 使得 $X = Y \oplus Z$, 注意 (13) 中的子空间均为闭的.

$$X = N(T_1') \oplus T_1'(X) \quad (13)$$

证明：今考虑任意 $x \in X$ ，应证得 x 有唯一表示式

$$x = y + z \quad (y \in N_r, z \in R_r)$$

其中 $N_r = N(T_1')$ 与 $R_r = T_1'(X)$ 。设 $z = T_1'x$ 则 $z \in R_r$ ，由定理 7.4-3 知 $R_r = R_2$ ，故 $z \in R_2$ ，且存在 $x_1 \in X$ $z = T_2'x_1$ 。令 $x_0 = T_1'x_1$ 则 $x_0 \in R_r$ ，故

$$T_1'x_0 = T_1^2'x_1 = z = T_1'x$$

这说明 $T_1'(x - x_0) = 0$ ，故而 $x - x_0 \in N_r$ ，且

$$x = (x - x_0) + x_0 \quad (x - x_0 \in N_r, x_0 \in R_r) \quad (14)$$

下面证该表达式唯一，设

$$x = (x - \tilde{x}_0) + \tilde{x}_0 \quad (x - \tilde{x}_0 \in N_r, \tilde{x}_0 \in R_r).$$

令 $v_0 = x_0 - \tilde{x}_0$ 由 R_r 为一向量空间则 $v_0 \in R_r$ ，故存在一 $v \in X$ 使得 $v_0 = T_1'v$ 。类似由

$$v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = (x - \tilde{x}_0) - (x - x_0)$$

知 $v_0 \in N_r$ ，且 $T_1'v_0 = 0$ ，合在一起

$$T_1^2'v = T_1'v_0 = 0$$

且 $v \in N_2 = N_r$ (参看 7.4-3) 这表明

$$v_0 = T_1'v = 0$$

即 $v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = 0$ ， $x_0 = \tilde{x}_0$ ，故表示式 (14) 为唯一， $N_r + R_r$ 为直和

习 题 7.4

1. 证明引理 7.4-1 其中假设条件减弱为：对某一正整数 p ， T^p 为一紧线性算子。

2. 在引理 7.4-1 的证明中，曾指出 $N_m = N_{m+1}$ 蕴涵 对所有的

$n > m$ $N_n = N_{n+1}$ 所用的方法是间接的, 试给出一直接的试明.

3. 为证明定理 7.4-4 在一般赋范空间中仍成立, 可试用 7.2-4 中证明的 \tilde{T} 然后对 T 作出适当的结论, 在这过程中会遇到什么困难?

4. $T: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为:

$$Tx = \left(\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, \dots \right), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$$

证明其为紧的且 $\sigma_p(T) = \{0\}$.

5. 由于一紧线性算子可能不存在特征值, 故在定理 7.4-4 中含有“若其存在”的语句, 而下述算子即其:

$T: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为

$$Tx = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots \right), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$$

试证明 $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$ {注意习题 4 证明 0 可属于点谱. 其还可属于连续谱}

6. $T_n: R^n \rightarrow R^n$ 定义为

为: $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$T_n x = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_{n-1}}{n-1} \right)$$

试求 T_n 的特征值, 并与习题 5 加以比较且说明当 $n \rightarrow \infty$ 时变化之情况

7. 设 $T: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为 $y = Tx = (\eta_j)$, $\eta_j = \alpha_j \xi_j$, $x = (\xi_j)$

其中 $\{\alpha_j\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密, 证明 T 不是紧的.

8. 设 $T: l^2 \rightarrow l^2$ 定义为

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow Tx = (\xi_2, \xi_3, \dots)$$

令 $m = m_0$ 与 $n = n_0$ 为值 $N(T^m) = N(T^{m+1})$ 与 $T^{n+1}(X) = T^n(X)$ 成立的最小整数. 试求 $N(T^m)$. m_0 为有限吗? 又 n_0 为多少?

9. 设 $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ 定义为 $Tx = vx$, 其中 $v(f) = f$. 证明 T 不为紧的,

10. 在线性算子 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 的矩阵表示式为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

情况下, 试求出(13)的具体表示式

§ 7.5 紧线性算子的算子方程

在I. Fredholm(1903)所研究的线性积分方程之著名成果启发下, 人们得到了某类涉及到紧线性算子的方程可解性. 下面介绍的有关理论主要由F. Riesz(1918)所发展且包含了J. Schauder(1930)作出的重要结果.

需考察的是: 一赋范空间 X 上紧线性算子 $T: X \rightarrow X$ 与其伴随算子 $T^*: X^* \rightarrow X^*$, 有关方程是:

$$Tx - \lambda x = y, \quad (y \in X \text{ 为给定, 且 } \lambda \neq 0) \quad (1)$$

其对应的齐次方程

$$Tx - \lambda x = 0 \quad (\lambda \neq 0) \quad (2)$$

上述两方程涉及的伴随算子方程为

$$T^*f - \lambda f = g \quad (g \in X^* \text{ 给定, 且 } \lambda \neq 0) \quad (3)$$

其对应的齐次方程

$$T^*f - \lambda f = 0 \quad (\lambda \neq 0) \quad (4)$$

其中 $\lambda \in C$ 为任意给定且不为零, 要研究的问题是解 x 与 f 的存在性.

为什么要同时考察这样四个方程? 答案可从下面的摘要中看出端倪, 其表明诸方程的相互关系涉及到可解性.

摘要. 设 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间上的紧线性算子, 且 $T^*: X^* \rightarrow X^*$ 为 T 的伴随算子, 令 $\lambda \neq 0$, 则:

(1) 为“正规可解”, 即(1)有一解 x 当且仅当对所有(4)

式的解 f , 有 $f(y) = 0$. 因此若 $f = 0$ 为(4)的唯一解时, 对任一 y 方程(1)均可解(参看7.5-1)

(3)有一解 f 当且仅当对所有(2)式的 x , 有 $g(x) = 0$, 因此 $x = 0$ 为(2)的唯一解时, 对任一 g 方程(3)均可解(参看7.5-3)

(1) 对任一 $y \in X$ 有一解 x 的充分必要条件是 $x = 0$ 为(2)的唯一解(参看7.6-1a)

(3) 对任一 $g \in X'$ 有一解 f 的充分必要条件是 $f = 0$ 为(4)的唯一解(参看7.6-1b).

(2) 与(4)具有相同个数的线性无关解(参看7.6-3).

T_λ 满足Fredholm择一性(参看7.7-2)

下面的第一个定理给出(1)为可解的充分必要条件.

7.5-1 定理((1)的解). 设 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间 X 上的紧线性算子且令 $\lambda \neq 0$. 则(1)有一解 x 的充分必要条件是 对所有满足(4)的解 $f \in X^*$ 有

$$f(y) = 0. \quad (5)$$

因此若(4)有唯一平凡解 $f = 0$, 则对任意给定的 $y \in X$ (1)均可解.

证明: (a) 假设(1)有一解 $x = x_0$, 即

$$y = Tx_0 - \lambda x_0 = T_\lambda x_0$$

令 f 为(4)的任意一解, 则可知

$$f(y) = f(Tx_0 - \lambda x_0) = f(Tx_0) - \lambda f(x_0)$$

由伴随算子定义 $f(Tx_0) = (T^*f)(x_0)$. 因此由(4)

$$f(y) = (T^*f)(x_0) - \lambda f(x_0) = 0.$$

(b) 反之, 设(1)式中 y 对(4)中任意解 f 满足 $f(y) = 0$ 现证明(1)有解.

假设(1)无解, 则不存在 x 值 $y = T_\lambda x$, 即 $y \notin T_\lambda(X)$, 由7.3-5知 $T_\lambda(X)$ 为闭的, 则从 y 到 $T_\lambda(X)$ 的距离 δ 为正值, 由引理4.5-7存在 $\tilde{f} \in X^*$ 使得 $\tilde{f}(y) = \delta$ 且对每一 $z \in T_\lambda(X)$ $\tilde{f}(z) = 0$. 因为 $z \in T_\lambda(X)$ 则对某一 $x \in X$ 有 $z = T_\lambda x$, 故由 $\tilde{f}(z) = 0$ 得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T_\lambda x) &= \tilde{f}(Tx) - \lambda \tilde{f}(x) \\ &= (T^* \tilde{f})(x) - \lambda \tilde{f}(x) = 0\end{aligned}$$

根据 $z \in T_\lambda(X)$ 为任意 则上式对任意 $x \in X$ 成立. 因而 \tilde{f} 为(4)的解. 由假设 $\tilde{f}(y) = 0$, 但这与 $\tilde{f}(y) = \delta > 0$ 矛盾. 因此(1)式必有解, 定理的第一部分得证, 第二部分可直接由之推出.

从上述定理的特征中抽象出下述概念:

$$Ax = y \quad (y \text{ 为给定}) \quad (6)$$

其中 $A: X \rightarrow X$ 为赋范空间 X 上的有界线性算子, 若(6)有一解 $x \in X$ 的充分必要条件为 y 对方程

$$Ax f = 0 \quad (7)$$

的任一解 $f \in X^*$ 均满足 $f(y) = 0$

其中 A^* 为 A 的伴随算子, 则(6)称为“正规可解”.

定理7.5-1表明具有紧线性算子 T 的式(1)在 $\lambda \neq 0$ 时为正规可解.

引用下面引理的结果对(3)可模拟定理7.5-1来进行处理. 引理中的正实数 r 要依赖于给定的 λ . 应注意(8)式是对称之为“最小范数解”成立, 而并不需要对全部解. 因此该引理

并不蕴涵着 $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ 的存在性(根据 § 2.7 的习题 3)

7.5-2 引理((1)的某些解的有界性) 设 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间上的紧线性算子且给定 $\lambda \neq 0$, 则存在不依赖于(1)中 y 的实数 $c > 0$, 对每一使(1)式有解的 y , 在这些解中至少存在一解为 $x = \tilde{x}$, 满足

$$\|\tilde{x}\| \leq c \|y\| \quad (8)$$

其中 $y = T_\lambda \tilde{x}$

证明 将证明分作二步.

(a) 先证明若对一给定的 y , (1) 只要有解, 其解集就包含“最小范数解”称其为 \tilde{x} .

(b) 再证明存在一 $c > 0$ 使得对于满足(1) 的任意“最小范数解” \tilde{x} 及对应的 $y = T_\lambda \tilde{x}$, (8) 式成立.

详细论证如下:

(a) 设 x_0 为(1) 式的解, 若 x 为(1) 的另外解, 其差 $z = x - x_0$ 满足(2), 因此(1) 式的每一解可写成

$$x = x_0 + z \quad \text{其中 } z \in N(T_\lambda)$$

反之, 对每一 $z \in N(T_\lambda)$ 其和 $x_0 + z$ 均为(1) 的一解. 令

$$p(z) = \|x_0 + z\| \quad \text{且} \quad k = \inf_{z \in N(T_\lambda)} p(z)$$

由下确界定义, $N(T_\lambda)$ 含一序列 (z_n) 使得

$$p(z_n) = \|x_0 + z_n\| \rightarrow k \quad (n \rightarrow \infty) \quad (9)$$

因 $(p(z_n))$ 收敛故有界. 再由

$$\begin{aligned} \|z_n\| &= \|(x_0 + z_n) - x_0\| \leq \|x_0 + z_n\| + \|x_0\| \\ &= p(z_n) + \|x_0\| \end{aligned}$$

知 (z_n) 亦有界. 因 T 为紧的, 故 (Tz_n) 存在一收敛的子序列, 但 $z_n \in N(T_\lambda)$ 意味着 $T_\lambda z_n = 0$ 即 $Tz_n = \lambda z_n$ 其中 $\lambda \neq 0$. 因此 (z_n) 含一收敛的子序列, 如:

$$z_{n_j} \rightarrow z_0$$

再由2.7-11知 $N(T_\lambda)$ 为闭的 故 $z_0 \in N(T_\lambda)$, 同时由 p 是连续, 得

$$p(z_{n_j}) \rightarrow p(z_0)$$

因此再从(9) 式得到

$$p(z_0) = \|x_0 + z_0\| = k$$

这表明: 对给定的 y , (1) 若有解, 则解集包含一“最小范数解” $\tilde{x} = x_0 + z_0$

(b) 现证明存在一 $c > 0$ (不依赖于 y) 使得对于满足(1) 的任意“最小范数解” \tilde{x} 及对应的 $y = T_\lambda \tilde{x}$, (8) 式成立.

假设论断不成立, 则存在一序列 (y_n) 使得

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad (10)$$

其中 \tilde{x}_n 为最小范数且满足 $T_\lambda \tilde{x}_n = y_n$, 乘以某一 α 后对于

αy_n 其对应的 $\alpha \tilde{x}_n$ 亦为最小范数解且 $\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} = \frac{\|2\tilde{x}_n\|}{\|2y_n\|}$ 因此不

失一般性可假设 $\|\tilde{x}_n\| = 1$, 则(10)式蕴涵 $\|y_n\| \rightarrow 0$, 由 T 为

紧的且 (\tilde{x}_n) 为有界, 则 $(T\tilde{x}_n)$ 含一收敛的子序列, 如

$T\tilde{x}_n \rightarrow v_*$, 为方便起见令 $v_* = \lambda\tilde{x}_*$ 则有

$$T\tilde{x}_{n_j} \rightarrow \lambda\tilde{x}_* \quad (j \rightarrow \infty) \quad (11)$$

由于 $y_n = T_\lambda \tilde{x}_n = T \tilde{x}_n - \lambda\tilde{x}_n$ 有 $\lambda\tilde{x}_n = T\tilde{x}_n - y_n$. 根据(11)及 $\|y_n\| \rightarrow 0$ 且 $\lambda \neq 0$ 得到

$$\tilde{x}_{n_j} = \frac{1}{\lambda} (T\tilde{x}_{n_j} - y_n) \rightarrow \tilde{x}_* \quad (j \rightarrow \infty) \quad (12)$$

据此且由 T 为连续得

$$T\tilde{x}_{n_j} \rightarrow T\tilde{x}_*$$

由(11)知 $T\tilde{x}_* = \lambda\tilde{x}_*$. 因为 $T_\lambda \tilde{x}_n = y_n$ 可见 $x = \tilde{x}_n - \tilde{x}_*$ 满足 $T_\lambda x = y_n$. 由于 \tilde{x}_n 为“最小范数解”, 则,

$$\|x\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_*\| \geq \|\tilde{x}_n\| = 1$$

但这与(12)式的收敛性相矛盾. 因此(10)不能成立. 即(10)式中商的序列必有界, 即必有

$$c = \sup_{y \neq 0}^{(X)} \frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|} < \infty$$

其中 $y = T_\lambda \tilde{x}$. 故(8)成立得证

用上述引理, 类似于定理7.5-1对(1)的可解性, 既可得出(3)的可解特征.

7.5-3 定理 ((3)的解). 设 $T: X \rightarrow X$ 为一赋范空间 X 上的紧线性算子且 $\lambda \neq 0$. 则(3)有解的充分且必要条件是 g 对所有满足(2)式的 $x \in X$ 有

$$g(x) = 0 \quad (13)$$

因此若(2) 仅有平凡解 $x=0$, 则(3) 式对任意给定的 $g \in X^*$ 均可解.

证明 (a) 若(3) 有一解 f 且 x 满足(2), 则由

$$g(x) = (T^*f)(x) - \lambda f(x) = f(Tx - \lambda x) = f(0) = 0$$

知(13)成立

(b) 反之, 设对任意(2) 的解 x , g 满足(13), 现证(3) 有一解 f . 今考察任意 $x \in X$ 且令 $y = T_1 x$, 则 $y \in T_1(X)$. 定义 $T_1(X)$ 上的泛函如下:

$$f_0(y) = f_0(T_1 x) = g(x)$$

此定义是很明确的; 因为若 $T_1 x_1 = T_1 x_2$ 则 $T_1(x_1 - x_2) = 0$ 因而 $x_1 - x_2$ 为(2) 的解; 由假设知 $g(x_1 - x_2) = 0$ 即 $g(x_1) = g(x_2)$.

因为 T_1 与 g 均为线性故 f_0 为线性, 下面证明其为有界. 引理7.5-2保证对每一 $y \in T_1(X)$ 至少对应一 x 且满足

$$\|x\| \leq c \|y\| \quad (y = T_1 x)$$

其中的 c 不依赖于 y . 而 f_0 的有界性可由下式得知:

$$|f_0(y)| = |g(x)| \leq \|g\| \cdot \|x\| \leq c \|g\| \cdot \|y\| = \tilde{c} \|y\|$$

其中 $\tilde{c} = c \|g\|$. 由Hahn-Banach定理4.3-2, 泛函 f_0 在 X 上有一扩张 f , 其为定义在全空间 X 上的有界线性泛函.

$$f(Tx - \lambda x) = f(T_1 x) = f_0(T_1 x) = g(x)$$

在上式左边, 由伴随算子定义, 对所有 $x \in X$ 有

$$f(Tx - \lambda x) = f(Tx) - \lambda f(x) = (T^*f)(x) - \lambda f(x)$$

与前一式合在一起证得该 f 为(3) 的一解, 则定理中第一部分得证, 从其很容易推出第二部分.

§7.6 Fredholm型的其他定理

至于算子方程可解性，在本节给出进一步结果.

$$Tx - \lambda x = y \quad (y \text{ 为给定}) \quad (1)$$

$$Tx - \lambda x = 0 \quad (2)$$

$$T^*f - \lambda f = g \quad (g \text{ 为给定}) \quad (3)$$

$$T^*f - \lambda f = 0 \quad (4)$$

假设条件与前一节完全一致. 如 $T: X \rightarrow X$ 为一赋范空间 X 上的紧线性算子, T^* 为 T 的伴随算子且 $\lambda \neq 0$ 为给定.

上一节与本节定理是 Fredholm 著名理论的一般化, 上一节的主要结果是依 (4) 来刻画 (1) 的可解性 (定理 7.5-1) 和依 (2) 刻画 (3) 的可解性 (定理 7.5-3), 自然期望在 (1) 与 (2) 之间和 (3) 与 (4) 之间也会有类似的关系.

7.6-1 定理((1)的解). 设 $T: X \rightarrow X$ 为一赋范空间 X 上的紧线性算子且 $\lambda \neq 0$ 则

(a) 方程 (1) 对每一 $y \in X$ 有解 x 的充分必要条件是: 对应齐次方程 (2) 只有平凡解 $x = 0$, 在这种情况下 (1) 的解是唯一的, 且 T_λ 具有有界的逆.

(b) 方程 (3) 对每一 $g \in X^*$ 有解 f 的充分必要条件是 (4) 只有平凡解 $f = 0$, 此时 (3) 的解唯一.

证明 (a) 先证明若对每一 $y \in X$ 方程 (1) 可解, 则 $x = 0$ 为 (2) 的唯一解.

否则 (2) 有一解 $x_1 \neq 0$, 因为 (1) 对任意 y 均可解则 $T_\lambda x = y = x_1$ 有解设其为 x_2 , 即 $T_\lambda x_2 = x_1$, 类似地有 x_3 使 $T_\lambda x_3 = x_2$, 等等. 根据假设对任意 $k = 2, 3, \dots$ 有

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = T_\lambda^2 x_3 = \dots = T_\lambda^{k-1} x_k,$$

且

$$0 = T_{\lambda} x_1 = T_{\lambda}^k x_k,$$

因此 $x_k \in N(T_{\lambda}^k)$ 但 $x_k \notin N(T_{\lambda}^{k-1})$, 这表明对所有的 k 零空间 $N(T_{\lambda}^{k-1})$ 为 $N(T_{\lambda}^k)$ 的真子空间, 但这与定理 7.4-3 矛盾, 因此 $x = 0$ 必为 (2) 的唯一解.

反之, 设 $x = 0$ 是 (2) 的唯一解, 则由定理 7.5-3(3) 式对任意 g 均有解. 现知 T^* 为紧的 (参看 7.2-5) 故可对 T^* 使用证明的前一部分得到 $f = 0$ 为 (4) 的唯一解. 再从 7.5-1 推得 (1) 对于任意 y 均有解.

唯一性的结论可从 (1) 的两解的差为 (2) 的解这一事实中得出. 显然此唯一解 $x = T_{\lambda}^{-1}y$ 为最小范数解, 由引理 7.5-2

$$\|x\| = \|T_{\lambda}^{-1}y\| \leq c \|y\|$$

得出 T_{λ}^{-1} 的有界性.

(b) 由 T^* 为紧的 (参看 7.2-5) 则 (b) 可作为 (a) 的推论.

齐次方程 (2) 与 (4) 亦有关联, 可以看到其具有相同个数的线性无关解. 在证明中需要知道下面的 X 与 X^* 中与 (5) 有关的某集类的存在性, 这常称作双正交系.

7.6-2 引理 (双正交系). 在赋范空间 X 的对偶空间 X^* 中, 给出一线性无关集 $\{f_1, \dots, f_m\}$, 则在 X 中存在元素 z_1, \dots, z_m 使得

$$f_j(z_k) = \sigma_{j,k} = \begin{cases} 0, & (j \neq k) \\ 1, & (j = k) \end{cases} \quad (j, k = 1, \dots, m) \quad (5)$$

证明: 由于 f_j 顺序无关紧要, 因而只要证明存在一 m 使得

$$f_m(z_m) = 1 \quad \text{且} \quad f_g(z_m) = 0 \quad (j = 1, \dots, m-1) \quad (6)$$

当 $m = 1$ 时由线性无关 $f_1 \neq 0$, 故存在 x_0 $f_1(x_0) \neq 0$, 令 $z_1 = \alpha x_0$, 其中 $\alpha = 1/f_1(x_0)$ 得 $f_1(z_1) = 1$.

$m > 1$ 时归纳法证明, 设引理对 $m-1$ 成立, 即 X 包含 $m-1$ 个元素 z_1, \dots, z_{m-1} 使得

$$f_k(z_k) = 1, \quad f_n(z_k) = 0 \quad n \neq k \quad (k, n = 1, \dots, m-1) \quad (7)$$

今考察集

$$M = \{x \in X \mid f_1(x) = 0, \dots, f_{m-1}(x) = 0\}$$

现证明 M 定包含一 \tilde{z}_m 使得 $f_m(\tilde{z}_m) = \beta \neq 0$, 由此令 $z_m = \beta^{-1}$

z_m 显然可知 (b) 成立.

否则对所有 $x \in M$ $f_m(x) = 0$, 任意给定 $x \in X$ 与集

$$\tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{m-1} f_i(x) z_i, \quad (8)$$

则由 (7) 知对 $k \leq m-1$

$$\begin{aligned} f_k(\tilde{x}) &= f_k(x) - \sum_{i=1}^{m-1} f_i(x) f_k(z_i) = f_k(x) \\ &\quad - f_k(x) = 0. \end{aligned}$$

这表明 $\tilde{x} \in M$, 并由假设知 $f_m(\tilde{x}) = 0$. 再从 (8) 式得

$$\begin{aligned} f_m(x) &= f_m\left(\tilde{x} + \sum_i f_i(x) z_i\right) \\ &= f_m(\tilde{x}) + \sum_i f_i(x) f_m(z_i) \\ &= \sum_i \alpha_i f_i(x), \quad [\alpha_i = f_m(z_i)] \end{aligned}$$

(对 i 从 1 到 $m-1$ 取和), 因 $x \in X$ 为任意, 得 f_m 可由 $f_1, \dots,$

f_{m-1} 线性表示, 这与 $\{f_1, \dots, f_m\}$ 线性无关矛盾, 因此对所有 $x \in X$ $f_m(x) = 0$ 不可能成立, 故 M 必含 $-z_m$, 其使 (6) 式成立. 引理得证.

用此引理可证得 $\dim N(T_\lambda) = \dim N(T_\lambda^*)$ 其中 $T_\lambda^* = (T - \lambda I)^* = T^* - \lambda I$, 对于所考察的算子方程, 这样的维数相等意味着下述结果.

7.6-3 定理 (T_λ 与 T_λ^* 的零空间). 设 $T: X \rightarrow X$ 为一赋范空间 X 上的紧线性算子且 $\lambda \neq 0$, 则方程 (2) 与 (4) 具有相同数目的线性无关解.

证明: T 与 T^* 为紧的 (参看 7.2-5), 故由 7.3-3 知 $N(T_\lambda)$ 与 $N(T_\lambda^*)$ 为有限维的如:

$$\dim N(T_\lambda) = n, \quad \dim N(T_\lambda^*) = m.$$

现将证明分成 (a), (b), (c) 三部分, 各自的作用是

(a) 对 $m = n = 0$ 时加以证明, 并对 $m > 0$ 与 $n > 0$ 作准备

(b) 证明 $n < m$ 为不可能

(c) 证明 $n > m$ 为不可能

详细论证如下

(a) 若 $n = 0$, 则 (2) 的唯一解为 $x = 0$, 则 (3) 对任意给定的 g 均可解 (参看 7.5-3). 由 7.6-1 推得 $f = 0$ 为 (4) 的唯一解, 因此 $m = 0$. 类似地从 $m = 0$ 推得 $n = 0$.

假设 $m > 0$ 且 $n > 0$. 设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 $N(T_\lambda)$ 的一基, 显然 $x_1 \notin Y = \text{Span}\{x_2, \dots, x_n\}$. 由引理 4.5-7 知存在一 $\tilde{g}_1 \in X^*$ 其在 Y 上处处为零且 $\tilde{g}_1(x_1) = \delta$, 其中 $\delta > 0$ 为 x_1 到 Y 的距离. 因此 $g_1 = \delta^{-1} \tilde{g}_1$ 满足 $g_1(x_1) = 1$ 且 $g_1(x_2) = 0, \dots, g_1(x_n) = 0$. 类似地存在一 g_2 使得 $g_2(x_2) = 1$ 且对 $j \neq 2$ $g_2(x_j) = 0$,

等等. 因此 X^* 包含 g_1, \dots, g_n 且有

$$g_k(x_j) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{若 } j \neq k \\ 1, & \text{若 } j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad (9)$$

类似地推得: 若 $\{f_1, \dots, f_m\}$ 为 $N(T_\lambda^*)$ 的一基, 则由引理 7.6-2 存在 X 的元素 z_1, \dots, z_m 使得

$$f_j(z_k) = \sigma_{j,k} \quad (j, k = 1, \dots, m) \quad (10)$$

(b) 证明 $n < m$ 不可能, 令 $n < m$ 且 $S: X \rightarrow X$ 定义为:

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^n g_i(x)z_i \quad (11)$$

由 7.1-4(a) 知 $g_i(x)z_i$ 表示一紧线性算子且紧算子之和仍为紧的故 S 为紧的. 下面证明

$$(a) \quad S_\lambda x_0 = Sx_0 - \lambda x_0 = 0 \implies (b) \quad x_0 = 0 \quad (12)$$

由 (12a) 得到对 $k = 1, \dots, m$ 有 $f_k(S_\lambda x_0) = f_k(0) = 0$, 因此由 (11) 与 (10) 得到,

$$\begin{aligned} 0 &= f_k(S_\lambda x_0) = f_k\left(T_\lambda x_0 + \sum_{i=1}^n g_i(x_0)z_i\right) \\ &= f_k(T_\lambda x_0) + \sum_{i=1}^n g_i(x_0)f_k(z_i) \\ &= (T_\lambda^* f_k)(x_0) + g_k(x_0) \end{aligned} \quad (13)$$

因为 $f_k \in N(T_\lambda^*)$ 则有 $T_\lambda^* f_k = 0$, 故由 (13) 得到

$$g_k(x_0) = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \quad (14)$$

这蕴涵着 $Sx_0 = Tx_0$ (由 (11)) 及 $T_\lambda x_0 = S_\lambda x_0 = 0$ (由 (12a))

因此 $x_0 \in N(T_\lambda)$. 由于 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 $N(T_\lambda)$ 的一基到

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

其中 α_i 为相应的系数, 将 (14) 与 (9) 用到 g_k 上得

$$0 = g_k(x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x_i) = \alpha_k \quad (k=1, \dots, n)$$

因此 $x_0 = 0$, (12) 得证. 又由 7.6-1(a) 得知对任意 y $S_1 x = y$ 有解. 选 $y = z_{n+1}$ 并令 $x = v$ 为对应的一解, 即 $S_1 v = z_{n+1}$. 与 (13) 的计算相同, 利用 (10) 与 (11) 得:

$$\begin{aligned} 1 &= f_{n+1}(z_{n+1}) = f_{n+1}(S_1 v) \\ &= f_{n+1}\left(T_1 v + \sum_{i=1}^n g_i(v) z_i\right) \\ &= (T_1^* f_{n+1})(v) + \sum_{i=1}^n g_i(v) f_{n+1}(z_i) \\ &= (T_1^* f_{n+1})(v) \end{aligned}$$

因为假设 $n < m$ 即 $n+1 \leq m$ 故 $f_{n+1} \in N(T_1^*)$, 因此 $T_1^* f_{n+1} = 0$ 这与上面结果 $(T_1^* f_{n+1})(v) = 1$ 矛盾, 故证得 $n > m$ 为不可能.

(c) 再证明 $n > m$ 亦不可能. 方法与 (b) 相似. 设 $n > m$ 且 $\tilde{S}: X^* \rightarrow X^*$ 定义为

$$\tilde{S}f = T^*f + \sum_{i=1}^n f(z_i)g_i \quad (15)$$

由 7.2-5 知 T^* 为紧的再由 7.14(a) 知 $f(z_i)g_i$ 表示一紧算子则 \tilde{S} 为紧的, 现证明

$$(a) \quad \tilde{S}f_0 = S f_0 - \lambda f_0 = 0 \implies (b) \quad f_0 = 0 \quad (16)$$

利用 (16a) 及在 (15) 中 $f = f_0$ 及伴随算子定义与 (9) 对每一 $k = 1, \dots, m$ 有

$$0 = (\tilde{S}_1 f_0)(x_k) = (T_1^* f_0)(x_k) + \sum_{i=1}^m f_0(z_i)g_i(x_k)$$

$$= f_0(T_{\lambda}x_k) + f_0(z_k) \quad (17)$$

由假设 $m < n$ 知对 $k = 1, \dots, m$ $x_k \in N(T_{\lambda})$ [注意 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 $N(T_{\lambda})$ 的一基] 因此 $f_0(T_{\lambda}x_k) = f_0(0) = 0$ 得

$$f_0(z_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, m). \quad (18)$$

从(15)定有 $\tilde{S}f_0 = T^{\times}f_0$ 由此及(16a)推得 $T_{\lambda}^{\times}f_0 = \tilde{S}_{\lambda}f_0 = 0$ 因而 $f_0 \in N(T_{\lambda}^{\times})$. 因为 $\{f_1, \dots, f_m\}$ 为 $N(T_{\lambda}^{\times})$ 的一基. 故

$$f_0 = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i,$$

其中 β_i 为对应系数. 利用(18)与(10)得到对每一 $k = 1, \dots, m$

$$0 = f_0(z_k) = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(z_k) = \beta_k$$

因此 $f_0 = 0$, 故(16)得证. 根据7.6-1(b)知对任意 g $\tilde{S}_{\lambda}f = g$ 为可解. 现取 $g = g_{m+1}$ 并没 $f = h$ 为对应的一解, 即 $\tilde{S}_{\lambda}h = g_{m+1}$. 用(9)、(15)并再一次用(9)得

$$\begin{aligned} 1 &= g_{m+1}(x_{m+1}) = (\tilde{S}_{\lambda}h)(x_{m+1}) \\ &= (T_{\lambda}^{\times}h)(x_{m+1}) + \sum_{i=1}^m h(z_i)g_i(z_{m+1}) \\ &= (T_{\lambda}^{\times}h)(x_{m+1}) = h(T_{\lambda}x_{m+1}). \end{aligned}$$

假设 $m < n$ 即 $m+1 \leq n$, 故 $x_{m+1} \in N(T_{\lambda})$, 因而 $h(T_{\lambda}x_{m+1}) = h(0) = 0$, 这与上式相矛盾因而证得 $m < n$ 不可能成立. 再由(b)知亦不可能 $n < m$, 故必有 $n = m$.

利用7.6-1(a)还能证明以前的定理7.4-4, 其中Banach空间条件可放宽为一般赋范空间.

7.6-4 定理 (特征值). 设 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间 X 上的紧线性算子, 若 T 具有非零的谱值则其每一值必为 T 的特

征值.

证明: 若预解式 $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ 不存在, 则由定义 $\lambda \in \sigma_p(T)$. 设 $\lambda \neq 0$ 且 $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ 存在, 则由 2.6-10 知 $T_\lambda x = 0$ 蕴涵 $x = 0$, 这表明 (2) 式只有平凡解, 定理 7.6-1(a) 证明 (1) 对任意 y 均可解, 即 R_λ 在全 X 上有定义且有界, 因此 $\lambda \in p(T)$.

习 题 7.6

1. 试证: 定理 7.5-3 证明中的泛函 f_0 为线性的.
2. 定理 7.5-1 在 n 个未知量 n 个线性代数方程组的情况下含义是什么?
3. 考察由 n 个未知量与 n 个线性方程组成的方程组 $Ax = y$, 所设此方程组有一解 x , 试证明该 y 必满足条件: 第 5 节中的式 (5).
4. n 个未知量 n 个线性方程的方程组 $Ax = y$, 对任意给定的 y 有 (唯一) 解的充分必要条件是 $Ax = 0$ 只有平凡解 $x = 0$, 从目前的定理中如何得到这一结论?
5. 由 n 个未知量与 n 个线性方程组成的方程组 $Ax = y$, 其有一解 x 的充分必要条件是增广矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \eta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \eta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \eta_n \end{pmatrix}$$

与系数矩阵具有相同的秩数, 其中 $y = (\eta_i)$ 试从定理 7.5-1 中得出相同的准则.

6. 若 (2) 有 $x \neq 0$ 的解且 (1) 有解, 证明 (1) 的解不能唯一; 类似地若 (4) 有 $f \neq 0$ 的解且 (3) 有解, 证明 (3) 的解不能唯一.
7. 试证明: 定理 7.6-1 的第一部分可用下述形式表示:

$R_\lambda(T): X \rightarrow X$ 且 $\lambda \neq 0$ 其存在的充分必要条件是: $Tx = \lambda x$

蕴涵 $x = 0$.

8. 在赋范空间 X 上的一序列 (z_1, z_2, \dots) 与其对偶空间 X^* 的一序列 (f_1, f_2, \dots) 若满足 $f_j(z_k) = \delta_{jk}$ 其中 $j, k = 1, 2, \dots$; 参看 (5) 则称此两序列为双直交系.

试证明: 对给定的 (z_k) , 在 X^* 中存在双直交系 (f_j) 的充分必要条件为: 对所有 $m \in N$ $z_m \in \overline{A_m}$ 其中

$$A_m = \text{Span} \{z_k | k = 1, 2, \dots, k \neq m\} .$$

9. 对有限的双直交系 (其定义见课文) 习题8所叙条件自然满足. 试证明之.

10. 在一内积空间中两集 $\{z_1, \dots, z_n\}$ 与 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 若满足 $\langle z_k, y_j \rangle = \delta_{kj}$, 试证其每一集均线性无关.

11. 在Hilbert空间中上述双直交系的条件是什么形式?

12. 若 X 为一Hilbert空间 H , 试叙述并证明引理7.6-2.

13. 定理7.6-3在 n 个未知量和 n 个线性方程的方程组情况下 其具体形式是什么?

14. 若一赋范空间 X 上的线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 具有有限维的值域 $R(T) = T(X)$.

试证明 T 具有下述表达形式

$$Tx = f_1(x)y_1 + \dots + f_n(x)y_n$$

其中 $\{y_1, y_n\}$ 与 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 分别为 Y 与 X^* (X 的对偶空间) 的线性无关集.

15. 当 $\lambda = 0$ 时, 有关定理会有什么使人感到奇异的结果, 此时, (1) 与 (2) 式各成为

$$Tx = y \quad \text{与} \quad Tx = 0$$

为此考察 $T: C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$ 其定义为

$$Tx(s) = \int_0^\pi K(s, t)x(t)dt, \quad K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nss \sin nt.$$

§7.7 Fredholm择一性

前二节主要研究与算子方程的可解性有关的紧线性算子的性能, 在其结果启示下得到如下概念.

7.7-1 **定义**(Fredholm择一性). 在赋范空间 X 上的有界线性算子 $A: X \rightarrow X$ 称为满足Fredholm择一性, 若 A 满足(I)或者满足(II).

(I) 非齐次方程

$$Ax = y, \quad A^*f = g$$

($A^*: X^* \rightarrow X^*$ 为 A 的伴随算子) 对任意给定的 $y \in X$ 与 $g \in X^*$, 均各有解 x 与 f , 且解唯一. 对应齐次方程

$$Ax = 0 \quad A^*f = 0$$

各只有平凡解 $x = 0$ 与 $f = 0$.

(II) 齐次方程

$$Ax = 0, \quad A^*f = 0$$

各有相同数目的线性无关解

$$x_1, \dots, x_n \text{ 与 } f_1, \dots, f_n \quad (n \geq 1)$$

非齐次方程

$$Ax = y, \quad A^*f = g$$

各对任意的 y 与 g 并不总有解. 其各有解的充分必要条件是 y 与 g 各满足

$$f_k(y) = 0, \quad g(x_k) = 0.$$

($k = 1, \dots, n$)

我们看到上述概念可用来概括上两节的结果.

7.7-2 **定理**(Fredholm择一性). 赋范空间 X 上的紧线性算子 $T: X \rightarrow X$ 当 $\lambda \neq 0$ 时, $T_\lambda = T - \lambda I$ 满足 Fredholm择

一性.

在应用上排他的择一性论断具有重要的实际意义, 因为常来论证更为简单的齐次方程是否仅具有平凡解, 以代替直接说明解的存在性.

在§7.5 中已表明: 紧线性算子的Riesz理论是在第二类积分方程

$$x(s) - \mu \int_b^a K(s, t)x(t)dt = \tilde{y}(s) \quad (1)$$

的Fredholm理论启发下并将Fredholm著名结果一般化.

下面对形式为(1) 的紧线性算子方程的理论与应用作一简要介绍.

设 $\mu = 1/\lambda$, 且 $\tilde{y}(s) = -y(s)/\lambda$, 其中 $\lambda \neq 0$, 得

$$Tx - \lambda x = y \quad (\lambda \neq 0) \quad (2)$$

其中 T 定义为

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt \quad (3)$$

根据一般理论可对(2) 式表述如下

7.7-3 定理(积分方程的择一性). 若(1) 中之 K 使得(2) 与(3) 中的 $T: X \rightarrow X$ 为赋范空间 X 上一紧线性算子, 则对 T , Fredholm择一性成立; 就是(1) 或者对所有 $\tilde{y} \in X$ 均有唯一解或者对应(1) 的齐次方程具有有限多个线性无关解 (即 $x \neq 0$ 的解) .

假设(2) 中的 T 为紧的 (此条件将在后面给出), 若 λ 为 T 的预解集 $\rho(T)$ 中一值, 则预解式 $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ 存在, 并在全空间 X 上有定义, 且有界〔参看7.6-1(a)〕, 由(2) 式得出唯一解

$$x = R_\lambda(T)y$$

由于 $R_\lambda(T)$ 为线性, 且 $R_\lambda(T)0 = 0$ 这蕴涵齐次方程 $Tx - \lambda x = 0$ 仅有平凡解, 因此当 $\lambda \in \rho(T)$ 此时为Fredholm择一性中(I)的情况.

设 $|\lambda| \geq \|T\|$, 并且 X 为复Banach空间, 由定理6.3-4知 $\lambda \in \rho(T)$, 再由6.3节式(9)得

$$R_\lambda(T) = -\lambda^{-1}(I + \lambda^{-1}T + \lambda^{-2}T^2 + \cdots) \quad (4)$$

由此知解 $x = R_\lambda(T)y$ 可表示为所谓的Neumann级数:

$$x = -\frac{1}{\lambda}\left(y + \frac{1}{\lambda}Ty + \frac{1}{\lambda^2}T^2y + \cdots\right), \quad (5)$$

若 T 的谱存在非零 $\lambda \in \sigma(T)$, 则可有, Fredholm择一性中(II)的情况. 定理7.6-4表明 λ 为一特征值, 由定理7.3-3知其对应的特征空间维数有限, 并由定理7.6-3还可知等于相应的 T^* 的零空间的维数.

在实际中定理7.7-3所涉及的两个重要空间为:

$$X = L^2[a, b] \text{ 与 } X = C[a, b]$$

为了使用定理, (1) 中的核 K 均应使 T 满足紧的条件.

若 $X = L^2[a, b]$, 则该条件要求 K 在 $L^2(J \times J)$ 内是连续的, 其中 $J = [a, b]$, 其证明需用到测度理论, 在本书范围内不予考虑.

在 $X = C[a, b]$ 情况下, 同样设 K 在 $J \times J$ 上为连续时就可保证 T 是紧的.

为得到这一结果, 我们使用下述重要的定理(7.7-4)

在 $C[a, b]$ 中的一序列 (x_n) 称为等度连续, 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一依赖于 ε 的 $\delta > 0$, 使得对所有的 x_n 及所有

的 $s_1, s_2 \in [a, b]$ 并且满足 $|s_1 - s_2| < \delta$ 均有

$$|x_n(s_1) - x_n(s_2)| < \varepsilon$$

从此定义中可看出: 每一 x_n 在 $[a, b]$ 上均一致连续, 且 δ 并不依赖于 n .

7.7-4 Ascoli定理(等度连续). 在 $C[a, b]$ 上的一有界等度连续序列 (x_n) 其含有一收敛的 (依 $C[a, b]$ 的范数) 子序列.

证明: 由于 (x_n) 是等度连续的, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $[a, b]$ 中的点 t', t , 当 $|t - t'| < \delta$ 时, (x_n) 中的每个 $x_n(t)$ 必有

$$|x_n(t) - x_n(t')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

利用这个 δ , 在 $[a, b]$ 上任取 m 个分点

$$a = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$$

使得 $|t_k - t_{k+1}| < \delta$. 因为 (x_n) 有界, 存在常数 $M > 0$, 使 (x_n) 中的每个 $x_n(t)$ 均有

$$\|x_n\| = \max |x_n(t)| \leq M.$$

$$t \in [a, b]$$

因此, 对于每个固定的 j , $(x_n(t_j))$ 均是有界数列, 利用引理 2.4-1 证明中的方法可以证明, 对于所有 $j = 1, 2, \cdots, m$, $(x_n(t_j))$ 有共同的收敛的子序列 $(x_{n_k}(t_j))$, 因此, 对 ε 存在正整数 K , 当 $k, h > K$ 时, 有

$$|x_{n_k}(t_j) - x_{n_h}(t_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

下面证明 (x_{n_k}) 是 (x_n) 的收敛子序列. 对于任意 $t \in [a, b]$,

设其落在 $[t_j, t_{j+1}]$ 上, 则当 $k, h > K$ 时.

$$\begin{aligned} |x_{n_k}(t) - x_{n_h}(t)| &\leq |x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_j)| + |x_{n_k}(t_j) \\ &\quad - x_{n_h}(t_j)| + |x_{n_h}(t_j) - x_{n_h}(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

于是, $\|x_{n_k} - x_{n_h}\| = \max_{t \in [a, b]} |x_{n_k}(t) - x_{n_h}(t)| < \varepsilon$.

即 (x_{n_k}) 是 $C[a, b]$ 的Cauchy序列, 由 $C[a, b]$ 是完备的. 从而证得 (x_{n_k}) 是 (x_n) 的收敛子序列.

在 $X = C[a, b]$ 时利用此定理可得预期结果如下:

7.7-5 定理(紧积分算子) 设 $J = [a, b]$, 且 K 在 $J \times J$ 上连续, 则由(3)式所定义的算子 $T: X \rightarrow X$, 其中 $X = C[a, b]$ 为一紧线性算子.

证明: T 为线性, 有界性可由下式得出.

$$\|Tx\| = \max_{s \in J} \left| \int_a^b K(s, t)x(t)dt \right| \leq \|x\| \max_{s \in J}$$

$$\int_a^b |K(s, t)| dt$$

即: $\|Tx\| \leq \tilde{C} \|x\|$. 令 (x_n) 为 X 中任意有界序列, 如对所有的 n $\|x_n\| \leq C$. 并设 $y_n = Tx_n$. 则 $\|y_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$.

因此 (y_n) 亦有界, 现证明 (y_n) 为等度连续. 因为根据假设核 K 在 $J \times J$ 上连续, $J \times J$ 为紧的, K 在 $J \times J$ 上一致连续. 因此对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $t \in J$ 及所有的 $S_1, S_2 \in J$ 且满足 $|S_1 - S_2| < \delta$ 均有

$$|K(s_1, t) - K(s_2, t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)c}$$

由此, 对上述的 s_1, s_2 及任意的 n 均有

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = \left| \int_a^b [K(s_1, t) - K(s_2, t)] \right.$$

$$x_n(t) dt \Big|$$

$$< (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{(b-a) \cdot c} \cdot c = \varepsilon.$$

这就证明了 (y_n) 的等度连续性. 由 *Ascoli* 定理知 (y_n) 含有一收敛的子序列. 因 (x_n) 为任意有界序列且 $y_n = Tx_n$, 根据定理 7.1-3 得出 T 为紧的.

习 题 7.7

1. 试表示 *Fredholm* 择一性在 n 个未知量与 n 个线性代数方程组时的具体形式.

2. 直接证明 (1) 式可能不总有解.

3. 对 (3) 式中的 K 给出一个不连续的例子, 使得对一连续的 x , 其象 Tx 为不连续.

4. (Neumann 级数) 在 (1) 式中若 $\mu = \frac{1}{\lambda}$ 与 $y = -y(s)/\lambda$ 证明

Neumann 级数 (5) 有下述形式

$$x = \tilde{y} + \mu T \tilde{y} + \mu^2 T^2 \tilde{y} + \dots$$

在 $C[a, b]$ 中考察 (1), 若 K 在 $[a, b]$ 上连续, 即可令 $|K(s, t)| < M$, 若 $|u| < 1/M(b-a)$, 试证 Neumann 级数收敛

5. 解下列积分方程, 并将结果与习题4中Neumann级数比较

$$x(s) - \mu \int_0^1 x(t) dt = 1$$

求出对应齐次方程的所有解并加以说明.

6. 解下列方程, 并证明: 若 $|\mu| < 1/K_0(b-a)$ 对应的Neumann级数 (参看习题4) 收敛.

$$x(s) - \mu \int_a^b K_0 x(t) dt = \tilde{y}(s)$$

其中 K_0 为常数

7. (叠核, 预解核) 试证在习题4 Neumann级数中的 $T^n \tilde{y}$ 可写为

$$(T_n \tilde{y})(s) = \int_a^b K_{(n)}(s, t) \tilde{y}(t) dt \quad n=2, 3, \dots$$

叠核 K_n 定义为

$$K_{(n)}(t, s) = \int_a^b \dots \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, t) dt_1$$

$\dots dt_{n-1}$, 则Neumann级数可写成:

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \int_a^b K(s, t) \tilde{y}(t) dt + \mu^2 \int_a^b K_{(2)}(s, t)$$

$\tilde{y}(t) dt + \dots$ 再证明: 此表达式又可写成积分方程:

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \int \tilde{K}(s, t, \mu) \tilde{y}(t) dt$$

其中预解核 \tilde{K} (注意不要与算子的预解式混淆) 定义为

$$\tilde{K}(s, t, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j K_{(j+1)}(s, t), \quad [K_{(1)} = K]$$

最后证明: 叠核满足

$$K_n(s, t) = \int_a^b K_{(n-1)}(s, u) K(u, t) du$$

8. 在(1)式中 $a = 0$, $b = \pi$ 且

$$K(s, t) = a_1 \sin s \cdot \sin 2t + a_2 \sin 2s \cdot \sin 3t$$

试确定其预解核.

9. 利用习题4中的Neumann级数解(1)

其中

$$a = 0, b = 2\pi \text{ 且}$$

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin ns \cdot \cos nt \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right)$$

10. 在(1)式中, 令 $K(s, t) = s(1+t)$ 且 $a = 0, b = 1$. 试确定特征值与特征函数. 当 $\lambda = 1/\mu$ 不为特征值时试解此方程.

11. 在(1)式中, 令 $K(s, t) = 2e^{s+t}$ 且 $\tilde{y}(s) = e^s$, 及 $a = 0, b = 1$, 试求特征值与特征函数.

12. 解

$$x(s) - \mu \int_0^{2\pi} \sin s \cos t \cdot x(t) dt = \tilde{y}(s)$$

13. Ascoli定理7.7-4涉及一子序列在依 $C[a, b]$ 中范数收敛, 并且知其在 $[a, b]$ 上一致收敛 (参看1.5-6). 试举例说明: 一连续函数序列, 其在 $[a, b]$ 上每一点收敛但不含在 $[a, b]$ 上一致收敛的子序列.

14. (退化核) 一核形如

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t)$$

称为退化核. 这时不妨假设 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 与 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 各为 $[a, b]$ 上的线性无关集, 否则的话可以减少和的项数. 若具有这类核的方程(1)有一解 x , 试证明其为如下形式:

$$x(s) = \widetilde{y}(s) + \mu \sum_{j=1}^n c_j a_j(s) \quad C_j = \int_a^b b_j(t) x(t) dt$$

且未知常数必满足:

$$C_j - \mu \sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = y_j, \quad a_{jk} = \int_a^b b_j(t) a_k(t) dt$$

其中

$$y_j = \int_a^b b_j(t) \widetilde{y}(t) dt \quad (j = 1, \dots, n)$$

15. 考察.

$$x(s) - \mu \int_0^1 (s+t) x(t) dt = \widetilde{y}(s)$$

(a) 假设 $\mu^2 + 12\mu - 12 \neq 0$ 并利用习题14结果解此方程

(b) 求其特征值和特征函数.

附录：复习与参考资料

A1.1 集(集合)

常用大写字母 $A, B, M, X, Y \dots$ 表示集, 也可用花括号表示, 例如:

$\{a, b, c\}$ 表示元素 a, b, c 组成的集.

$\{t \mid f(t) = 0\}$ 表示使 f 的值等于零的 t 的集. 集论中的某些记号:

ϕ 空集 (不含任何元素之集)

$a \in A$ a 是 A 的一个元素.

$b \notin A$ b 不是 A 的一个元素.

$A = B$ A 与 B 相等 (由相同元素组成的两集).

$A \neq B$ A 与 B 为不同的集 (不相等).

$A \subset B$ A 为 B 之子集 (A 中每个元素均为 B 的元素),

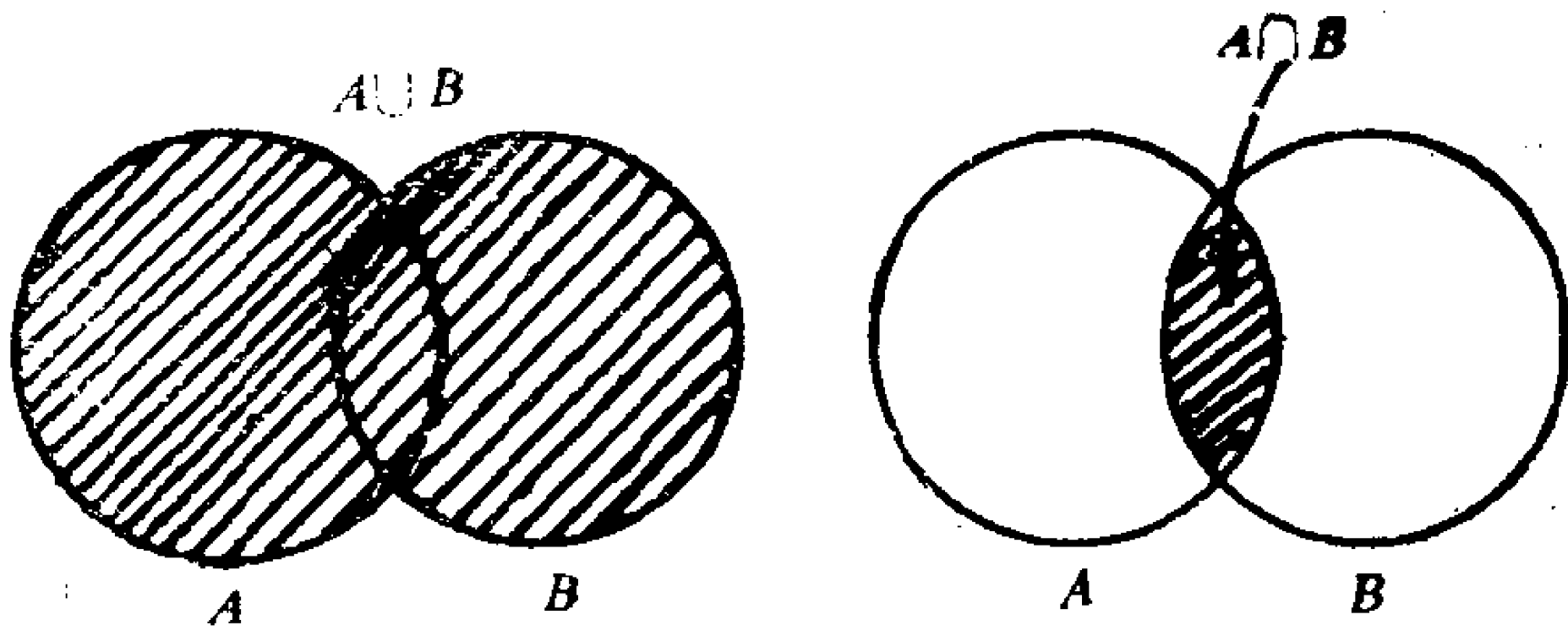
或写作 $B \supset A$.

$A \subset B, A \neq B$, A 是 B 的真子集 (A 是 B 的子集, 且 B 中至少有一元素不在 A 中).

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ A 与 B 的并集. (附图 1)

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ A 与 B 的交集. (附图 1)

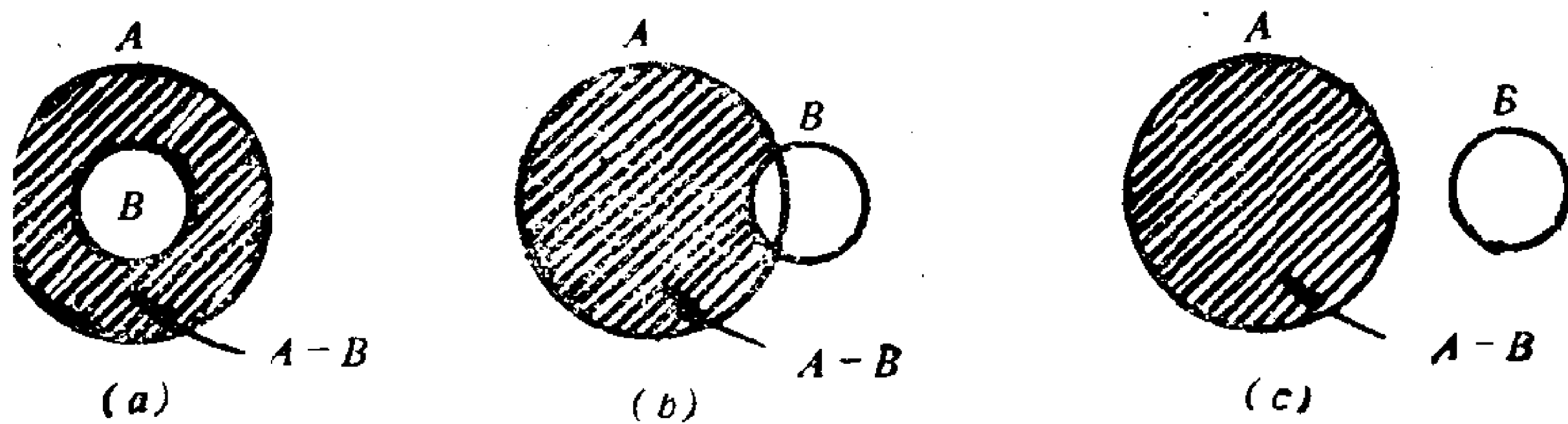
$A \cap B = \phi$ A 与 B 为不相交的两集 (A 与 B 没有公共元



附图 1 集 A 与 B 的并 $A \cup B$, 及交 $A \cap B$ (阴影部分)

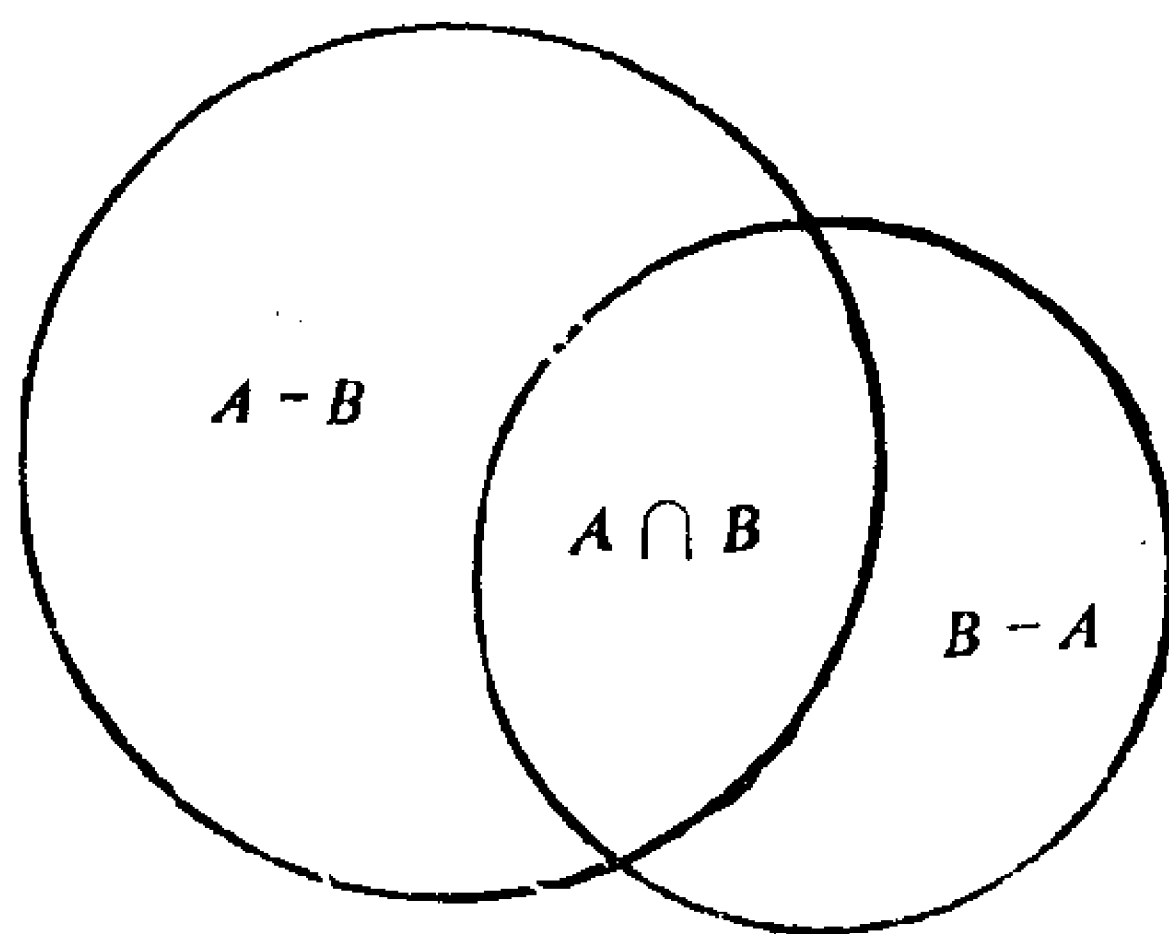
素)

$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, A 与 B 的差集 (B 可以是 A 的子集, 也可不是.) (附图 2、3)



附图 2 集 A 与 B 的差集 $A - B$ (阴影部分)

(a) $B \subset A$ (b) $A \cap B \neq \phi$ (c) $A \cap B = \phi$

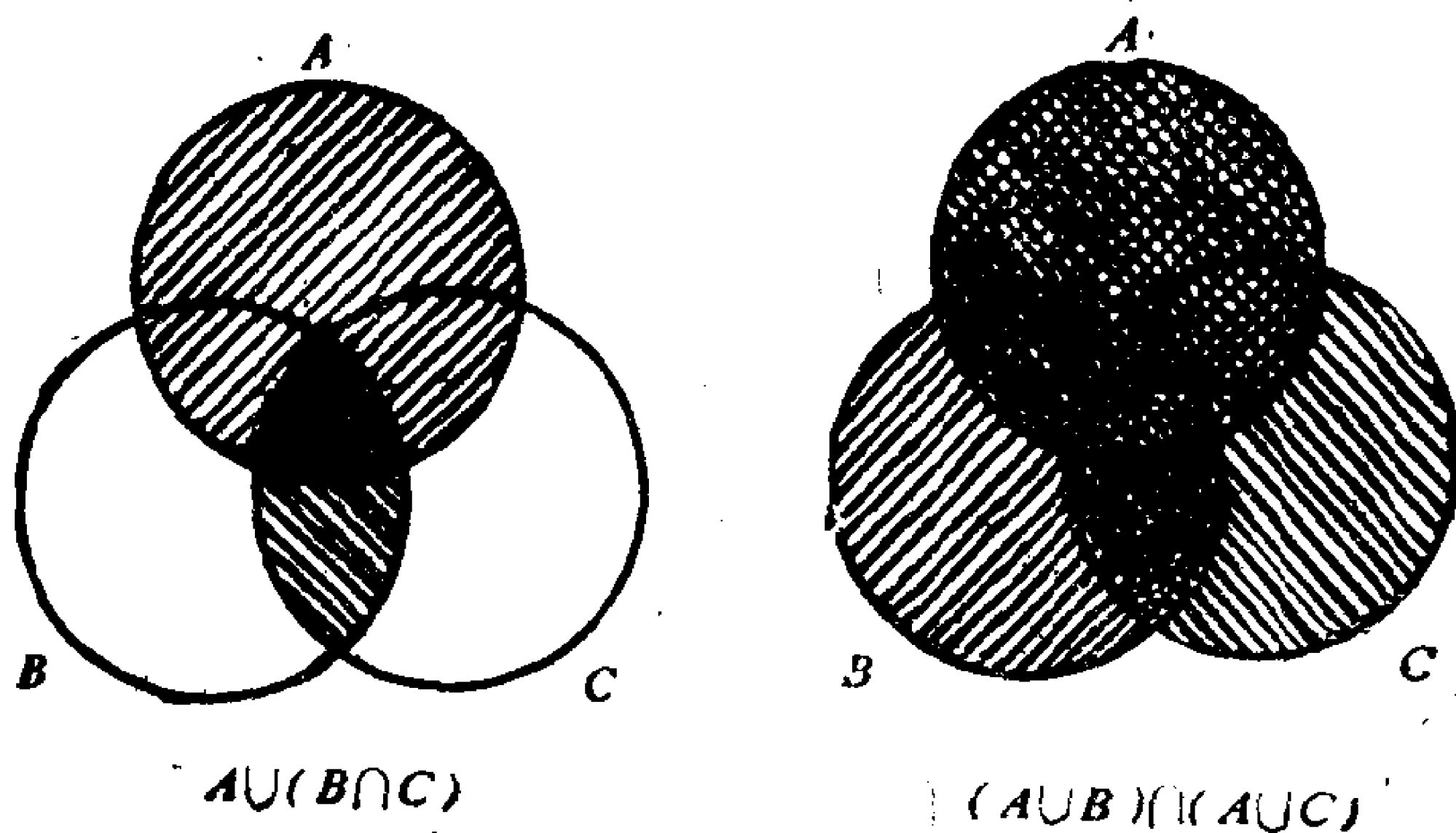


附图 3 差集 $A - B$ 与 $B - A$ 及集 A 与 B 的交 $A \cap B$

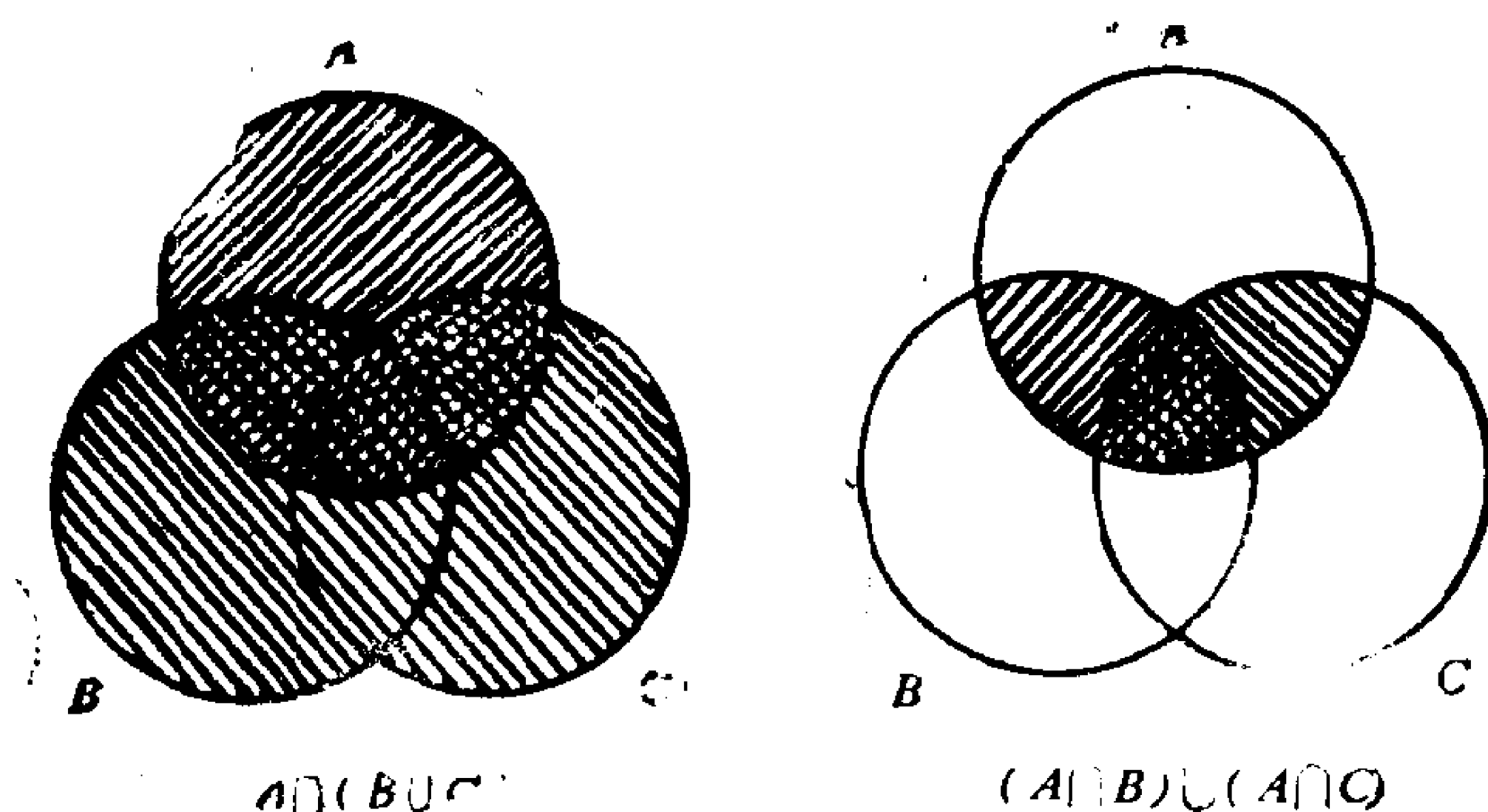
$A^c = X - A$ 为 A 在 X 中的余集 (这里 $A \subset X$, 为防止混淆, 可用记号 $C_X A$)

集合运算满足下列诸公式:

- (1a) $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
 (1b) $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
 (1c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 记作 $A \cup B \cup C$
 (1d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ 记作 $A \cap B \cap C$
 (1e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (附图 4)
 (1f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (附图 5)
 (1g) $A \cap B \subset A$ $A \cap B \subset B$
 (1h) $A \cup B \supset A$ $A \cup B \supset B$



附图 4 公式(1e)



附图 5 公式(1f)

因此

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$$

$$(2) \quad A \subset C \text{ 且 } B \subset C \iff A \cup B \subset C$$

$$C \subset A \text{ 且 } C \subset B \iff C \subset A \cap B$$

$$(3) \quad (A^c)^c = A \quad X^c = \phi \quad \phi^c = X.$$

(4) 狄·摩根 (De Morgan) 律 (A 与 B 为 X 的任意子集)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

显然

$$A \subset B \iff A^c \supset B^c$$

$$(5) \quad A \cap B = \phi \iff A \subset B^c \iff B \subset A^c$$

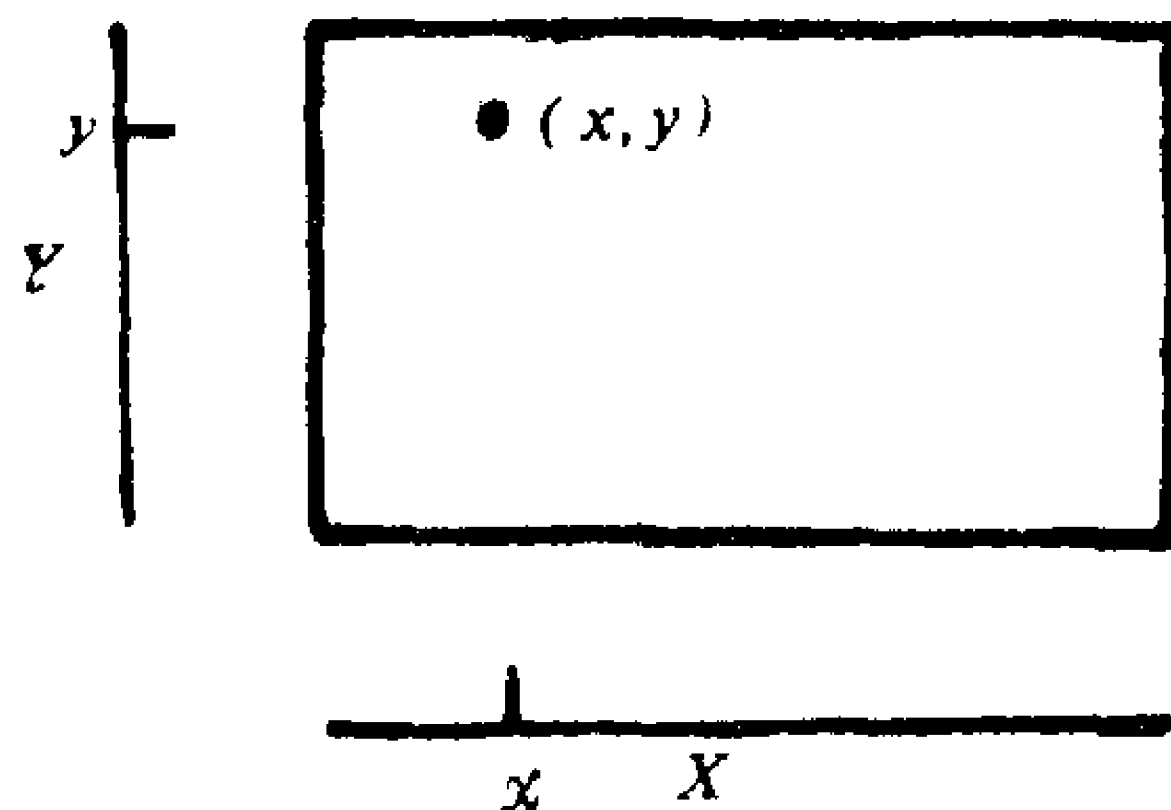
$$A \cup B = X \iff A^c \subset B \iff B^c \subset A.$$

对给定集 S 其所有子集组成之集, 称为 S 的幂集记作

$P(S)$.

设 X, Y 为二非空集. $x \in X$ 且 $y \in Y$ 的所有有序对 (x, y) 所成之集称为 X 与 Y 的笛卡儿乘积, 记为 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \text{ (附图 6)}$$



附图 6 X 与 Y 的笛卡儿乘积 $X \times Y$ 的图示

集 M 称为可数的, 是指集 M 含有有限多个元素, 或 M 中的每个元素可对应唯一的正整数, 且每一正整数对应唯一的 M 中元素.

非可数集称为不可数集.

A1.2 映射

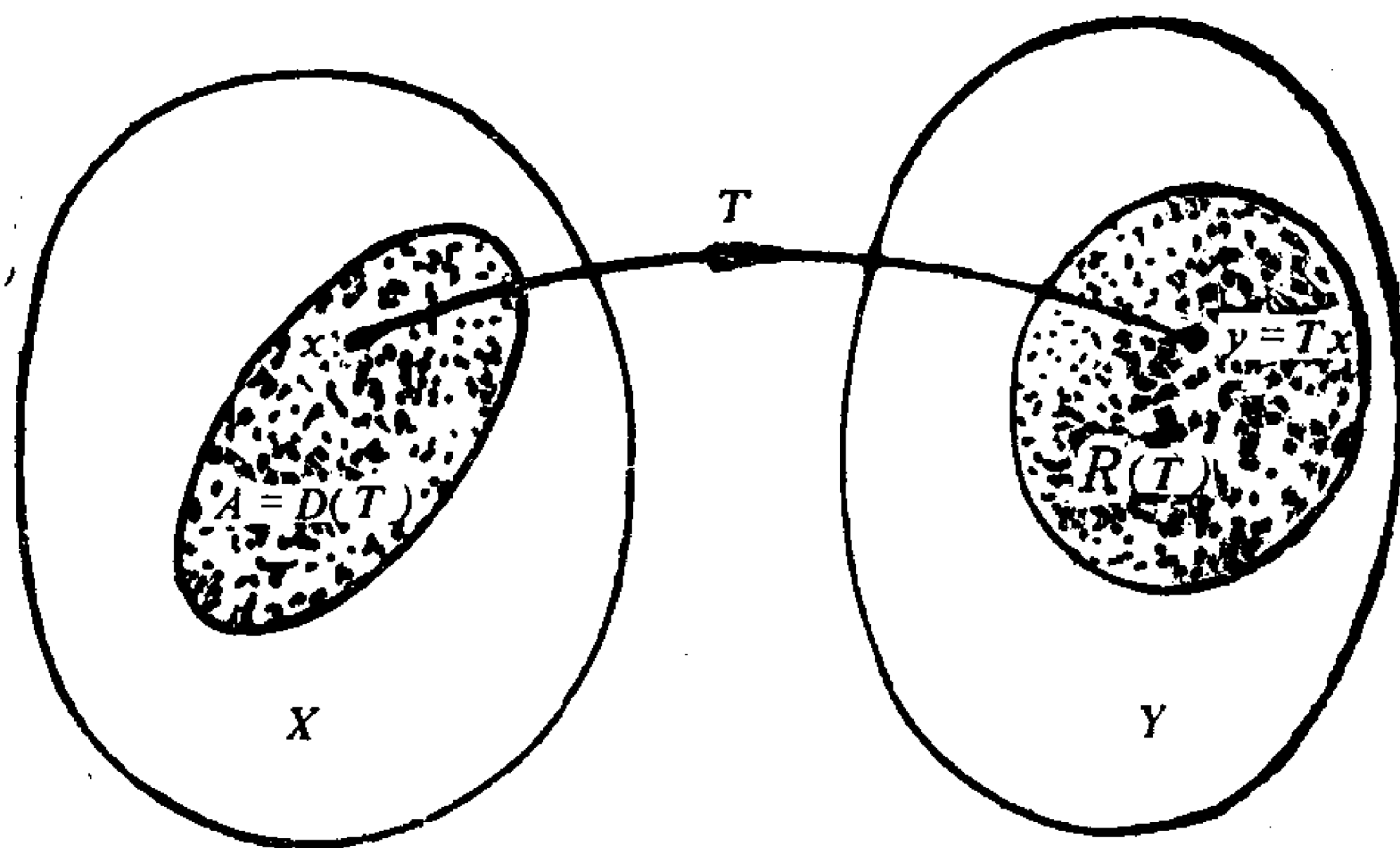
设 X, Y 为两非空集, 且 A 为 X 一子集, 若对每个 $x \in A$, 均有一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 就得到了 A 到 Y 里的映射 T , 记为 $y = Tx$, 并称 y 为 x 关于 T 的象. 集 A 叫映射 T 的定义域, 记为 $D(T)$, 映射 T 写为

$$T: D(T) \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto Tx$$

T 的值域 $R(T)$ 为所有象的集, 即

$$R(T) = \{y \in Y \mid y = Tx, x \in D(T)\} \quad (\text{附图 7})$$



附图 7 映射的图示

对于 $D(T)$ 的任意子集 M , 其象 $T(M)$ 为集:

$$T(M) = \{Tx \mid x \in M\}$$

因此 $T[D(T)] = R(T)$

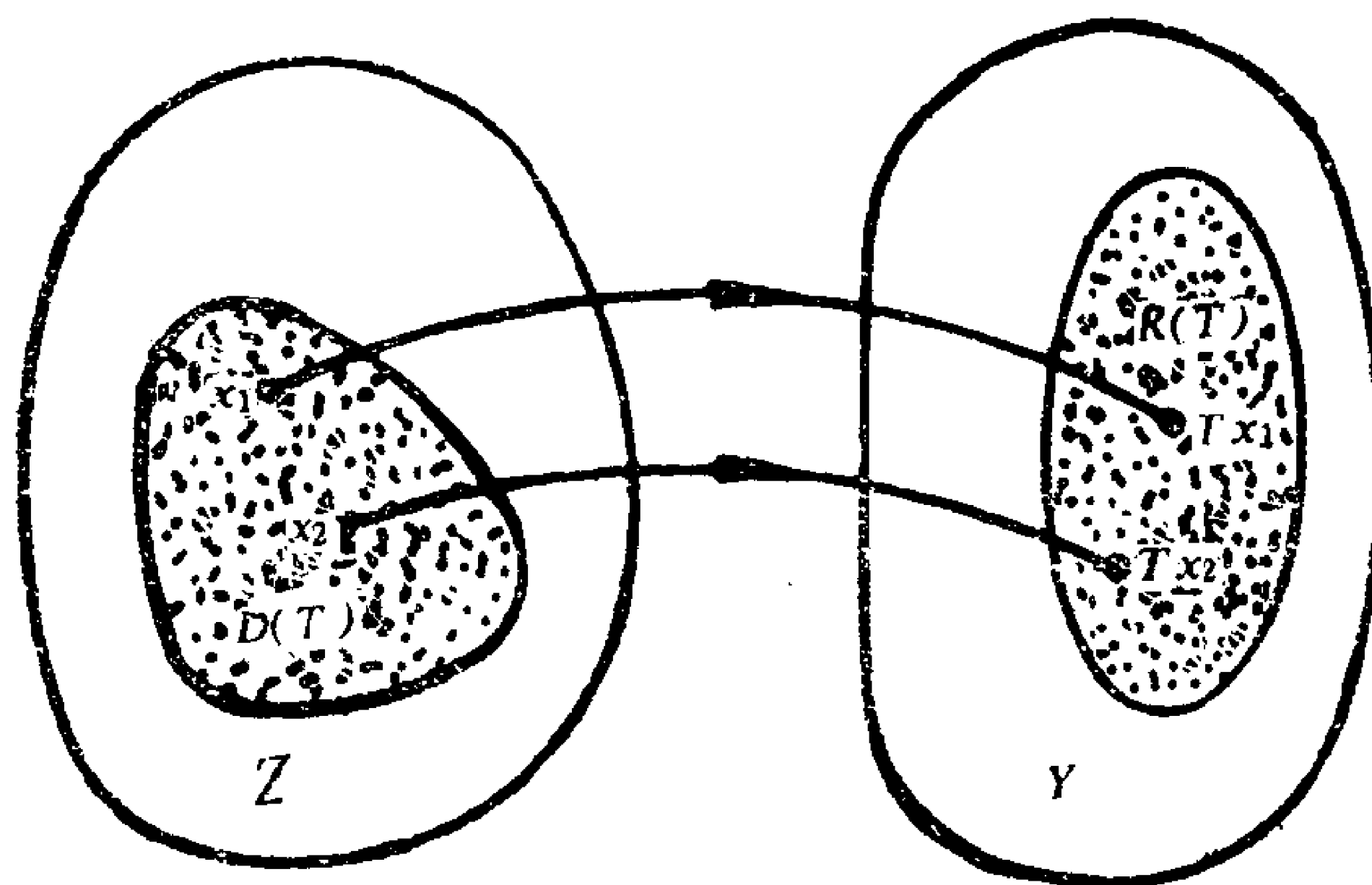
对于某一 $y_0 \in Y$, 使得 $Tx = y_0$ 成立的所有 $x \in D(T)$ 的集称做 y_0 的原象. 类似地, 子集 $Z \subset Y$ 的原象是使 $Tx \in Z$ 的所有 $x \in D(T)$ 的集. $y_0 \in Y$ 的原象可能是空集、单点集、或是 $D(T)$ 的子集, 这与 y_0 及 T 有关.

如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D(T)$

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{蕴涵} \quad Tx_1 \neq Tx_2$$

则称映射 T 是单射, 或称 T 是一对一映射. 也就是说, $D(T)$ 中不同点有不同的象. 因此, $R(T)$ 中任意点的原象是唯一的点 (附图 8)

如果 $R(T) = Y$ 则称



附图 8 单射的图示

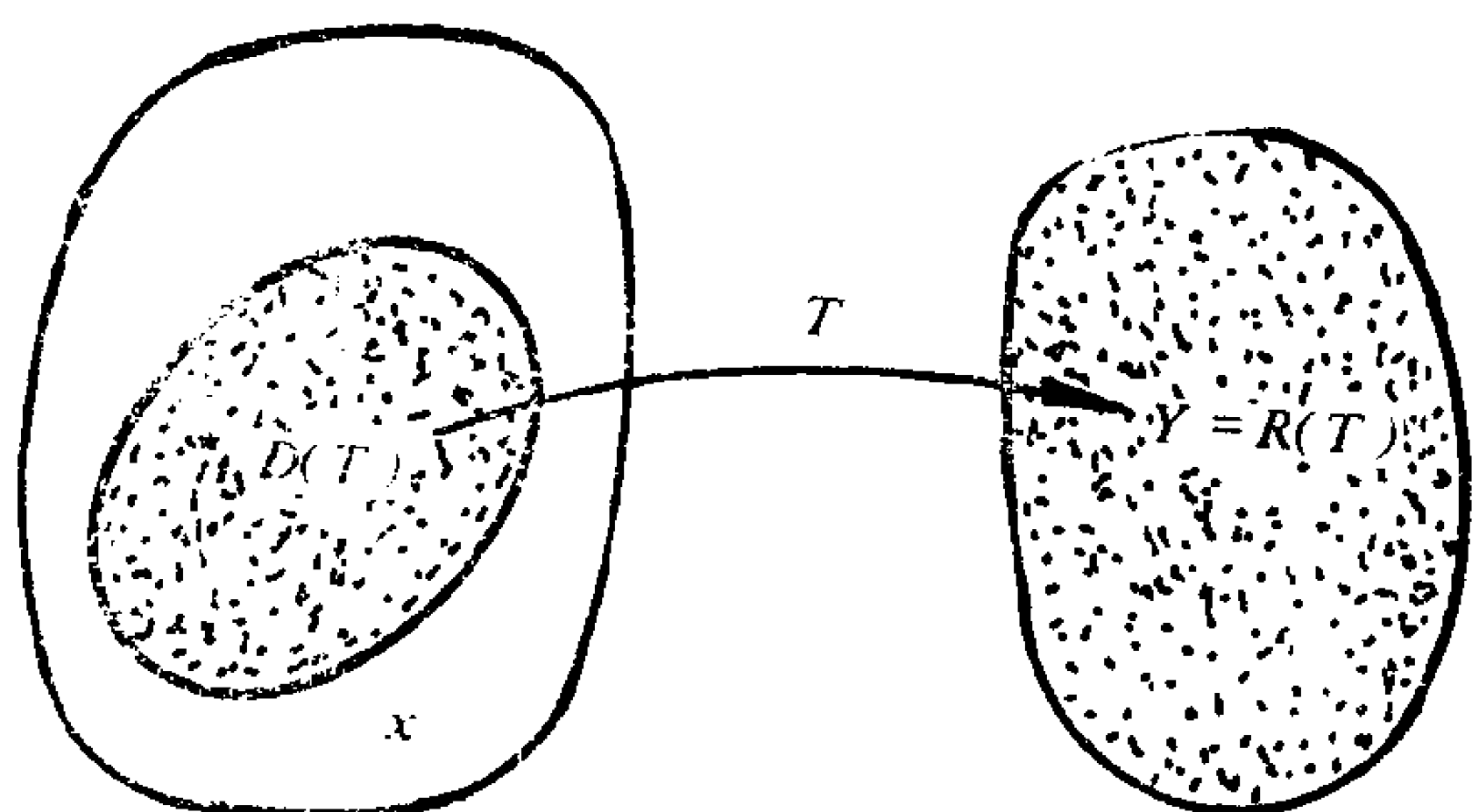
$$T: D(T) \rightarrow Y$$

是满射，或称 T 是 $D(T)$ 到 Y 上的映射。（附图 9）

显然 $D(T) \longrightarrow R(T)$

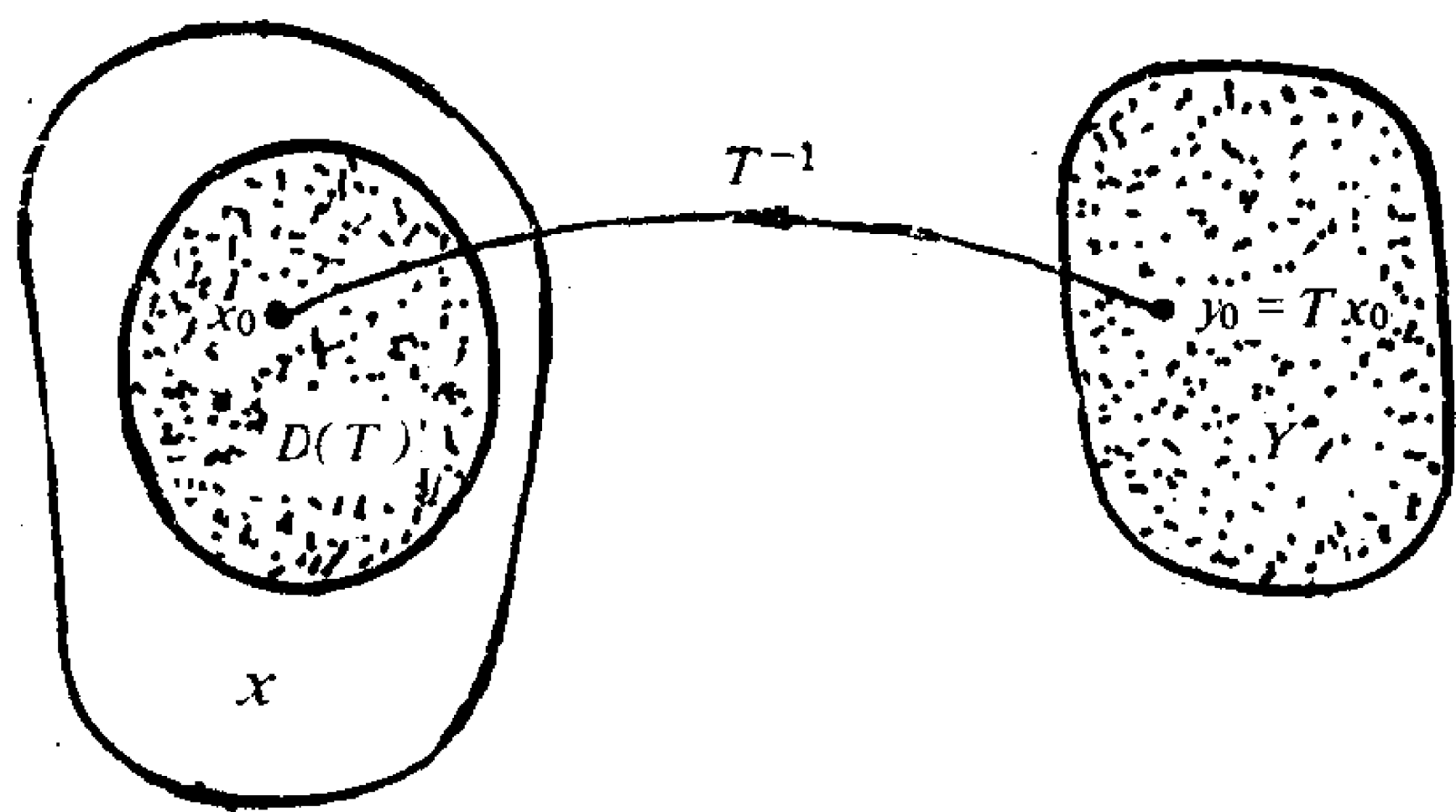
$$x \longmapsto Tx$$

总是满射的



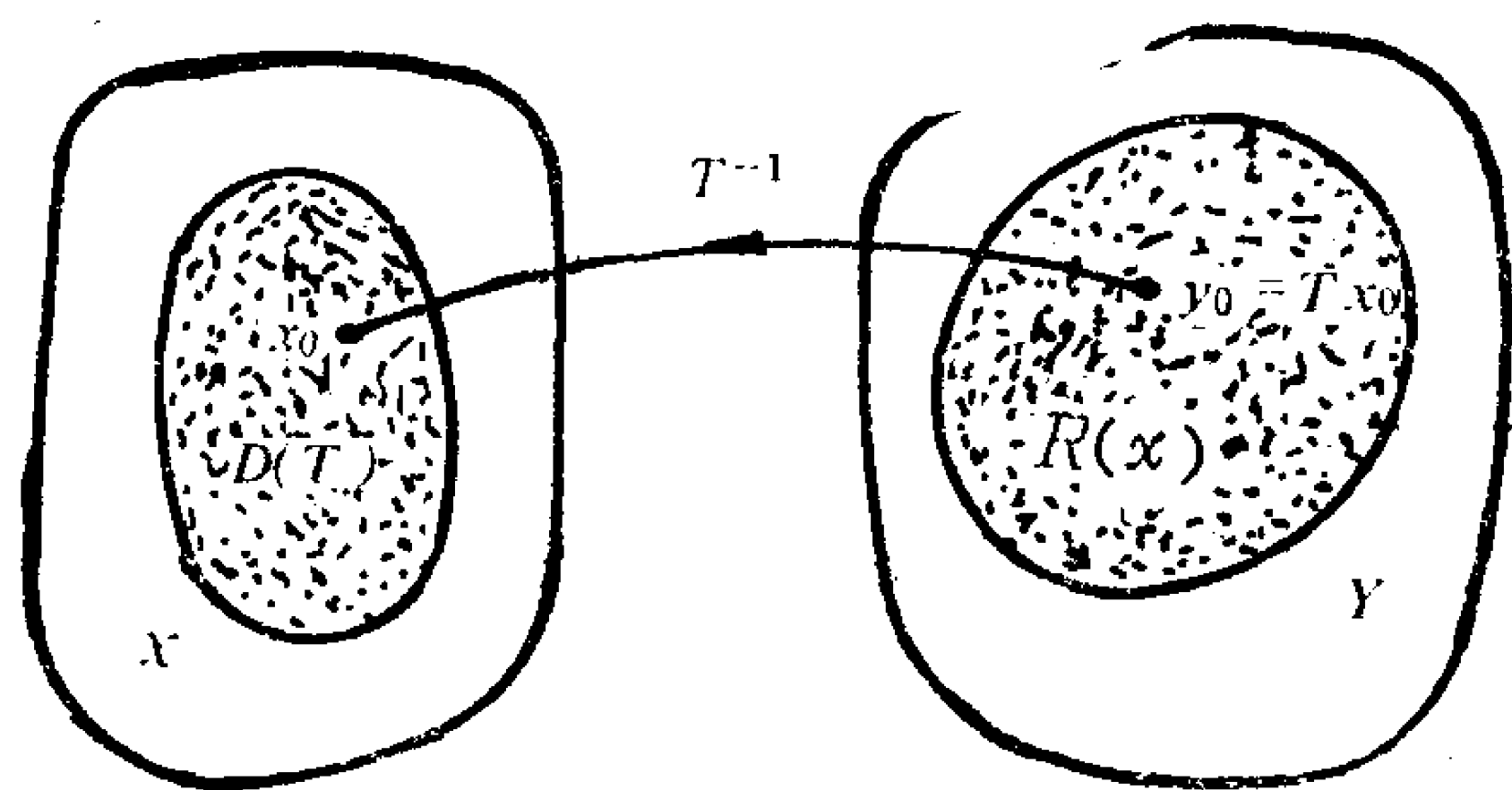
附图 9 满射图示

如果 T 既是单射又是满射, 则称 T 是双射. 此时 $T: D(T) \rightarrow Y$ 的逆映射 T^{-1} 是按 $Tx_0 \mapsto x_0$ 定义的映射 $T^{-1}: Y \rightarrow D(T)$. 即 T^{-1} 使每个 $y_0 \in Y$ 映射成 $x_0 \in D(T)$, 且 x_0 满足 $Tx_0 = y_0$ (附图10)



附图10 双射 T 的逆映射 $T^{-1}: Y \rightarrow D(T) \subset X$

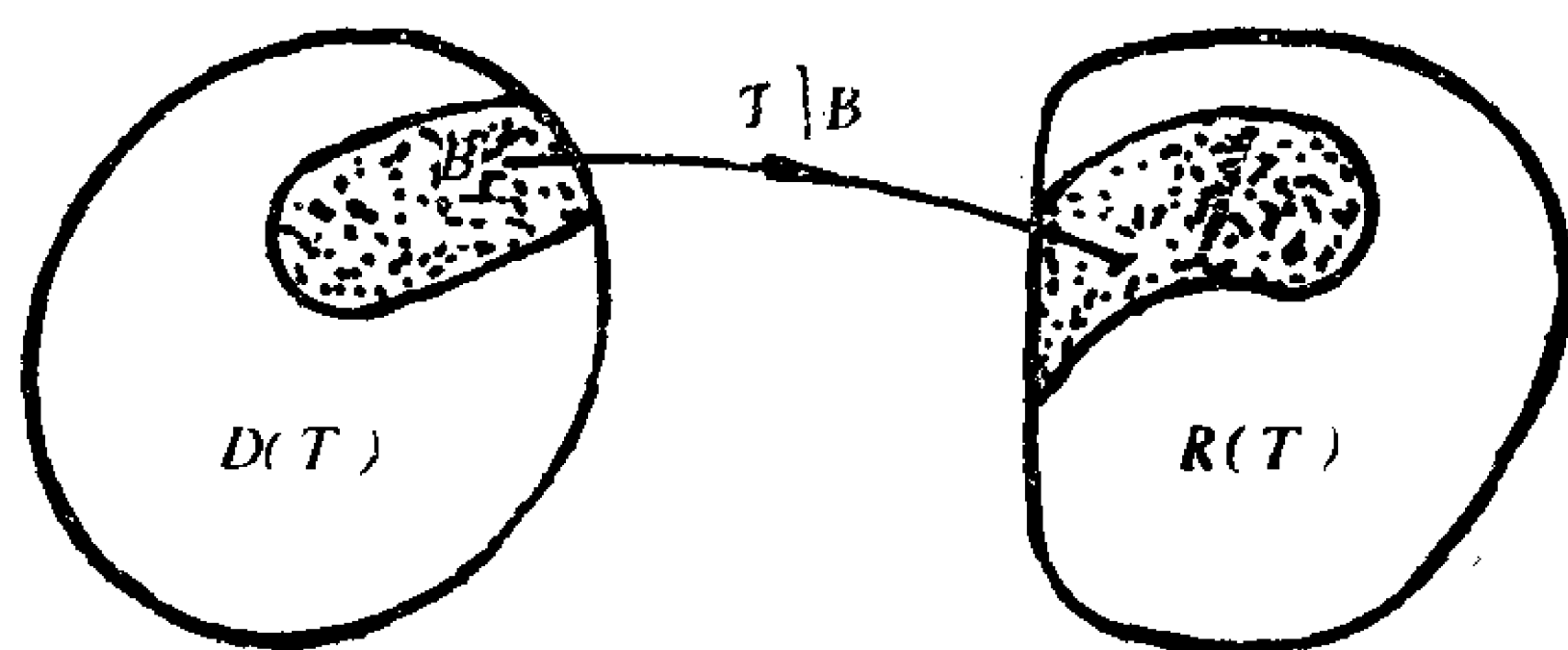
因而对于一单射 $T: D(T) \rightarrow Y$ 的逆映射 $T^{-1}: R(T) \rightarrow D(T)$ 定义为 $y_0 \mapsto x_0$, 这里 $y_0 = Tx_0$ (附图11)



附图11 单射 T 的逆映射 $T^{-1}: R(T) \rightarrow D(T) \subset X$

设 T_1, T_2 为两映射, 若 $D(T_1) = D(T_2)$ 且对于所有的 $x \in D(T_1) = D(T_2)$ 有 $T_1 x = T_2 x$ 则称 T_1 与 T_2 相等.

如果 $T: D(T) \rightarrow Y$, 且 $B \subset D(T)$, 则对于 $x \in B$ 由 $T|_B x = Tx$ 所定义的映射 $T|_B: B \rightarrow Y$ 称为 T 在 B 上的限制 (附图12)



附图12 映射 T 在子集 $B \subset D(T)$ 上的限制 $T|_B$

设 $\tilde{T}: C \rightarrow Y, T: D(T) \rightarrow Y$ 若 $D(T) \subset C$ 且对于每个 $x \in D(T)$ 有

$$\tilde{T}x = Tx$$

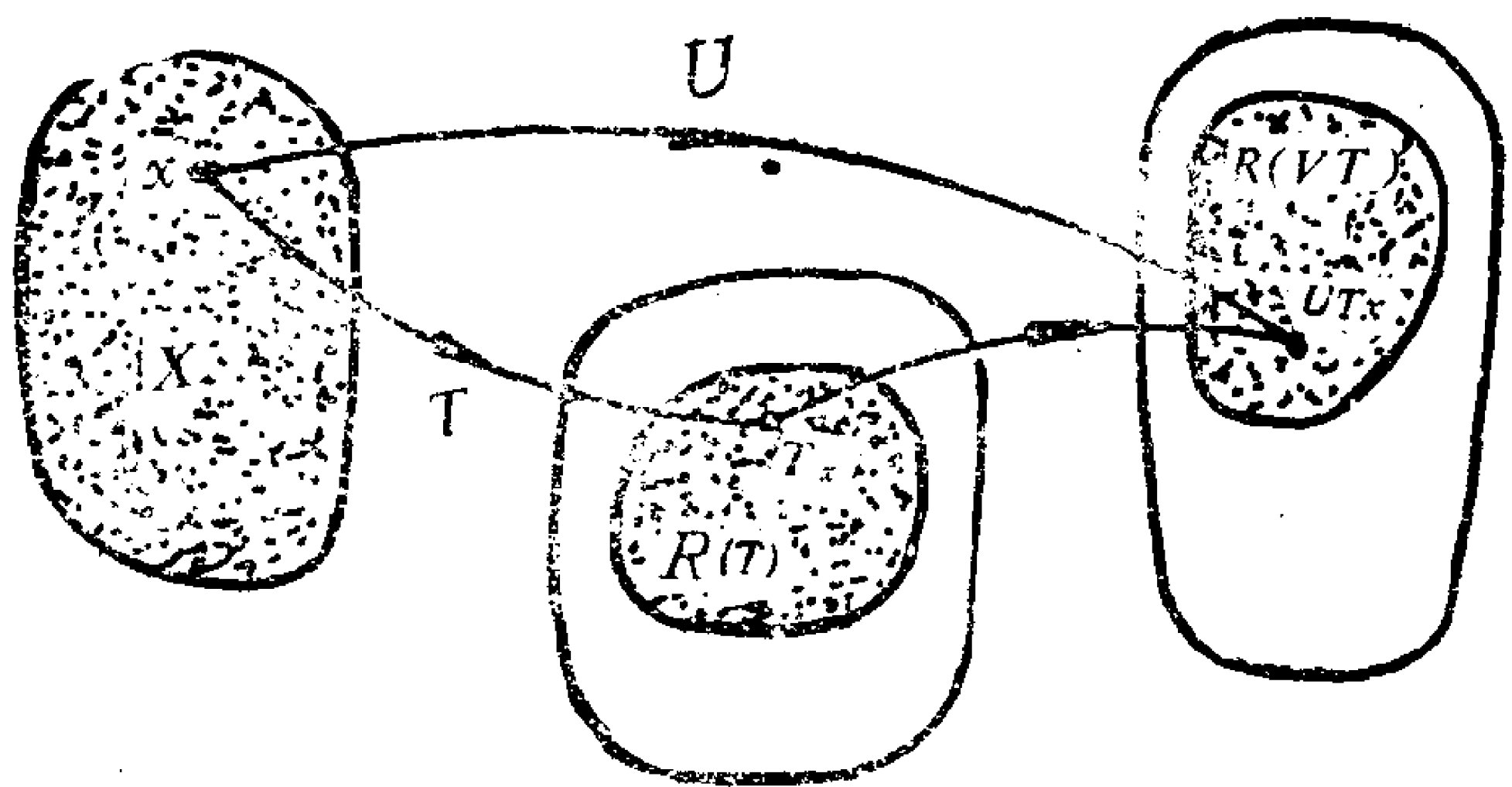
则称 \tilde{T} 是 T 在 C 上的扩张. 又若 $D(T)$ 是 $D(\tilde{T})$ 的真子集, 即 $D(\tilde{T}) - D(T) \neq \emptyset$, 则称 \tilde{T} 是 T 的真扩张.

设 $T: X \rightarrow Y, U: Y \rightarrow Z$. 那么, 由

$$x \mapsto U(Tx) \quad (x \in X)$$

所定义的 X 到 Z 里的映射 $X \rightarrow Z$ 称为 U 与 T 的复合或乘积, 记为 UT 或 $U \circ T$ (附图13)

注意：一般说 UT 与 TU 是两不同的映射，有时 TU 可能没有意义



附图 13 两映射的复合

A1.3 族 (集 族)

若将每个正整数 n 对应一实数或复数,就得到一实或复的序列,这可看作 $N = \{1, 2, \cdots\}$ 到实数或复数里的映射. x_n 是 n 的象. 集 N 称作序列的指标集.

将指标集 N 推广到任意非空集 I (有限的、可数的 或不可数的) 并将 I 映射到任意给定的非空集 X 里, 这样得到 X 的元素族, 记作 $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ 或简记为 (x_α) . 其中 $x_\alpha \in X$ 是 $\alpha \in I$ 的象. 注意: 对于 I 里的某些 $\alpha \neq \beta$ 可能有 $x_\alpha = x_\beta$. 集 I 称为族的指标集.

如果 X 的元素均为一已知集的子集, 则可得一子集族 $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$, 其中 B_α 是 α 的象.

族 (B_α) 的并 $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ 是至少属于某一个 B_α 的元素所组成的集. 交 $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ 为一集, 其元素属于每一 B_α , $\alpha \in I$. 特别在 $I =$

N 时可记作

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} B_{\alpha} \quad \text{及} \quad \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} B_{\alpha}$$

在 $I = \{1, 2\}$ 时记作 $B_1 \cup B_2$ 及 $B_1 \cap B_2$.

对于任意的非空子集 $M \subset X$, 总可以找到 X 的一个元素族, 这些元素的集为 M . 例如: 用 M 到 X 的自然映射, 即 X 上的恒等映射 $x \mapsto x$ 并限制在 M 上得到.

A1.4 等 价 关 系

设 X, Y 为给定的两非空集, 笛卡儿乘积 $X \times Y$ 的任意子集 R 称做一 (二元) 关系. $(x, y) \in R$ 可记作 $R(x, y)$.

如果对集 X 上一关系 $R \subset X \times X$ 满足:

对所有的 $x \in X$ 有 $R(x, x)$ (自反性)

$R(x, y)$ 蕴涵 $R(y, x)$ (对称性) (1)

$R(x, y)$ 与 $R(y, z)$ 蕴涵 $R(x, z)$ (传递性)

则称 R 是 X 上一等价关系. 此时 $R(x, y)$ 通常记作 $x \sim y$ (读做 x 等价于 y), 这样 (1) 式成为:

$$x \sim x$$

$$x \sim y \implies y \sim x$$

$$x \sim y \text{ 且 } y \sim z \implies x \sim z$$

等价于 $x_0 \in X$ 的一切 $y \in X$ 所成之集称作 x_0 的等价类, 任何这样的 y 称为这个类的一个代表. 关于 R 的等价类构成 X 的一个划分.

由定义可知: 非空集 X 的一个划分是 X 的一非空子集族, 且族中各子集两两不相交, 这些子集的并等于 X .

A1.5 紧 性

设 M 是集 X 的子集, $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ 为 X 的一子集族. 如果

$$M \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$$

则称 (B_α) 是 M 的一个复盖.

特别是: 若 (B_α) 为 X 的一复盖, 则

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = X.$$

如果 (B_α) 只是由有限多个集 B_α 组成, 则称其为有限复盖.

如果 $X = (X, J)$ 为一拓扑空间 (例如: 度量空间. 参看 §1.3), 当所有 B_α 均为开集时, 称 (B_α) 为开复盖.

一拓扑空间 $X = (X, J)$ 称作

(a) 紧的, 如果 X 的每个开复盖含有 X 的一个有限复盖.

(b) 可数紧的: 如果 X 的每个可数开复盖含有 X 的一个有限子复盖.

(c) 列紧的: 如果 X 的每个序列有一收敛的子序列.

子集 $M \subset (X, J)$ 分别称作紧的 (可数紧的, 列紧的) 是指将 M 看成一子空间 (M, J_M) , 而这个子空间是紧的 (可数紧的, 列紧的). 这里, M 上的拓扑 J_M 是由所有子集 $M \cap A$ ($A \in J$) 组成的.

对于度量空间, 这三种紧性概念是等价的.

A1.6 上确界与下确界

设 E 是实直线 R 的子集, 若 E 有一上界 (即存在 $b \in R$, 对所有 $x \in E$ 有 $x \leq b$) 则称 E 是上有界的. R 中每一上有界的非空子集 E 存在上确界 (或最小上界). 记作

$$\sup E$$

即: $\sup E$ 为 E 的一个上界, 且对于 E 的每个上界 b 均有 $\sup E \leq b$.

对于任意非空子集 $C \subset E$ 有

$$\sup C \leq \sup E$$

类似地, 如果 E 有一下界 (即存在 $a \in R$, 对有所 $x \in E$ 有 $x \geq a$) 则称 E 是下有界的, R 中每一下有界的非空子集 E 存在下确界 (或最大下界). 记作

$$\inf E$$

即: $\inf E$ 为 E 的一个下界, 且对于 E 的每个下界 a 均有 $\inf E \geq a$, 且对任意非空子集 $C \subset E$ 有

$$\inf C \geq \inf E$$

如果 E 既上有界又下有界则 E 是有界的. 当 $E \neq \emptyset$ 时.

$$\inf E \leq \sup E$$

如果映射 $T: D(T) \rightarrow R$ 的值域 $R(T)$ (假定非空) 是上有界的, 其上确界表示为:

$$\sup_{x \in D(T)} Tx$$

如果 $R(T)$ 是下有界的, 其下确界表示为:

$$\inf_{x \in D(T)} Tx$$

41.7 柯西 (Cauchy) 收敛准则

设 (x_n) 为一数列 (实的或复的), a 是一数, 若对于每个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在无穷多个 n , 使得

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则 a 称做 (x_n) 的极限点.

Balzano - Weierstrass 定理指出: 任何有界数列至少存在一个极限点. (这里的数列, 必须无穷多项)

数列 (x_n) 如果存在一数 x , 对于每个给定的 $\varepsilon > 0$, 除去有限个 n 外, 均有

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

则称 (x_n) 为收敛的, x 为数列 (x_n) 的极限.

收敛数列的极限是唯一的, 且此极限是该数列的唯一极限点.

柯西(Cauchy)收敛定理. 数列 (x_n) 为收敛的当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 N , 当 $m, n > N$ 时有:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad (1)$$

证明: (a) 若 (x_n) 收敛, 且 c 是其极限, 则对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

利用三角不等式, 对于 $m, n > N$ 得

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - c| + |c - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) 反之, 假定(1)成立, 给定 $\varepsilon > 0$, 选定满足(1)的 $n = k > N$, 当 $m > N$ 时每个 x_m 都落在以 x_k 为中心、 ε 为半径的邻域 D 内, 因为除去有限多个 $x_n \notin D$ 外, (x_n) 中其余各数均在 D 内, 所以数列 (x_n) 有界. 根据Bolzano-Weierstrass定理 (x_n) 有一极限点 a . 又由(1)成立, 对于每个 $\varepsilon > 0$ 存在

一 N^* 当 $m, n > N^*$ 时有 $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 今选一固定的 $n > N^*$,

使得 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 当 $m > N^*$ 时由三角不等式得

$$|x_m - a| \leq |x_m - x_n| + |x_n - a| < \epsilon$$

这就证明 (x_n) 收敛且极限为 a .

A1.8 群

$G = (G, \cdot)$ 称做群, 是指元素为 $x, y \dots$ 的集 G , 与映射

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow z \in G \quad (\text{通常} z \text{写成} x \text{与} y \text{的乘积形式} xy)$$

且满足下列诸公理:

(G1): 结合律: 对于所有的 $x, y, z \in G$

$$(xy)z = x(yz)$$

(G2): 存在单位元 e , 即存在一元素 e , 使得对所有 $x \in G$, 有

$$xe = ex = x$$

(G3): x 的逆元存在, 对于每个 $x \in G$, 在 G 中存在一逆元 x^{-1} , 使得

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e$$

e 是唯一的. 对于每个 $x \in G$, 逆元 x^{-1} 也是唯一的.

如果 G 还满足

(G4) 交换性: 对于所有 $x, y \in G$

$$xy = yx$$

则称 G 是可换群或阿贝尔(Abelian)群.

附录 II 习题答案

习题 1.1

2. 不是度量, 三角不等式不成立 (例如, 取 $x=1, z=0, y=-1$ 时 (M_4) , 不成立.)

3. (M_1) 至 (M_3) 显然成立. 由

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \leq (|x-z|^{\frac{1}{2}} + |z-y|^{\frac{1}{2}})^2,$$

得到 (M_4) .

4. 含两个点之集 $\{x, y\}$ 上, 其度量 d 为, $d(x, x) = 0$, $d(y, y) = 0$. $d(x, y) = k > 0$; 含一个点之集 $\{x\}$ 上, 其度量 d 为, $d(x, x) = 0$.

5. (1) $k > 0$; (2) $k = 0$.

6. 是离散度量 (参见例 5)

7. (M_1) 与 (M_3) 显然成立. 因为 x, y 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\tilde{d}(x, y) = 0$ 当且仅当对于所有 $t \in [a, b]$, 有 $|x(t) - y(t)| = 0$, 即 (M_2) 成立. (M_4) 由

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) &= \int_a^b |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |x(t) - z(t)| dt + \int_a^b |z(t) - y(t)| dt \end{aligned}$$

直接得证.

8. $(M1)$ 至 $(M3)$ 显然成立. 下面证明 $(M4)$, 当 x, y, z 不全相等时, 有 $d(x, y) \leq 1$,

$d(x, z) + d(z, y) \geq 1$, 当 $x = y = z$ 时, $(M4)$ 中等号成立.

9. X 中元素的个数为 $2^3 = 8$. d 可能取的值是0、1、2、3、易验证 $(M1)$ 至 $(M4)$ 成立.

10. 略.

11. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y)$, 且.

$d(w, y) = d(y, w)$. 因此, $d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w)$ 再将 x 与 z 交换, y 与 w 交换得.

$$d(z, w) - d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, w)$$

两边同乘以 -1 , $-d(x, z) - d(y, w) \leq d(x, y) - d(z, w)$ 从而结论得证.

12. 因为 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 蕴涵

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$$

以及 $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$ 蕴涵

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z)$$

13. 令 $z = y$, 则, $d(x, y) \leq d(y, x) + 0$

再将 x 与 y 交换

14. 在 $(M4)$ 中, 令 $y = x$.

习 题 1.2

1. 证明的思路和方法与1.2-5中的一样.

2. 取 $p = q = 2$, $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$.

3. 取
$$\eta_j = \begin{cases} 1 & 1 \leq j \leq n \\ 0 & j > n \end{cases}$$

$$4. \quad x = (\xi_n), \xi_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{1}{\ln n}, & n=2, 3, \dots \end{cases}$$

对于任意固定的 $p \geq 1$, 从某个 n 以后.

$(\ln n)^{-p} > \frac{1}{n}$, 且调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

5. $x = (\frac{1}{n}) \notin l^1$, 但 $(\frac{1}{n}) \in l^p (p > 1)$, 这是因为当 $p > 1$

时, 级数 $\sum n^{-p} < \infty$.

$$6. \quad \sup_{x, y \in A} d(x, y) \leq \sup_{x, y \in B} d(x, y)$$

7. 由于 $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) = 0$ 蕴涵 $d(x, y) = 0$ 从而, x

$\equiv y$. 反之是显然的.

8. $D(A, B) = 0$ 不蕴涵 $A = B$. 三角不等式不成立, 例如, 取 A, B , 使 $D(A, B) > 0$, 并令 $C = A \cup B$.

9. 逆命题不成立.

10. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 蕴涵

$$\begin{aligned} D(x, B) &= \inf_{z \in B} d(x, z) \leq \inf_{z \in B} (d(x, y) + d(y, z)) \\ &= d(x, y) + \inf_{z \in B} d(y, z) \\ &= d(x, y) + D(y, B) \end{aligned}$$

因此, $D(x, B) - D(y, B) \leq d(x, y)$

交换 x 与 y , 并两边同乘以 -1 , 于是,

$$-d(x, y) \leq D(x, B) - D(y, B)$$

11. 易验证 $(M1)$ 至 $(M3)$ 成立. 由于 d 满足 $(M4)$ 并利

用1.2-5证明中的方法得

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}$$

即 \tilde{d} 满足(M4), 从 $\tilde{d}(x, y) < 1$ 得出 X 的有界性.

12. 若 $x, y \in A$ 或 $x, y \in B$. 则分别有 $d(x, y) \leq \delta(A)$ 或 $d(x, y) \leq \delta(B)$. 若 $x \in A, y \in B$. 对于固定的 $a \in A, b \in B$, 有.

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ &\leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B) \end{aligned}$$

因此, $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B)$

13. 略.

14. 对于 d_1, d_2 利用 $p = 2$ 情况下的 Minkowski 不等式得.

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) &= \left[\sum_{i=1}^2 d_i(x_i, y_i)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^2 [d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)]^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^2 d_i(x_i, z_i)^2 \right]^{1/2} \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^2 d_i(z_i, y_i)^2 \right]^{1/2} \\ &= \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y) \end{aligned}$$

15. 因为 $\tilde{d}(x, y) = 0$ 当且仅当 $d_1(x_1, y_1) = 0$ 与 $d_2(x_2, y_2) = 0$, 而 $d_1(x_1, y_1) = d_2(x_2, y_2) = 0$ 蕴涵 $x = y$. 由于

$$\max_{k=1,2} d_k(x_k, y_k) \leq \max_{k=1,2} [d_k(x_k, z_k) + d_k(z_k, y_k)]$$

$$\leq \max_{i=1,2} d_i(x_i, z_i) + \max_{i=1,2} d_i(z_i, y_i)$$

可证得(M4).

习 题 1.3

1. (a) 设任意 $x \in B(x_0, r)$. 则 $d(x, x_0) = a < r$ 于是,
 $B\left(x, \frac{r-a}{2}\right) \subset B(x_0, r)$.

(b) 因为任意 $y \notin \tilde{B}(x_0, r)$, 则 $d(y, x_0) = a > r$, 所以,
 $B\left(y, \frac{a-r}{2}\right) \subset \tilde{B}(x_0, r)^c$. 即证明了 $\tilde{B}(x_0, r)^c$ 是开的.

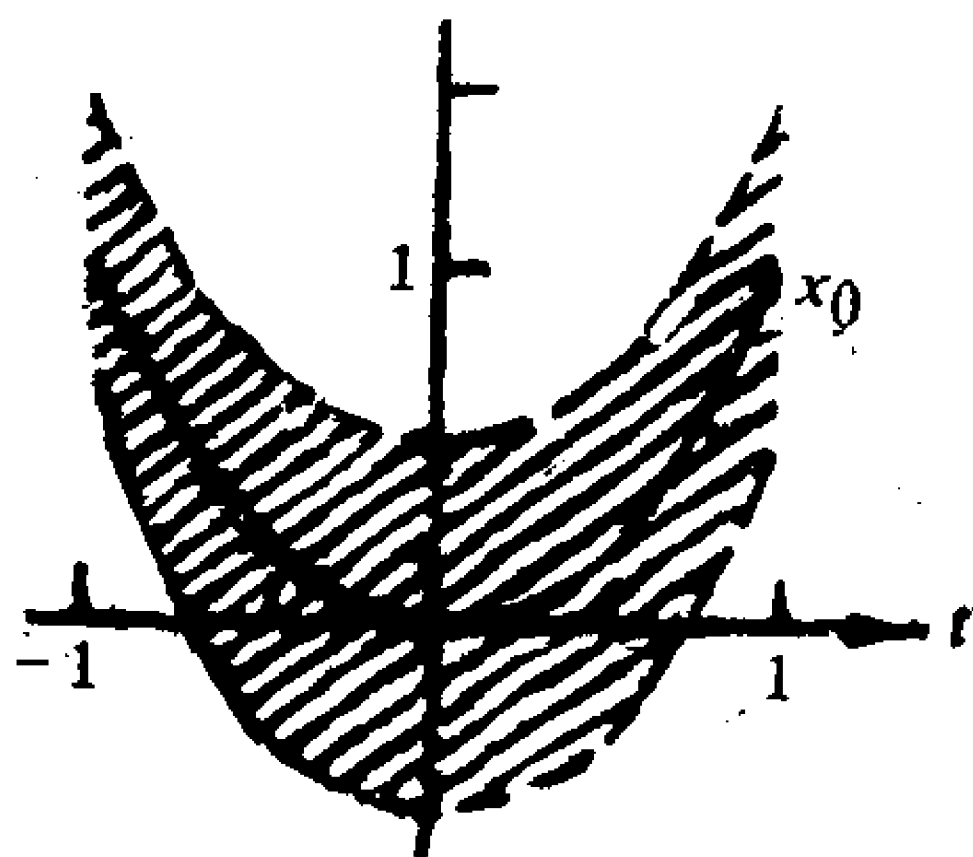
从而证得 $\tilde{B}(x_0, r)$ 是闭的.

2. R 上的开球 $B(x_0, 1)$ 是开区间 $(x_0 - 1, x_0 + 1)$, C 上的开球 $B(x_0, 1) = \{z \mid d(x_0, z) < 1, z \in C\}$. $C[-1, 1]$ 上的开球

$B\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$, $x_0 = t^2$, 是界于

曲线 $x_1 = t^2 - \frac{1}{2}$ 和 $x_2 = t^2 + \frac{1}{2}$

之间的 $[-1, 1]$ 上的连续函数全体所构成的开区域.



3. $r = \sqrt{2}$.

附图14 $C[-1, 1]$ 上开球 $B(x_0, 1)$

4. 若 A 是开球 B_a 的并 $A = \bigcup_{a \in I} B_a$, 则每个 $a \in A$, 存在开

球 B_a , 使得 $a \in B_a = \{z \mid d(x_a, z) < r_a\}$. 于是 $d(x_a, a) = \varepsilon < r_a$, 取 $\eta = \frac{1}{2}(r_a - \varepsilon)$, $B(a; \eta) \subset B_a \subset A$. 因此, A 是开集. 反

过来, 若 A 是开集, 则对于每个 $a \in A$, 存在开球 $B(a; r) \subset A$, 从而, A 可表示成这些开球之并, 即 $A = \bigcup_{a \in A} B(a; r)$.

5. 设 A 是 X 的任意子集, 对于任意 $a \in A$, 开球 $B\left(a; \frac{1}{2}\right) = \{a\} \subset A$. 因此证得 A 是开集. 同理可证 A^c 是开集. 即证得 A 是闭集.

6. 若存在 x_0 的一个邻域只含 A 的有限个点 y_1, \dots, y_n , 令 $r = \min\{d(x_0, y_1), \dots, d(x_0, y_n)\}$ 则 $B(x_0; r/2)$ 不含 A 中点 $y \neq x_0$.

7. (a) 整数全体; (b) R ; (c) C ; (d) $\{z \mid |z| \leq 1\} \subset C$.

8. 在多于一个点的离散度量空间 X 中, $\{x_0\} = B(x_0; 1) = \overline{B(x_0; 1)} \neq \tilde{B}(x_0; 1) = X$.

9. 略

10. 若 $x \in \overline{A}$, 则 $x \in A$, 或 x 的每个邻域含 A 的点 $a \neq x$. 因此 $D(x, A) = 0$; 若, $D(x, A) = 0$, 则 $x \in A$ 或 x 的每个邻域必含 A 的点 $a \neq x$. 即 $x \in \overline{A}$.

11. (a) $\{-1, 1\}$; (b) R ; (c) 圆 $\{z \mid |z| = 1\} \subset C$.

12. 在 $c \in [a, b]$ 值为 1, 在 $[a, b] - \{c\}$ 上值为 0 的函数全体是不可数的, 且它们中任何两个函数的距离均为 1, 因此, $B[a, b]$ 不可能有稠密的可数子集.

13. 设 X 是可分的, 则 X 有一可数稠密子集 Y . 令 $x \in X$,

且 $\varepsilon > 0$. 因 $\overline{Y} = X$, 那么, $x \in \overline{Y}$, 因此, x 的 ε -邻域 $B(x, \varepsilon)$ 含一个 $y \in Y$, 且 $d(x, y) < \varepsilon$. 反之, 若 X 有一可数子集 Y 具有习题中的性质. 则每个 $x \in X$, 或是 Y 的点, 或是 y 的聚点. 因此, $\overline{Y} = X$.

14. 设 T 是连续的, 且 A 是任意闭子集 M 的原象, 则 M^c 有原象 A^c , 由定理1.3-6知, A^c 是开的. 于是证得 A 是闭的. 反之, 若 M 有闭的原象 A , M^c 及 A^c 均是开的. 根据定理1.3-6, 则 T 是连续的.

15. 由 $x(t) = \sin t$ 定义的连续映射 $R \rightarrow R$, 将开集 $(0, 2\pi)$ 映射到闭集 $[-1, 1]$ 上.

习 题 1.4

1. 因为 $d(x_n, x) < \varepsilon (n > N)$ 蕴涵 $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon (n_k > N)$

3. 若 (x_n) 是Cauchy序列, 存在 n_0 , 对于所有 $n > n_0$, 有 $d(x_n, x_{n_0}) < 1$, 因此, 对于所有 n ,

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq \max\{1, d(x_1, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$$

6. 利用 $\tilde{d}(x, y) \leq \tilde{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq 2\tilde{d}(x, y)$.

可证得所要证的结论.

7. 如果 (z_n) 是 C 中的任意Cauchy序列, 其中 $z_n = x_n + iy_n$, 则 (x_n) 和 (y_n) 是 R 中的Cauchy序列, 这是由于,

$$|x_m - x_n| \leq |z_m - z_n|, \quad |y_m - y_n| \leq |z_m - z_n|$$

因此, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. 令 $z = x + iy$, 那么, 因为

$$|z_n - z| = |x_n - x + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \rightarrow 0$$

所以 $z_n \rightarrow z$.

习 题 1.5

1. 利用定理1.4-8证明之.

2. 设 (x_m) 是 X 中任意Cauchy序列, $x_m = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$. 则对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在一 N , 当 $m, r > N$ 时,

$$d(x_m; x_r) = \max_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon \quad \text{于是, } |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}|$$

$< \varepsilon (j = 1, 2, \dots, n)$ 对于任意固定的 j , 序列 $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ 是 R 中的Cauchy序列, 知其收敛, 令 $\xi_j^{(m)} \rightarrow \xi_j$ 定义 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, 那么, $x \in X$, 在 $|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon$ 中, 令 $r \rightarrow \infty$, 得

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leq \varepsilon, \text{ 因此, } x_m \rightarrow x.$$

即证得 X 是完备的.

3. 令 $x_n = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$. 则 $(x_n) \in M$.

因为 $d(x_m, x_n) = \frac{1}{m+1} (m < n)$, 所以, (x_n) 是 M 中的Cauchy序列. 但 $x_n \rightarrow x = (1/n) \in l^\infty$, $x \notin M$.

4. $x = (1/n) \in \overline{M}$, 但 $x \notin M$.

5. X 在 R 中是闭的, 利用定理1.4-8结论得证. 或用定义证明, 证 X 中的Cauchy序列 (x_n) 从某项起都相等.

6. 设 $x_n = n$, (x_n) 没有极限. 对于任意正整数 m , 及 $n > m > \operatorname{ctg} \varepsilon$, 有

$$d(m, n) = \arctan n - \arctan m$$

$$= \arctan \frac{n-m}{1+mn}$$

$$< \arctan \frac{1}{m} < \varepsilon$$

所以 (x_n) 是Cauchy序列.

7. $x_n = n$, (x_n) 是一不收敛的Cauchy序列.

8. 对于任意 $x \in \overline{Y}$, 根据定理1.4-7(a), Y 中存在序列 (x_n) , 使得 $x_n \rightarrow x$. 因此, $x_n(a) \rightarrow x(a)$, $x_n(b) \rightarrow x(b)$, 于是,

$$0 = x_n(a) - x_n(b) \rightarrow x(a) - x(b)$$

$x \in Y$, 由定理1.4-8知, Y 是完备的.

9. 我们证 x 在任意 $t_0 \in [a, b]$ 连续. 因为一致收敛, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon)$, 使得对于所有 $t \in [a, b]$, 有

$$|x(t) - x_N(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

由于 x_N 在 t_0 连续, 存在 $\delta > 0$, 当

$$|t - t_0| < \delta \text{ 时,}$$

$$|x_N(t) - x_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 对于满足 $|t - t_0| < \delta$ 的所有 $t \in [a, b]$ 由三角不等式, 有,

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &\leq |x(t) - x_N(t)| + |x_N(t) - x_N(t_0)| \\ &\quad + |x_N(t_0) - x(t_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

10. 在这个空间中, Cauchy序列从某项起必保持不变并收敛于那个项.

11. 令 $x_n \rightarrow x$. 取任意固定的 j , 则, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} \leq d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2^j(1 + \varepsilon)}$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|\xi_j^{(n)} - \xi_j| < \varepsilon$.

下面证充分性. 对于每个 $\varepsilon > 0$, 由于 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$. 存在 m , 使,

$\sum_{j=m+1}^{\infty} 1/2^j < \frac{\varepsilon}{2}$, 由题设, 对于每个 j , $\xi_j^{(n)} \rightarrow \xi_j$. 因此, 满足

$1 \leq j \leq m$ 的每个 j , 存在 N_j , 当 $n > N_j$ 时, $|\xi_j^{(n)} - \xi_j| < \frac{\varepsilon}{2}$,

从而,

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} < \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j} \frac{\varepsilon/2}{1 + \varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

令, $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} \\ &\quad + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

12. 设 (x_n) 是 S 中任意 Cauchy 序列, 这里, $x_n = (\xi_j^{(n)})$. 则对于任意固定的 j 及 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$\frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|}{1 + |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|} \leq d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2^j(1 + \varepsilon)}$$

因此, $|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon$ ($m, n > N$ 时)

对于定固的 j , $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ 是Cauchy序列, 知其收敛, 令 $\xi_j^{(n)} \rightarrow \xi_j$, 由习题11知, $x_n \rightarrow x = (\xi_j)$.

13. 由直接计算得 $d(x_n, x_m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$ ($m < n$)

14. 取任意 $x \in X$, 令 $c = \max\{1, \max_{t \in J} |x(t)|\}$, 这里 $J = [0, 1]$ 对于 $n \geq 2c$.

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt \geq \int_0^{\frac{1}{c^2}} |x_n(t) - x(t)| dt \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{c^2}} [x_n(t) - c] dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{c^2}} (n - c) dt + \int_{\frac{1}{c^2}}^{\frac{1}{n^2}} (t^{-1/2} - c) dt \\ &= \frac{1}{c} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2c} \end{aligned}$$

15. 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > m > N$ 时,

$$d(x_n, x_m) = \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{j^2} < \varepsilon.$$

即 (x_n) 是Cauchy序列.

但对于任意 $x = (\xi_j) \in X$, 存在 \tilde{N} , 当 $n > \tilde{N}$ 时, $\xi_j = 0$,

因此, 对于 $n > \tilde{N}$,

$$d(x_n, x) = |1 - \xi_1| + \left| \frac{1}{2^2} - \xi_2 \right| + \dots + \frac{1}{(\tilde{N} + 1)^2}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(\tilde{N} + 1)^2}$$

~

因为 N 是固定的, 则 $d(x_n, x) \rightarrow 0$ 是不可能的.

习 题 1.6

1. 可以证明 Y 没有聚点, 则 $\overline{Y} = Y$. 即 Y 是闭子空间, 由定理1.4-8知, Y 完备.
2. (X, d) 的完备化空间是 R .
3. 离散度量空间 X 的完备化空间就是其自身 X .
4. 在等距意义下, X_1 和 X_2 中的Cauchy序列是相互对应的.

5. (b) 在同胚 $x \mapsto \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$ 作用下, R 与 $(-1, 1)$ 是同胚的.

6. 令 $x \in C[0, 1]$, 用 $x(t)$ 设 $y(\tau) = x\left(\frac{\tau-a}{b-a}\right)$

可以证明按 $x \mapsto y$ 定义的映射 $T: C[0, 1] \rightarrow C[a, b]$ 是等距的双射.

7. 若 $\tilde{d}(x_m, x_n) < \varepsilon < \frac{1}{2}$, 则,

$$d(x_m, x_n) = \frac{\tilde{d}(x_m, x_n)}{1 - \tilde{d}(x_m, x_n)} < 2\tilde{d}(x_m, x_n)$$

因此, 如果 (x_n) 是 (X, \tilde{d}) 中的Cauchy序列. 那么, 它也

是 (X, d) 中Cauchy序列, 且 (x_n) 在 (X, d) 中的极限就是在 (X, \tilde{d}) 中的极限.

8. 因为 $\tilde{d}(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_n)$, 所以, (X, d) 中的Cauchy序列也是 (X, \tilde{d}) 中的Cauchy序列. 知其在

(X, \tilde{d}) 中收敛, 由于, 当 $\tilde{d}(x, y) < \frac{1}{2}$ 时,

$$d(x, y) = \frac{\tilde{d}(x, y)}{1 - \tilde{d}(x, y)} < 2\tilde{d}(x, y)$$

所以在 (X, \tilde{d}) 中的极限就是在 (X, d) 中的极限.

$$9. d(x_n', l) \leq d(x_n', x_n) + d(x_n, l) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

$$10. d(x_n', x_n) \leq d(x_n', l) + d(l, x_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

11. 自反性及对称性是显然的. 若 $x_n \sim y_n, y_n \sim z_n$, 则由

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

得出传递性.

12. 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$d(x_m', x_m) < \varepsilon/3, d(x_m, x_n) < \varepsilon/3, d(x_n, x_n') < \varepsilon/3$$

因此, 对于所有 $m, n > N$. 由三角不等式得,

$$d(x_m', x_n') < \varepsilon.$$

14. (1) d 是度量; (2) d 是伪度量.

15. 是宽度为2的开“直交带”.

习 题 2.1

1. 按通常的加法和数乘运算是封闭的, 并满足向量空

间诸公理，因此， R 是实向量空间， C 是复向量空间。

2. 由于， $0x + x = (0 + 1)x = x = \theta + x$

两边同时加上 $-x$ 就得 (1a)。

又， $\alpha\theta + \alpha x = \alpha(\theta + x) = \alpha x = \theta + \alpha x$ 。

两边同时加上 $-\alpha x$ ，于是 (1b) 得证。

$$x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = \theta$$

从而， $(-1)x = -x$ 。

3. 平面 $\xi_1 = \xi_2$ 。

4. (a) 及当 $k=0$ 时的 (d) 均可构成 R^3 的子空间。

5. 设 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$ 。 $x_i = t^i$ ， t 在 $[a, b]$ 中任取 n 个不相同的值 t_1, \cdots, t_n 。代入上式，得到一个齐次线性方程组，其系数行列式 D 的转置 D' 是 Vandermonde 行列式，因 $t_1 \cdots t_n$ 互不相同，从而， $D = D' \neq 0$ 。方程组只有零解 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ 。

6. 由于 $\dim X = n$ ， $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 X 的基，因此， $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 线性无关。 $\{e_1, \cdots, e_n, x\}$ 线性相关。即存在 $n+1$ 个不全为零的数 k_1, \cdots, k_{n+1} ，使得， $k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n + k_{n+1} x = \theta$ 。由于 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 线性无关，所以 $k_{n+1} \neq 0$ ，从而 x 可以表示成 e_1, \cdots, e_n 的一个线性组合。若 $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i =$

$\sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ ，则， $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) e_i = \theta$ ，因为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 线性无关，所以， $\alpha_i = \beta_i$ ， $i = 1, 2, \cdots, n$ 。即表示式的唯一性得证。

7. 使 X 成为实向量空间的一组基为 $\{e_1, \cdots, e_n, ie, \cdots, ie_n\}$ 。 X 为复向量空间时，其维数为 n ，当 X 变成实向

量空间时, 其维数为 $2n$.

8. 不一定. 例如, 任何 $x \neq 0$, 集 $\{x, ix\}$ 是复向量空间 X 的线性相关集, 是实向量空间 X 的线性无关集.

9. $\{1, t, t^2, \dots, t^n\} t \in [a, b]$ 是 \tilde{X} 的一个基, 也是 $P[a, b]$ 的基, $P[a, b]$ 不是 \tilde{X} 的子空间, 由于数域不同.

10. $x_1, x_2 \in Y \cap Z \Rightarrow x_1, x_2 \in Y, x_1, x_2 \in Z, \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in Y; \alpha x_1 + \beta x_2 \in Z \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in Y \cap Z. Y \cup Z$ 不一定是 X 的子空间.

11. 因为 $\text{span} M$ 关于加法和数乘两个代数运算封闭.

12. X 的零向量是零矩阵; $\dim X = 4$;

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 X 的一个基.

所有对称矩阵能构成一子空间; 所有降秩矩阵不能形成一子空间.

13. 因为关于两个代数运算封闭.

14. 显然, 所有不同陪集的并等于 X . 任何两个不同的陪集都不相交. 事实上, $v \in (x + Y) \cap (w + Y) \Rightarrow v = x + y_1 = w + y_2, y_1, y_2 \in Y$, 对于任意 $y \in Y, x + y = (x + y_1) + (y - y_1) = (w + y_2) + (y - y_1) = w + (y - y_1 + y_2) \in w + Y$. 即 $x + Y \subset w + Y$, 同理, 有 $w + Y \subset x + Y$. 因此, $x + Y = w + Y$. 故相交的陪集一定相同, 从而证得所有不同的陪集构成 X 一个划分.

两个代数运算有确定的意义, 即与陪集中代表的选择无关. 事实上, 用 $w + w_0 \in w + Y$ 代替 w , 存在 $y \in Y$, 使 $w + w_0 = w$

+ y, 于是 $w_0 = y \in Y$, 因此

$$\begin{aligned}(x + Y) + (w + w_0 + Y) &= (x + w) + (w_0 + Y) \\ &= (x + w) + Y.\end{aligned}$$

同样对于数乘, $\alpha(w + w_0 + Y) = \alpha w + (\alpha w_0 + Y) = \alpha w + Y$. 也是确定的.

因为 X 是向量空间, 显然两个运算是封闭的. X/Y 的零向量是 Y .

15. $X/Y = \{\text{平行于}\xi_1\text{轴的所有直线}\}.$

$$X/X = \{\theta\}. \quad X/\{\theta\} = X.$$

习 题 2.2

1. $\|x\| = \|x - \theta\| = d(x, \theta).$

3. 因为, $\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$

同理, $\|x\| \leq \|y - x\| + \|y\|$

合起来, $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|.$

4. 由于, $\|\theta\| = \|ox\| = o\|x\| = 0.$

5. 略.

6. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ 显然满足 (N1) 至 (N3). 由于,

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= |\xi_1 + \eta_1| + |\xi_2 + \eta_2| \\ &\leq |\xi_1| + |\eta_1| + |\xi_2| + |\eta_2| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

证得 $\|\cdot\|_1$ 满足 (N4), 利用 Minkowski 不等式可证明 $\|\cdot\|_2$ 满足 (N4). $\|\cdot\|_\infty$ 满足 (N4) 可从下列不等式得出.

$$\begin{aligned}\|x + y\|_\infty &= \max\{|\xi_1 + \eta_1|, |\xi_2 + \eta_2|\} \\ &\leq \max\{|\xi_1| + |\eta_1|, |\xi_2| + |\eta_2|\}\end{aligned}$$

$$\leq \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} + \max\{|\eta_1|, |\eta_2|\}.$$

7. 略.

8. 满足(N1)至(N3)是显然的. $\|\cdot\|_1$ 满足(N4)可利用数的三角不等式. 根据Minkowski不等式可证明 $\|\cdot\|_p$ 满足(N4). $\|\cdot\|_\infty$ 满足(N4)证明类似习题6中的 $\|\cdot\|_\infty$.

9. 略.

10. 略.

$$\begin{aligned} 11. \quad \|z\| &= \|ax + (1-a)y\| \leq a\|x\| + (1-a)\|y\| \\ &\leq a + (1-a) = 1 \end{aligned}$$

12. 因为集 $\{x \mid \varphi(x) \leq 1\}$ 不是凸的, 取 $x = (1, 0)$
 $y = (0, 1)$. 则 $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$, $\varphi\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] = 2$.

13. 因为离散度量不满足8(b).

14. \tilde{d} 不满足8(b).

15. 设 M 有界, 则, $\delta_{(M)} = \sup_{x, y \in M} \|x - y\| = b < \infty$, 取一固定 $x_0 \in M$, 令 $c = b + \|x_0\|$, 对于任意 $x \in M$, 有,

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \leq b + \|x_0\| = c.$$

反之, 如果对于每个 $x \in M$, $\|x\| \leq c$, 那么, 对于所有 $x, y \in M$, 有

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2c. \text{ 因此, } \delta_{(M)} \leq 2c.$$

习 题 2.3

2. 设 $x = (\xi_j) \in \overline{C}_0$, 则有 $x_n = (\xi_j^{(n)}) \in C_0$, 使 $x_n \rightarrow x$, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$,

对于固定的 $N+1$, 由于 $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j^{(N+1)} = 0$, 存在 N_1 , 当 $j > N_1$

时, $|\xi_j^{(N+1)}| < \frac{\varepsilon}{2}$ 因此

$$\begin{aligned} |\xi_j| &\leq |\xi_j - \xi_j^{(N+1)}| + |\xi_j^{(N+1)}| \quad (j > N_1) \\ &\leq \sup_k |\xi_k - \xi_k^{(N+1)}| + |\xi_j^{(N+1)}| \\ &= \|x - x_{(N+1)}\| + |\xi_j^{(N+1)}| < \varepsilon \end{aligned}$$

即, $\xi_j \rightarrow 0$. 从而 $x \in C_0$.

$$3. \text{ 令 } x_n = (\xi_j^{(n)}) = \begin{cases} \frac{1}{j} & j \leq n \\ 0 & j > n \end{cases}, x = (\xi_j) = \left(\frac{1}{j}\right)$$

显然 $x_n \rightarrow x$, 但 $x \in \bar{Y}$, $x \notin Y$.

4. 对于任意 $x, y \in l^\infty$, 及任意数 α, β , 存在 $x_n \in Y, y_n \in Y$, 使 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, 由于加法和数乘运算的连续性, 有,

$$\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha x + \beta y \quad \alpha x_n + \beta y_n \in Y.$$

从而, $\alpha x + \beta y \in \bar{Y}$.

5. 设赋范空间为习题 3 中之 Y , 令 $y_n = (\eta_j^n)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{j^2} & j = n \\ 0 & j \neq n \end{cases}, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛, 但,}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, 0, \dots\right) \rightarrow y \notin Y.$$

6. 设 (S_n) 是 X 中任意 Cauchy 序列, 对于每个 K , 存在

n_k , 使得 $\|S_n - S_m\| < \frac{1}{2^k}$ ($(n, m > n_k)$ 对所有 K , 选 $n_{k+1} >$

n_k , 则 (S_{n_k}) 是 (S_n) 的子序列. 令 $x_1 = S_{n_1}$, $x_2 = S_{n_2} - S_{n_1}$,

$\dots x_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$. 那么, $S_{n_k} = \sum_{j=1}^k x_j$, 并且,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|x_1\| + \|x_2\| + 1.$$

于是 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛. 根据假设 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛即, $S_{n_k} \rightarrow S \in X$,

因为 (S_n) 是 Cauchy 序列, 有, $\|S_n - S\| \leq \|S_n - S_{n_k}\| + \|S_{n_k} - S\| \rightarrow 0$, 因此, $S_n \rightarrow S$. 故 X 是完备的.

7. 设 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛. 令 $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$, $m > n$, 那么,

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \|x_{n+1} + \dots + x_m\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \end{aligned}$$

即 (S_n) 是 Cauchy 序列.

8. 基元素的有理系数的线性组合集是可数的并在空间中稠密 (对于复系数有理系数是指实部和虚部都是有理数)

9. 对于 $x = (\xi_i) \in l^p$ 以及每个 $\varepsilon > 0$, 存在 n , 使

$$\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} < \varepsilon. \text{ 所以有.}$$

$$\|x - \sum_{i=1}^n \xi_i e_i\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

10. $P(\theta) = P(ox) = oP(x) = 0$.

$$P(y) = P[(y-x) + x] \leq P(y-x) + P(x)$$

于是, $P(y) - P(x) \leq P(y-x)$

x 与 y 交换, 有

$$P(x) - P(y) \leq P(y - x)$$

从而, $P(y) - P(x) \geq -P(y - x)$

因此, $|P(y) - P(x)| \leq P(y - x)$.

11. 若 $P(x) = P(y) = 0$. 由(N1), (N3), (N4), 有 $P(\alpha x + \beta y) = 0$. 即 N 是 X 的一子空间. $\|\hat{x}\|_0$ 是由 \hat{x} 唯一确定的: 对于任意 $v \in N$, $x \in X$, 有 $P(v) = 0$.

$$P(x) \leq P(x + v) + P(v) = P(x + v) + 0 \leq P(x).$$

$\|\cdot\|_0$ 显然满足(N1)、(N3)、(N4). 只须证(N2)成立: 当 $\hat{x} = N$ 时, 有 $\|\hat{x}\|_0 = P(x) = 0$ ($x \in N$). 若 $\|\hat{x}\|_0 = 0$, 则任意 $x \in \hat{x}$, $P(x) = 0$. 得 $\hat{x} = N$. (由习题2.1-14证明中知). N 是 X/N 的零元素.

12. $\|\hat{x}\|_0 = 0$ 当且仅当 \hat{x} 中有一序列 (x_n) , 使得 $\|x_n\| \rightarrow 0$. 因为 Y 是闭的. 所以 \hat{x} 是闭的. 从而, $0 \in \hat{x}$, $\hat{x} = Y$. 即, $\|\hat{x}\|_0 = 0$ 当且仅当 $\hat{x} = Y$. (N2)得证. (N4)从下式

$$\begin{aligned} \|\hat{x} + \hat{y}\|_0 &= \inf_{\substack{\bar{x} \in \hat{x} \\ \bar{y} \in \hat{y}}} \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \inf_{\substack{\bar{x} \in \hat{x} \\ \bar{y} \in \hat{y}}} (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|) \\ &= \inf_{\bar{x} \in \hat{x}} \|\bar{x}\| + \inf_{\bar{y} \in \hat{y}} \|\bar{y}\| = \|\hat{x}\|_0 + \|\hat{y}\|_0 \end{aligned}$$

得证. 显然, 有(N3)成立.

$$\|\alpha \hat{x}\|_0 = |\alpha| \|\hat{x}\|_0$$

13. $\|x\| = 0 \iff \|x_1\|_1 = \|x_2\|_2 = 0 \iff x = (0, 0) = \theta$.
设 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. 则.

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \max(\|x_1+y_1\|_1, \|x_2+y_2\|_2) \\
&\leq \max(\|x_1\|_1 + \|y_1\|_1, \|x_2\|_2 + \|y_2\|_2) \\
&\leq \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2) + \max(\|y_1\|_1, \|y_2\|_2) \\
&= \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

习 题 2.4

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}.$

4. 中心在 θ 点的开球, 由不等式(3)有, $B(\theta, r) \subset B_0(\theta, r/a), B_0(\theta, r) \subset B(\theta, br)$ 因为范数产生平移不变的度量. 所以以任何点为中心的球有类似性质, 再根据, §1.3 中习题4立即证得此命题.

6. 因为, $|\xi_j|^2 \leq \max_k |\xi_k|^2$, 于是

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

7. 令 $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$
 $\dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有,

$$\|x\| \leq \sum |\xi_j| \|e_j\| \leq b \|x\|_2 \text{ 这里, } b = (\sum \|e_j\|^2)^{1/2}$$

8. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 取 $\eta_j = 1, j=1, \dots, n$, 有, $\|x\|_1^2 = (\sum |\xi_j|)^2 \leq n \sum |\xi_j|^2 = n \|x\|_2^2$

9. 因为, $a \|x_n - x\|_0 \leq \|x_n - x\| \leq b \|x_n - x\|_0$

10. 按矩阵加法和数乘, Z 为向量空间, $\dim Z = mn$, 因此, 所有范数等价 (利用 2.4-5).

$$\|A\|_1 = \sum_i \sum_k |\alpha_{ik}|; \quad \|A\|_2 = (\sum_i \sum_k |\alpha_{ik}|^2)^{1/2};$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{j,k} |a_{kj}|$$

习 题 2.5

1. 例如 (n) 没有任何收敛的子列.
2. X 包含一个无穷序列 (x_n) , $x_n \neq x_m (n \neq m)$ 由于 $d(x_n, x_m) = 1$, (x_n) 不可能有收敛的子序列.
3. 例如: $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ 是紧的; $\xi_1 = \xi_2$ 是非紧的.
4. 如果条件不成立, 存在一个 K_0 , 对于每个 n , 有 $x_n \in M$ 使得 $|\xi_{k_0}(x_n)| > n$.
因为 $x_{n_j} \rightarrow x$ 蕴涵 $\xi_{k_0}(x_{n_j}) \rightarrow \xi_{k_0}(x)$, 而 $|\xi_{k_0}(x_{n_j})| > n_j$. 所以 (x_n) 不可能有收敛的子序列, 这与 M 是紧的矛盾.
5. 由定理2.5-3, 在这些空间中以每个点为中心半径为1的闭球是这个点的紧邻域. 紧度量空间 X 本身是它的每个点的紧邻域.

7. 设 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 是 Y 的一个基, 有 $y_k = \sum_{l=1}^n a_{kl} b_l \in Y$. 使 $\|y_k - v\| \rightarrow a$, 那么 (y_k) 有界. 利用引理2.4-1. $\{a_{kl}\}$ 有界. 因此, 有收敛子序列, $a_{k_j l} \rightarrow a_l, l = 1, 2, \dots, n$. 于是, (y_k) 有收敛的子列 $(y_{k_j}) y_{k_j} = \sum_{l=1}^n a_{k_j l} b_l$. 令 $\tilde{y} = \sum a_l b_l \in Y$, 有

$$a \leq \|v - \tilde{y}\| \leq \|v - y_{k_j}\| + \|y_{k_j} - \tilde{y}\| \rightarrow a$$

$$\text{即, } \|v - \tilde{y}\| = a, \text{ 令 } \tilde{z} = \frac{v - \tilde{y}}{\|v - \tilde{y}\|}, \text{ 对于每个 } y \in$$

$$\begin{aligned}
 Y. \text{ 有, } \|\tilde{z} - y\| &= \frac{1}{\|v - \tilde{y}\|} \|v - \tilde{y} - \|v - \tilde{y}\|y\| \\
 &= \frac{1}{a} \|v - y_1\| \geq \frac{1}{a} \cdot a = 1
 \end{aligned}$$

8. 通过 $h(x) = \|x\|$, $x \in X$ 定义的 h 是连续的, 根据定理 2.5-3, 单位球面 $M \subset (X, \|\cdot\|_2)$ 是紧集, 利用定理 2.5-7, h 在 M 上取得最小值, 即,

$$a = h(y_0) = \min_{\|x\|_2=1} h(x) \leq h(y), \text{ 对所有 } y \in M. \text{ 数 } a > 0.$$

否则 $y_0 = 0$, 推得 $y \notin M$. 对于任意 $x \neq \theta$, 有, $y = \|x\|^{-1}x \in M$. 并且, $a \leq h(y) = \|x\|^{-1}\|x\| \iff a\|x\|_2 \leq \|x\|$.

9. 设 (x_n) 是 M 中任意序列, 因为 X 是紧的, (x_n) 有一收敛的子序列 (x_{n_k}) , $x_{n_k} \rightarrow x \in X$. 由于 M 是闭的, 根据定理 1.4-7(b), $x \in M$. 故 M 是紧的.

10. 设 M 是 X 的任意闭子集, 根据习题 9, M 是紧的, 由定理 2.5-6, $T(M)$ 是紧集, 利用定理 2.5-2. $T(M)$ 是闭的. 由 § 1.3 中习题 14 知, T^{-1} 连续, 从而 T 是一同胚.

习 题 2. 6

1. 略
2. 分别是到 ξ_1 轴上的投影, 到 ξ_2 轴上的投影; 关于直线 $\xi_1 = \xi_2$ 的反射, 第四个映射为相似变换.
3. $D(T_1) = R^2$, $R(T_1) = \xi_1$ 轴, $R(T_2) = \xi_2$ 轴.
 $R(T_3) = R^2$; $N(T_1) = \xi_2$ 轴, $N(T_2) = \xi_1$ 轴,
 $N(T) = \text{原点}.$

$$4. N(T_4) = \begin{cases} R^1 & r = 0 \\ \{\theta\} & r \neq 0 \end{cases} \quad N(T) = \{x \mid x(t) = k = \text{常数}\}.$$

$N(T_1) = \{\theta\} \cup \{\text{所有垂直于}\alpha\text{的向量}\}.$

$N(T_2) = \{\theta\} \cup \{\text{所有平行于}\alpha\text{的向量}\}.$

5. 对于任意 $y_1, y_2 \in T(V)$, 存在 $x_1, x_2 \in V$. 使 $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$, 由于 V 是向量空间, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in V$. 因为 T 是线性的, 所以 $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in T(V)$. 对于任意 $x_1, x_2 \in T^{-1}(W)$, 有 $Tx_1 = y_1 \in W$. $Tx_2 = y_2 \in W$, 因为 W 是向量空间, T 是线性的, 于是, $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 \in W$. 即, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in T^{-1}(W)$.

$$6. ST(\alpha x + \beta y) = S(\alpha Tx + \beta Ty) = \alpha STx + \beta STy.$$

7. 不能交换.

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$9. \eta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

10. T^{-1} 存在 $\iff N(T) = \{\theta\}$. 即 b 为满秩的时候, T^{-1} 存在.

11. 根据定理 2.6-10(a) T^{-1} 不存在.

12. 由于 T 是线性的, 设 $\alpha_1 Tx_1 + \dots + \alpha_n Tx_n = \theta$, 则 $T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \theta$, 因为 T^{-1} 存在, 所以, $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$, 由 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 线性无关, 于是 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

13. 设 $R(T) = Y$. $\{b_1, \dots, b_n\}$ 是 Y 的一个基, 则存在 $e_i \in X$, 使 $b_i = Te_i$. 令 $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \theta$. 因为 T 是线性的. 有

$\sum_{i=1}^n a_i T e_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$. 由 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 线性无关, 得 $a_1 = \dots =$

$a_n = 0$ 故 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基. 若 $Tx = \theta$. 那么, $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$,

有, $Tx = \sum_{i=1}^n \xi_i T e_i = \sum_{i=1}^n \xi_i b_i = \theta$ 于是, $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$.

即 $x = \theta$. 由定理 2.6-10(a) 知, T^{-1} 存在. 反之, 由定理 2.6-10(c) 立即得证.

14. 对于每个 $y(t) \in X$, 存在

$$x(t) = \int_0^1 y(\tau) d\tau$$

使得, $Tx = y$, 因此, $R(T) = X$.

由于 $N(T) \neq \{\theta\}$. 即对于每个常数函数, $Tx = 0$, 因此, T^{-1} 不存在. 说明习题13中的有穷维条件是必要的.

习 题 2.7

1. $\|T\| = 1$

2. 令 $y_n = (\eta_i^{(n)}) = Tx_n$. $x_n = (\xi_i^{(n)})$. $\xi_i^{(n)} = \frac{n\sqrt{j}}{(n+j)}$

则, $x_n \in l^\infty$, $\xi_i^{(n)} \longrightarrow \xi_i = \sqrt{j}$. $\eta_i^{(n)} = \frac{n}{(n+j)\sqrt{j}} \longrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{j}} = \eta_i$, $y_n \in R(T)$. $y = (\eta_i) \in \overline{R(T)}$, 但由于 $x = (\xi_i)$

$\notin l^\infty$, 于是, $y \notin R(T)$.

3. $Tx = \theta \implies \|Tx\| = 0 \implies \|x\| = 0 \implies x = \theta$.
根据定理 2.6-10(a). T^{-1} 存在. 因为, $R(T) = Y$, 对每个

$y \in Y$, 有 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, 则 $T^{-1}y = x$. 因此.

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{b} \|Tx\| = \frac{1}{b} \|y\|$$

4. 取 $y_n = (\eta_j^{(n)})$. $\eta_j^{(n)} = n/(n+j)\sqrt{j}$.

$$T^{-1}y_n = x_n = (\xi_j^{(n)}) = (j\eta_j^{(n)}) = (n\sqrt{j}/n+j)$$

$$\text{则, } \|y_n\| \leq 1, \|x_n\| = \frac{\sqrt{n}}{2}, \frac{\|T^{-1}y_n\|}{\|y_n\|} \geq \frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow \infty$$

5. $R(T) = \{y \mid [0, 1] \text{ 上, } y(0) = 0 \text{ 的所有连续可微函数 } y\}$, $T^{-1}y = y'(t)$, T^{-1} 是线性的, 但是无界的.

6. 不可交换, $\|T_1\| = 1, \|T_2\| = 1, \|T_1T_2\| = \frac{1}{2}, \|T_2T_1\| = 1$

7. 是线性有界的.

8. 只证第二个论断. 由于,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \max_j \left| \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k \right| \leq \max_j \sum_{k=1}^n |\alpha_{jk}| \cdot \max_k |\xi_k| \\ &= \|A\| \|x\|_1 \end{aligned}$$

$$\text{得, } \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leq \|A\|.$$

另一方面, 取使得 $\sum_{k=1}^n |\alpha_{jk}|$ 是最大值的 $j = s$. 令 $x_0 = (\xi_k^0)$,

$$\xi_k^0 = \begin{cases} |\alpha_{sk}| / \alpha_{sk} & \alpha_{sk} \neq 0 \\ 0 & \alpha_{sk} = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } \|x_0\|_1 = 1, \frac{\|Ax_0\|_2}{\|x_0\|_1} = \|Ax_0\|_2 = \max_j \left| \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k^0 \right|$$

$$= \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| = \|A\|$$

9. 第一个论断从2.7-5中最后一个公式可得证. 为证第二个论断, 可考虑单位矩阵.

$$\begin{aligned} 10. \|Ax\|_2 &= \sum_{j=1}^r \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} \xi_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r |a_{j,k}| |\xi_k| \\ &\leq \max_k \sum_{j=1}^r |a_{j,k}| \cdot \sum_{k=1}^n |\xi_k| = \|A\| \|x\|_1 \end{aligned}$$

11. 令 $\|\cdot\|_0$ 是自然范数, 由习题10, 有, $\|A\|_0 = \sup_{\|x\|_1=1}$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|.$$

当 $\|A\| = 0$ 时, $\|A\|_0 = \|A\|$; 若 $\|A\| > 0$, 存在一个 $K = s$, 使得,

$$\|A\| = \max_k \sum_{j=1}^r |a_{j,k}| = \sum_{j=1}^r |a_{j,s}|. \text{ 选 } x = (\xi_j),$$

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & i=s \\ 0 & i \neq s. \end{cases} \text{ 则, } \|x\|_1 = 1.$$

$$\|Ax\|_2 = \sum_{j=1}^r |a_{j,s}| = \|A\|. \text{ 因此, } \|A\|_0 = \|A\|.$$

12. $N(T) = \{ax_0 \mid a \in R, x_0 = (2, 4-7)\}.$

13. $R(T) = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$ $N(T)$ 为

$$\xi_3 \text{ 轴. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. 零算子 $0: X \rightarrow \{\theta\} \subset Y$; 算子 $-T$;

15. 设 M 是给定的球并置于球 $\tilde{B} = \{x \mid \|x\| \leq r\}$ 之中, 因为 $T_n \rightarrow T$. 那么, 对于每个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得 $\|T_n - T\| < \varepsilon/r (n > N)$, 因此, 对于所有 $n > N$, 和 $x \in \tilde{B}$,

有,

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\| \|x\| < \varepsilon / r \cdot r = \varepsilon.$$

习 题 2.8

2. $\|f\| = 2.$

3. f 有界, 且 $\|f\| = 1$

4. $\|\cdot\|$ 满足 (N4), 这从下式得证.

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \max_{t \in J} |x(t) + y(t)| + \max_{t \in J} |x'(t) + y'(t)| \\ &\leq \max_{t \in J} |x(t)| + \max_{t \in J} |y(t)| + \max_{t \in J} |x'(t)| \\ &\quad + \max_{t \in J} |y'(t)| \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

f 是线性的, 在 $C'[a, b]$ 上, 有

$$|f(x)| = |x'(c)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| + \max_{t \in J} |x'(t)| = \|x\|.$$

即 f 在 $C'[a, b]$ 上有界.

对于每个 n , 存在一个 $x_n \in C[a, b]$, 且 $x'_n(c) = 1$.

$$|x_n(t)| < \frac{1}{n}, \text{ 于是有,}$$

$$\sup_x \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{|x'_n(c)|}{\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t)|} > n.$$

故 f 在 $C[a, b]$ 上无界.

5. 由于 $x_0 \in X - N(f)$, 所以 $f(x_0) \neq 0$, 对于任意 $x \in X$.

$$\text{令 } \alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}. \quad y = x - \alpha x_0.$$

则, $f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = 0$. 即 x 有表示式

$$x = \alpha x_0 + y \quad y \in N(f).$$

若 $\tilde{\alpha} x_0 + \tilde{y} = \alpha x_0 + y$, 那么, $\tilde{y} - y = (\alpha - \tilde{\alpha}) x_0$. 由于 $\tilde{y} - y \in N(f)$, 所以, $(\alpha - \tilde{\alpha}) f(x_0) = f(\tilde{y} - y) = 0$ 因为 $f(x_0) \neq 0$, 于是 $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{y} = y$. 故唯一性得证.

$$\begin{aligned} 6. \quad x_1, x_2 \in \hat{x} \in X/N(f) &\iff x_1 - x_2 \in N(f) \\ &\iff f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned}$$

因为 $f \neq 0$, 所以, $X/N(f) \neq \{\theta\}$.

$$\text{codim } N(f) = \dim X/N(f) > 0.$$

若 $\hat{x}, \hat{y} \in X/N(f)$. 则, $\hat{x} = x + N(f)$, $\hat{y} = y + N(f)$ 对于 $x_0 \in X - N(f)$. $x = \alpha_1 x_0 + z_1$. $y = \alpha_2 x_0 + z_2$. $z_1, z_2 \in N(f)$, 从而, $\hat{x} = \alpha_1 x_0 + N(f)$ $\hat{y} = \alpha_2 x_0 + N(f)$, 所以, $\alpha_2 \hat{x} - \alpha_1 \hat{y} = N(f) = \hat{\theta}$ 即 \hat{x}, \hat{y} 线性相关, 于是, $\dim X/N(f) \leq 1$.

7. 由习题 5, $x = \frac{f_1(x)}{f_1(x_0)} x_0 + y$. $y \in N(f_1) = N(f_2)$ 因

$$\text{此, } f_2(x) = f_1(x) \cdot \frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}.$$

8. 根据习题 5, 若 $f(x_0) \neq 0$, 那么, 每个 $x \in H_1$. 有 $x = \frac{1}{f(x_0)}$

$x_0 + y, y \in N(f)$, 令 $z = \frac{1}{f(x_0)}x_0$, 于是 $H_1 = \hat{z} \in X/N(f)$.

9. 假定 $f(y_0) = r \neq 0, y_0 \in Y$, 那么, 对 \mathbb{C} 数域中的每个数 α , 有

$$\alpha = \alpha \cdot \frac{1}{r} f(x_0) = f\left(\frac{\alpha}{r}x_0\right) \in f(Y).$$

于是与题设产生矛盾.

10. 设 $x \in H_1$, 则, $1 = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$, 所以, $\|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}$

且, $\tilde{d} \geq \frac{1}{\|f\|}.$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $x \in H_1$, 使得 $\frac{|f(x)|}{\|f\|} = \frac{1}{\|x\|}$

$> \|f\| - \varepsilon$. 因此, $\|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon} \quad \tilde{d} \leq \frac{1}{\|f\|}$. 于是 $\|f\| = \frac{1}{\tilde{d}}$.

11. $x = (1, 0, 0)$ 可表示成 $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, -1)$

$e_3 = (1, -1, -1)$ 的线性组合 $x = \frac{1}{2}e_1 + 0 \cdot e_2 + \frac{1}{2}e_3$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}, f_2(x) = 0, f_3(x) = \frac{1}{2}.$$

12. $N(f)$ 的维数是 n 或 $n - 1$. 一个基是 $(a_2, -a_1, 0)$
 $(a_3, 0, -a_1)$.

13. Z 存在一个基 $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$, 使得 $\{e_1, \dots, e_{n-1},$

$e_n\}$ 是 X 的一个基. 令 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的对偶基. 那么, $f_n(x) = 0$ 当且仅当 $x \in Z$.

14. 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基, 使得 $\{e_1, \dots, e_q\}$ 是 Z 的一个基并且 $e_{q+1} = x_0$. 令 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是对偶基. 那么 $f = f_{q+1}$ 即为所求.

15. 因为, $f_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = 1, \dots, p, a_{ik} = f_i(e_k)$
 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基, $\sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = 0, i = 1 \dots p$, 由于
 $p < n$. 有非零解, 因此存在 $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \neq 0$ 使 $f_1(x) = \dots =$
 $f_p(x) = 0$.

16. 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基, 使得 $\{e_1, \dots, e_q\}$ 是 Z 的一个基, $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是对偶基, 令 $\tilde{f} = \sum_{i=1}^q f(e_i) f_i$,
 则. $\tilde{f}(e_k) = f(e_k), (k = 1, \dots, q)$ 因此, $\tilde{f}|_Z = f$.

17. $\|f\| = \sum_{k=1}^n |f(e_k)|$. 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基任
 意 $x \in X$, 有 $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, 且

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n \xi_k f(e_k) \right| \leq \max |\xi_j| \sum_{k=1}^n |f(e_k)| \\ &= \sum_{k=1}^n |f(e_k)| \|x\|. \end{aligned}$$

于是 $\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |f(e_k)|$; 取 $x_0 = \sum_{j=1}^n \xi_j^0 e_j$.

$\xi_j^0 = \operatorname{sgn} f(e_j)$ 则 $\|x_0\| = 1, \xi_j^0 f(e_j) = |f(e_j)|$. 因此, $f(x_0)$
 $= \sum_{j=1}^n |f(e_j)| \|x_0\|, \|f\| \geq \sum_{j=1}^n |f(e_j)|$.

18. 利用 $e_k = (\delta_{k,i})$. 对于 $f \in (c_0)^*$, 有,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k, \quad \alpha_k = f(e_k).$$

$$\text{令 } x_n = (\xi_k^{(n)}), \quad \xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\alpha_k| / \alpha_k & K \leq n \text{ 且 } \alpha_k \neq 0 \\ 0 & K > n \text{ 或 } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

$$\text{则, } \|x_n\| \leq 1. \quad f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \alpha_k = \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \geq \|x_n\| \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$$

令 $n \rightarrow \infty$, 有 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \leq \|f\|$, 因此, $(\alpha_k) \in l^1$ 设 $T: (C_0)^* \rightarrow l^1$

$$f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n), \dots)$$

那么, T 是线性的. 对于任意 $b = (\beta_i) \in l^1$, 通过 $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$ $x = (\xi_k) \in c_0$ $\beta_k = g(e_k)$ 得到 c_0 上一有界线性泛函 g . 事实上, $|g(x)| \leq \sum |\xi_k \beta_k| \leq \sup_i |\xi_i| \sum |\beta_k| = \|b\| \|x\|$. 故 T

是满射. 由以上可证得, $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)| = \|Tf\|$, 于是 T 是保范的, 必是一对一的, 因此 $(c_0)^*$ 与 l^1 同构, 即在同构意义下, $(c_0)^* = l^1$.

19. 若 $f, g \in M^a$, 则 $\alpha f + \beta g \in M^a$. 即 M^a 是向量子空间. 若 $f \in \overline{M^a}$, 则存在 $f_n \in M^a$, 使得 $f_n \rightarrow f$. 对于每个 $x \in M^a$ 有, $f_n(x) = 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \|x\| \rightarrow 0$. 因此, $f \in M^a$. 故 M^a 是闭的. $X^a = \{0\}$. $\{\theta\}^a = X^*$

20. 设 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 是 M 的一个基, 并且 $\{e_1, \dots, e_m, \dots e_n\}$ 是 X 的一个基, $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是对偶基, $Y_1 = \text{span}\{f_{m+1}, \dots f_n\}$.

对于每个 $x \in M$, $x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$, 那么,

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^m \xi_k f_j(e_k) = 0 \quad j = m+1, \dots, n \text{ 即 } Y_1 \subset M^\circ.$$

令 $f \in M^\circ$, 则 $f \in X^*$.

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

$$0 = f(e_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(e_k) = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \text{ 因此,}$$

$f \in Y_1$. 故 $M^\circ \subset Y_1$.

习 题 3.1

$$\begin{aligned} 1. \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &\quad + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle \\ &\quad - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

2. 因为 $\|x\| = \|y\|$, 所以 $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle$. 又由 X 是实的, 于是 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

$$\langle x+y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = 0.$$

$X = R^2$ 时, 这表示: 若平行四边形的边相等, 则对角线互相垂直. 当 X 是复内积空间时, 有 $\operatorname{Re} \langle x+y, x-y \rangle = 0$.

3. 用直接计算可证明此恒等式. 下面用公式(9)证明.

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 &= \frac{1}{2} \left[\|(z-x) - (z-y)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|(z-x) + (z-y)\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \|x-y\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \|2z - (x + y)\|^2 \\
& = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \\
& + 2 \left\| z - \frac{1}{2}(x + y) \right\|^2.
\end{aligned}$$

4. 直接计算可得(10)及(11).

5. 由 $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$, 得 $\langle x, u - v \rangle = 0$. 取 $x = u - v$ 就证得 $u = v$.

6. 易验证满足内积公理(IP1)至(IP4).

7. 不能成内积空间.

8. 略.

9. 不能任意选择 r_{ij} , 因为

$$r_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, e_i \rangle} = \overline{r_{ji}}$$

10. 在 R^2 和 R^3 中因为内积是点积 $x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \theta$. 所以 $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$.

11. X 的完备性的证明根据定理3.1-9. Y 是 X 的子空间. 次数为2的所有 $x \in X$ 不是 X 的子空间.

12. 略.

$$\begin{aligned}
13. \quad \|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x \rangle \\
&= \|x_n\|^2 - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle + \|x\|^2 \\
&\rightarrow 2\|x\|^2 - 2\langle x, x \rangle = 0
\end{aligned}$$

14. 利用定理1.4-9及

$$\|x\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt \leq (b-a) \|x\|_\infty^2$$

15. 由于 $\langle Tx, x \rangle = 0$, $\langle Ty, y \rangle = 0$, 因此

$$0 = \langle T(x+y), (x+y) \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle$$

在上述等式中以 iy 代替 y 并乘以 i 得,

$$0 = i[\langle Tx, iy \rangle + \langle iTy, x \rangle] = \langle Tx, y \rangle - \langle Ty, x \rangle$$

两个等式相加, $\langle Tx, y \rangle = 0$, 取 $y = Tx$, 得到 $\|Tx\|^2$. 且对于所有 $x \in X$, $Tx = 0$. 在实内积空间中其结论不成立, 例如, 在 R^2 中, 旋转角是 90° 的变换 T , 有 $\langle Tx, x \rangle = 0$. 但 $T \neq 0$.

习 题 3.2

1. 若 $x_i \perp x_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, 则由直接计算可得: $\left\| \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2$.

若 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. 则,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x+y, x+y \rangle - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} \\ &= 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

2. (a) 若 $y = \alpha x$, 则, $0 = \langle x, y \rangle = \overline{\alpha} \|x\|^2$. 得 $\alpha = 0$ 或 $x = \theta$, 这与题设矛盾.

(b) 设 $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$. 则,

$$0 = \langle 0, x_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, x_k \right\rangle = \alpha_k \|x_k\|^2$$

于是, $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$.

3. 从

$$\begin{aligned}\langle x \pm \alpha y, x \pm \alpha y \rangle &= \|x\|^2 \pm \overline{\alpha} \langle x, y \rangle \pm \alpha \langle y, x \rangle \\ &\quad + |\alpha|^2 \|y\|^2\end{aligned}$$

中看到, 直交蕴涵 $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$.

$\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ 蕴涵

$$\overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle = 0.$$

当空间为实的时, 取 $\alpha = 1$; 当空间为复的时, 取 $\alpha = 1$ 及 $\alpha = -i$, 从而得到 $\langle x, y \rangle = 0$.

4. 如果 $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$. 且 $y \neq \theta$, 取 $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$.

于是,

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle - \|x\|^2 \\ &= \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2 \\ &= -|\langle x, y \rangle|^2 \|y\|^{-2} \leq 0\end{aligned}$$

因此, $x \perp y$. 反之是显然的.

5. 由假设及 § 3.1 中的平行四边形等式(9)得,

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \\ &\leq 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4d^2 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

即 (x_n) 是 H 中的 Cauchy 序列.

6. M 是闭的, 因为对于 $w = (w_i) \in \overline{M}$, 存在 M 中的序列 (y_n) , 使得 $y_n = (\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \dots, \eta_n^{(n)}) \rightarrow w$ 且 $\sum_{i=1}^n \eta_i^{(n)} = 1$ 推出 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, 于是 $w \in M$. 因此根据定理 1.4-8 M 是完备的.

M 是凸的. 事实上, $y \in M$, $z = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in M$ 与

$\alpha \in [0, 1]$ 蕴涵 $\alpha y + (1 - \alpha)z \in M$. 因为,

$$\sum_{i=1}^n [\alpha \eta_i + (1 - \alpha) \xi_i] = \alpha \sum_{i=1}^n \eta_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \xi_i = 1$$

$y = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ 在 M 中有最小范数.

7. 对于 $x(t)$, 令 $x_1(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$,

$x_2(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$. $x_1(t)$ 是奇函数, $x_2(t)$ 是偶函

数, 且 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

8. (a) M 是凸的, 并由定理 1.4-8 知 M 是完备的.

(b) 在 § 3.1 的习题 3 中, 取 $z = x$, $x = y_m$, $y = y_n$, 得,

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 \\ &\quad - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\|^2 \\ &\leq 2(\sigma_m^2 + \sigma_n^2) - 4\delta. \end{aligned}$$

9. (a) $M^\perp = \{z \mid z = \alpha(\xi_2 - \xi_1), \alpha \in R\}$.

(b) $M^\perp = \{\theta\}$.

10. $Y^\perp = \{x \in l^2 \mid \xi_{2n-1} = 0, n \in N\}$.

$$Y^\perp = \{x \in l^2 \mid \xi_j = 0, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

11. (a) $x \in B^\perp \Rightarrow x \perp B \supset A \Rightarrow x \in A^\perp \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

(b) $x \in A \Rightarrow x \perp A^\perp \Rightarrow x \in A^{\perp\perp} \Rightarrow A \subset A^{\perp\perp}$.

因此, $A^\perp \supset (A^{\perp\perp})^\perp$. 且 $A^\perp \subset (A^\perp)^{\perp\perp}$.

12. 易验证 M^\perp 是向量空间. M^\perp 是闭的, 因为对所有

$v \in M$ 及

$$x \in \overline{M^\perp}, \quad x_n \rightarrow x.$$

由引理3.1-10内积的连续性有,

$$\langle x_n, v \rangle \rightarrow \langle x, v \rangle = 0.$$

13. 假设 $Y = Y^{\perp\perp} = (Y^\perp)^\perp$. 利用习题8得 Y 是闭的. 反之, 由引理3.2-6可得证.

14. $M \subset M^{\perp\perp}$, 由习题12知 $M^{\perp\perp}$ 是闭子空间. 其次, 任何闭子空间 $Y \supset M$, 则根据习题11(a)有, $Y^\perp \subset M^\perp$, $Y^{\perp\perp} \supset M^{\perp\perp}$, 由习题13, $Y = Y^{\perp\perp}$.

习 题 3.3

1. 用Gram-Schmidt过程计算可得.

2. 例如, 设 $e_k = (\delta_k, \dots, i_{-1})$, $x = (\xi_k)$, $\xi_1 \neq 0$.

$$\text{则, } \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|^2.$$

3. 由 § 1.2 的 Cauchy-Schwarz 不等式及本节的 Bessel 不等式(8)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \\ & \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y, e_k \rangle|^2 \right]^{1/2} \leq \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} t, \quad \left(\frac{5}{8}\right)^{1/2} (3t^2 - 1).$$

$$5. \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{1/2} t^2, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} t, \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{1/2} (3 - 5t^2).$$

6. 利用直交性. 有

$$\|S_n\|^2 = \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\|^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2$$

根据引理3.1-10内积的连续性.

$$S_n \rightarrow x \text{ 蕴涵 } \|S_n\|^2 = \langle S_n, S_n \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

7. 例如, $x = (1, 1, 1) \in R^3$. $e_1 = (1, 0, 0)$,

$e_2 = (0, 1, 0)$ $\{e_1, e_2\} \subset R^3$. 显然 $\sum_{k=1}^2 \langle x, e_k \rangle e_k \neq x$.

8. (S_n) 是柯西序列, 因为, 不妨令 $n > m$

$$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{i=m+1}^n \|x_i\| \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \|x_i\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

9. 因为 $\sum \|x_i\|$ 收敛蕴涵 (S_n) 是 H 中的柯西序列 (根据习题 8). 又由 H 是完备的.

10. 由假设,

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i \rightarrow x, \quad \tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \rightarrow y.$$

根据引理3.1-10内积的连续性.

$$\langle S_n, \tilde{S}_n \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \bar{\beta}_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i \bar{\beta}_i = \langle x, y \rangle.$$

11. 由定理3.3-10知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ 收敛于 y , 且

$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$, 即 $\langle x - y, e_k \rangle = 0$. 因此, $(x - y) \perp e_k$.
($k = 1, 2, \dots$),

12. 若 x 可以表示成 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$, 由定理3.3-10知级数收敛. 部分和序列 (x_n) . 有 $x_n \rightarrow x$. 根据定理1.4-7(a). 知 $x \in \overline{Y}$.

反之, 设 $x \in \overline{\overline{Y}}$, $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$, 则 $\tilde{x} \in \overline{\overline{Y}}$, 于是

$v = x - \tilde{x} \in \bar{Y}$. 因此,

$$\begin{aligned}\langle v, e_m \rangle &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_m \right\rangle \\ &= \langle x, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle = 0\end{aligned}$$

即, $v \perp e_m$, $m=1, 2, \dots$, 从而, $v \perp M, v \perp \bar{Y}$

$v \perp v$ (因为 $v \in \bar{Y}$), $v=0$. 所以 $x = \tilde{x}$.

13. 由习题12知, $e_n \in \bar{Y}_2$ 的充要条件是 (a) 成立. $e_y \in \bar{Y}_1$ 的充要条件是 (b) 成立. (a) 蕴涵 $e_n \in \bar{Y}_1$. (b) 蕴涵 $e_y \in \bar{Y}_1$.

习 题 3.4

1. 不一定.

2. 根据定理3.4-5可证得: 一个有限完全直交集 $E = \{e_1, \dots, e_n\} \subset H$ 是 H 作为向量空间的一个基. 反之, 如果向量空间 H 是 n 维的且 B 是含 n 个元素的基, 那么对 B 进行 Gram-Schmidt 过程就可得到 n 个元素的完全直交集.

3. 设 H 是完备的. 由 (3) 式

$$\|x + \beta y\|^2 = \sum |\langle x + \beta y, e_k \rangle|^2 = \sum \langle x + \beta y, e_k \rangle \overline{\langle x + \beta y, e_k \rangle}$$

$\langle x + \beta y, e_k \rangle$ 乘开并利用 (3) 得,

$$\overline{\beta \langle x, y \rangle} + \beta \langle y, x \rangle = \overline{\beta \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}} + \beta \sum \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle y, e_k \rangle$$

$\overline{\langle x, e_k \rangle} \langle y, e_k \rangle$ 取 $\beta = 1$ 及 $\beta = i$ 分别得到

$$(I) \quad \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle} + \sum \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle y, e_k \rangle$$

$$-i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle = -i \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle} + i \sum \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle y, e_k \rangle$$

最后的等式乘以 $+i$ 后与 (I) 式相加就得所求结果. 如果 H 是实的, $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$, 内积是实数, 从 (I) 直接可得所求结果.

4. 习题3中的关系式蕴涵(3)及收敛性, 根据定理3.4-6此结论得证.

5. 假设 $\theta \notin M$. 因为 M 是可数的, 我们可将它排成一序列 (x_n) . 从 (x_n) 中能够得到一线性无关子序列 $(y_k) = (x_{n_k})$. 具体作法是从 x_1 开始, 依次略去是它前面项的线性组合的每一项. 注意 (y_k) 可能是有限的. 令 $V = \text{Span}(y_k)$. 因为任何 $x \in M$ 是 y_1, \dots, y_k (k 充分大) 的线性组合, 于是 $M \subset V$. V 在 H 中稠密. 利用

Gram-Schmidt过程我们从 (y_k) 中得到一标准直交序列 (e_k) , 使得对于每个 $m \in N$,

$$\text{Span}\{e_1, \dots, e_m\} = \text{Span}\{y_1, \dots, y_m\}.$$

因此, $\text{Span}(e_k) = \text{Span}(y_k) = V$ 在 H 中稠密, 根据定义 (e_k) 是完全的.

6. F 在闭子空间 $Y = \overline{\text{Span} F}$ 中是完全的. 取 $\tilde{F} = F \cup F_0$, 其中 F_0 是 Y^\perp 中的完全直交序列其存在性是根据习题5, 这里 $Y^\perp \neq \{\theta\}$. $Y^\perp = \{\theta\}$ 的情况是显然的.

7. 对于所有 $x \in M$ $\langle v - w, x \rangle = 0$ 蕴涵 $v - w \perp M$ 因此, 根据定理3.4-5(a)有, $v = w$.

8. 利用定理3.4-5立即得证.

习 题 3.5

1. R^3 上的任一线性泛函是有界的, 其内积就是点积.

2. 从 l^2 上内积的定义和定理3.5-1立即得证.

3. 因为

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|z\| \|x\|$$

所以, $\|f\| \leq \|z\|$. 当 $z = \theta$ 时, $\|f\| = \|z\|$. 当 $z \neq \theta$ 时, 则 $\|f\| \|z\| \geq |f(z)| = \langle z, z \rangle = \|z\|^2$. $\|f\| \geq \|z\|$.

4. 我们记 $z \mapsto f_z$. 令 (z_n) 是 X 中的 Cauchy 序列. 则 $\|f_{z_n}\| = \|z_n\|$. 证明了 (f_{z_n}) 是 X^* 中的 Cauchy 序列且收敛 (参看定理2.8-13), 即, $f_{z_n} \rightarrow f$. 满射蕴涵存在 z , 使得 $z \mapsto f$ 且,

$$\|z_n - z\| = \|f_{z_n} - f\| \rightarrow 0, z_n \rightarrow z.$$

因此, X 是完备的.

5. $(l^2)^*$ 到 l^2 上的同构映射是 $f \mapsto z_f$. 这里 z_f (参看定理3.5-1). 是由

$$f(x) = \langle x, z_f \rangle$$

定义的. 对于实空间 l^2 , 映射是线性的.

6. 由(2),

$$\|f_z - f_v\| = \|f_{z-v}\| = \|z - v\|. \quad \text{且}$$

$$f_{\alpha z + \beta v}(x) = \langle x, \alpha z + \beta v \rangle = \overline{\alpha} \langle x, z \rangle + \overline{\beta} \langle x, v \rangle$$

$$= \overline{\alpha} f_z(x) + \overline{\beta} f_v(x)$$

7. 易验证内积 $\langle f_z, f_v \rangle = \langle v, z \rangle$ 满足公理 (IP1) 至 (IP4), 又由定理2.8-13知 H^* 是完备的.

8. 习题6中的 T 是双射且是共轭线性的, 因此两个这样等

距映射的复合是 H 到 H^{**} 上的一个同构.

9. 有界性从Schwarz不等式得证. 且当 $X \neq \{\theta\}$ 时, $\|h\| = 1$.

$$\begin{aligned}
 11. & |k(x + \Delta x, y + \Delta y) - h(x, y)| \\
 &= |h(x, y) + h(x, \Delta y) + h(\Delta x, y) + h(\Delta x, \Delta y) \\
 &\quad - h(x, y)| \\
 &\leq |h(x, \Delta y)| + |h(\Delta x, y)| + |h(\Delta x, \Delta y)| \\
 &\leq \|h\| \|\Delta y\| + \|h\| \|\Delta x\| + \|h\| \|\Delta x\| \|\Delta y\| \rightarrow 0 \\
 & \text{(当 } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时)}.
 \end{aligned}$$

12. 若 $K = R$, 最后一个条件是 $h(x, y) = h(y, x)$ 此时称 h 为对称双线性泛函. h 成为 X 上的内积必附加正定的条件: 对所有 $x \in X$, $h(x, x) \geq 0$, 且 $x \neq \theta$ 时, $h(x, x) > 0$.

13. 若 $h(y, y) \neq 0$, 则 $h(y, y) > 0$, 由

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & 0 \leq h(x - \alpha y, x - \alpha y) \\
 &= h(x, x) - \overline{\alpha} h(x, y) - \alpha h(y, x) + |\alpha|^2 h(y, y)
 \end{aligned}$$

选 $\alpha = \frac{h(x, y)}{h(y, y)}$ 得.

$$h(x, x) - \frac{|h(x, y)|^2}{h(y, y)} \geq 0$$

若 $h(y, y) \neq 0$, 证明类似. 如果 $h(x, x) = h(y, y) = 0$, 则(a)成为.

$$-\overline{\alpha} h(x, y) - \alpha h(y, x) \geq 0.$$

选 $\alpha = h(x, y)$, 得

$$-|h(x, y)|^2 \geq 0.$$

因此, $h(x, y) = 0$.

14. 只证满足三角不等式.

$$\begin{aligned}
 [p(x+y)]^2 &= h(x+y, x+y) \\
 &\leq h(x, x) + 2|h(x, y)| + h(y, y) \\
 &\leq h(x, x) + 2\sqrt{h(x, x)}\sqrt{h(y, y)} + h(y, y) \\
 &= [\sqrt{h(x, x)} + \sqrt{h(y, y)}]^2
 \end{aligned}$$

所以, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

习 题 3.6

2. 由假设 T^{-1} 有界, 根据定理 3.6-2 知 $(T^{-1})^*$ 存在且有界. 因此, 对所有 x, y .

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \langle T^{-1}Tx, y \rangle = \langle Tx, (T^{-1})^*y \rangle \\
 &= \langle x, T^*(T^{-1})^*y \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \langle TT^{-1}x, y \rangle = \langle T^{-1}x, T^*y \rangle \\
 &= \langle x(T^{-1})^*T^*y \rangle
 \end{aligned}$$

于是, $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = I$, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

$$3. \|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\| \rightarrow 0. (n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

4. 我们考虑任意 $z \in M_2^\perp$ 与任意 $x \in M_1$, 有 $z \perp M_2$ 和 $Tx \in T(M_1) \subset M_2$, 因此, $\langle z, Tx \rangle = 0$, $\langle T^*z, x \rangle = 0$. $T^*z \perp x$
 $T^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$.

5. 设 $T(M_1) \subset M_2$, 根据习题 4, 则 $T^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$, 反过来, 设 $T^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$. 再利用习题 4, 有 $T^{**}(M_1^{\perp\perp}) \subset M_2^{\perp\perp}$, 由定理 3.6-4, $T^{**} = T$. 根据引理 3.2-6, $M_1^{\perp\perp} = M_1$, $M_2^{\perp\perp} = M_2$.

6. (a) 根据习题 4, $T(M_1) \subset \{\theta\}$ 蕴涵 $M_1^\perp \supset T^*(\{\theta\}^\perp) = T^*(H_2)$.

(b) 设 $J = T(H_1)$. 则 $T(H_1) \subset J, T^*(J^\perp) \subset H_1^\perp = \{\theta\}$. (由习题4). $T^*(J^\perp) = \{\theta\}, J^\perp \subset N(T^*)$.

(c) 由 (a), $T^*(H_2) \subset M_1^\perp$. 因此, $[T^*(H_2)]^\perp \supset M_1^{\perp\perp} \supset M_1$. 根据 (b), 用 T^* 代替 T 有, $[T^*(H_2)]^\perp \subset N(T) = M_1$.

7. 利用定理 3.6-3 (b) 直接得证.

8. 由 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\leq \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \langle x, x \rangle + \langle T^*T, x, x \rangle \\ &= \langle Sx, x \rangle \leq \|Sx\| \|x\|.\end{aligned}$$

因此, $Sx = \theta$ 蕴涵 $\|x\| = 0$. 根据定理 2.6-10, $S^{-1}: S(H) \rightarrow H$ 存在.

9. 设 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 是关于 $T(H) = R(T)$ 的一组直交基. 设 $x \in H, Tx = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) b_i$, 则.

$$\langle Tx, b_k \rangle = \alpha_k(x) = \langle x, T^*b_k \rangle \text{ 且,}$$

$$Tx = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle W_i. \text{ 这里 } W_i = b_i, v_i = T^*b_i$$

10. $R(T) = \overline{\text{Span}\{e_2, e_3, \dots\}}, N(T) = \{\theta\}, \|T\| = 1 = \|T^*\|$

习 题 3.7

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^* = \alpha T + \beta S$ (利用定理 3.6-4 及 α, β 是实数)

2. 利用定理 3.6-4 及 T 是自伴的. 得.

$$(T^n)^* = (T^*)^n = T^n.$$

3. 由定理 3.6-4 得.

$$T_1^* = \frac{1}{2} (T + T^*)^* = \frac{1}{2} (T^* + T^{**})$$

$$= \frac{1}{2} (T + T^*) = T_1$$

$$T_2^* = -\frac{1}{2i} (T - T^*)^*$$

$$= -\frac{1}{2i} (T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i} (T - T^*) = T_2$$

下面证唯一性, 假定 $T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$. 则,

$$T_1^* - iT_2^* = S_1^* - iS_2^*$$

由 T_1, T_2, S_1, S_2 是自伴的. 所以,

$$T_1 - iT_2 = S_1 - iS_2$$

与原假定式相加得 $T_1 = S_1$. 相减得 $T_2 = S_2$.

$$4. T^*x = (\xi_1 + \xi_2, i\xi_2 - i\xi_1)$$

$$T_1x = (\xi_1 + \frac{1+i}{2}\xi_2, \frac{1-i}{2}\xi_1)$$

$$T_2x = (\frac{i+1}{2}\xi_2, \frac{1-i}{2}\xi_1 - \xi_2)$$

5. (a) 对某个 $x \in H$, $Tx \neq 0$. 因此.

$$0 < \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^2x, x \rangle.$$

即, $T^2 \neq 0$. 同理可证 $n = 4, 8, 16 \dots$, 时 $T^n \neq 0$.

(b) $T^n = 0$ 蕴涵对于每个 $p > n$, $T^p = T^{p-n}(T^n) = 0$ 这与 $p = 2^k > n$, $T^p \neq 0$ 矛盾.

6. 从 $\overline{U} U = U^{-1}U = I$ 中得证.

7. §3. 1中的公式(10)及(11)蕴涵 T 保持内积不变. 因此对所有 x, y .

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, y \rangle - \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, T^*Ty \rangle \\ &= \langle x, (I - T^*T)y \rangle \end{aligned}$$

因而对所有 y . $(I - T^*T)y = 0$. 即 $T^*T = I$.

8. 由定理2.6-9. $R(T) = Y \subset H$ 是一子空间, 对于 $y \in \overline{Y}$, 存在一序列 $(y_n) \subset Y$, 使 $y_n \rightarrow y$. 设 $y_n = Tx_n$, 则 (x_n) 是Cauchy序列 (因为等距), 由 H 是完备的. 存在 $x \in H$, 使 $x_n \rightarrow x$. 所以 $\|Tx - y\| = \|(Tx - Tx_n) + (Tx_n - y)\|$
 $\leq \|T\| \|x - x_n\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0$

即 $y = Tx \in Y$. 根据定理1.4-7(b), Y 是闭的. 如果 $Y = H$, 则 T 是酉算子.

9. 根据定理2.6-9, $R(T)$ 是向量空间且, $\dim R(T) \leq \dim X$. 由于 T 的等距性. T 将 X 的直交基映成 $R(T)$ 中一直交集, 因此 $\dim R(T) \geq \dim X$ 合起来, $\dim R(T) = \dim X$. 且 $R(T) = X$. 即 T 是酉算子.

$$10. S^* = (UTU^*)^* = U^{**}T^*U^* = UTU^* = S$$

11. 这从

$$\begin{aligned} TT^* &= (T_1 + iT_2)(T_1 - iT_2) \\ &= T_1^2 + T_2^2 + i(T_2T_1 - T_1T_2) \\ T^*T &= (T_1 - iT_2)(T_1 + iT_2) \\ &= T_1^2 + T_2^2 - i(T_2T_1 - T_1T_2) \end{aligned}$$

或从等式

$$\begin{aligned} 4iT_1T_2 &= T^2 - T^{*2} + (T^*T - TT^*) \\ 4iT_2T_1 &= T^2 - T^{*2} - (T^*T - TT^*) \end{aligned}$$

立即得证.

$$12. \|TT^* - T^*T\| \leq \|TT^* - T_n T_n^*\| + \|T_n T_n^* - T_n^* T_n\| + \|T_n^* T - T_n^* T_n\|$$

右边第二项等于零. 根据§ 3.6中习题3, $T_n \rightarrow T$ 蕴涵 $T_n^* \rightarrow T^*$, 所以, 右边的另外两项当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零.

13. $S + T$ 的正规性从假设和下式

$$(S + T)(S + T)^* = SS^* + ST^* + TS^* + TT^*$$

$$(S + T)^*(S + T) = S^*S + T^*S + S^*T + T^*T$$

可证得.

ST 的正规性从

$$\begin{aligned} (ST)(ST)^* &= STT^*S^* = ST^*TS^* = T^*SS^*T \\ &= T^*S^*ST = (ST)^*ST \end{aligned}$$

可以看出.

14. 根据定理3.6-3(b).

$$\begin{aligned} \langle T^*x, T^*x \rangle &= \langle Tx, Tx \rangle \iff \langle T^*Tx, x \rangle \\ &= \langle TT^*x, x \rangle \iff \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle \\ &= 0 \iff T^*T = TT^*. \end{aligned}$$

由 $\|T^*x\| = \|Tx\|$, $\|T^*Tx\| = \|T^2x\|$. 根据 § 3.6 中的 (6e),

$$\|T^2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T^2x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tx\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

习 题 4.1

1. 易验证“ \subset ”满足定义4.1-1中的 (PO1) 至 (PO3)

2. 因为 X 中存在不可比元素, 所以 X 不是全序集. X 中也没有极大元.

3. 直接验证 “ \leq ” 满足 (PO1) 至 (PO3), 且存在不可比元素.

4. (a) 极大元是3和8; (b) M 中的每个元均是极大元.

5. 设半序集 A 所含元素的个数为 n . 当 $n=1$ 时, A 有一个极大元. 假设 $n=K$ 时 A 至少有一个极大元. 当 $n=K+1$ 时, 令 $A = A_k \cup \{a\}$. 这里 a 是 A 中任一元素. $A_k = A - \{a\}$ 是含 K 个元素的半序集. 由假设 A_k 至少有一极大元 a_k , 则 a 与 a_k 之间可能有以下三种情况: 或 a 与 a_k 不可比, 或 $a \leq a_k$, 或 $a_k \leq a$. 若 a 与 a_k 不可比, 那么 a_k 仍是一极大元. 若 $a \leq a_k$, a_k 也是极大元. 若 $a_k \leq a$, a 就是一极大元. 总而言之, 当 $n = k+1$ 时, A 至少有一个极大元.

6. 设存在 a 与 c , 使得对于所有 $x \in M$, 有 $a \leq x$ 且 $c \leq x$. 于是, $a \leq c$ 且 $c \leq a$. 根据 (PO2). $c = a$. 第二部分证明与此类似.

7. A 的上界是: 12, 24, 36,

A 的下界是: 1, 2.

8. (a) 设 x_1 和 x_2 均是 A 的 $g.l.b$. 于是, $x_1 \leq x_2, x_2 \leq x_1$, 由 (PO2) 得 $x_1 = x_2$.

(b). $g.l.b\{A, B\} = A \cap B, l.u.b\{A, B\} = A \cup B$.

10. $M = \{2, 3, 4, 8\}$ 的极小元是 2, 3.

习 题 4.2

4. $P(\theta) = P(0x) = 0P(x) = 0$.

$$0 = P(\theta) = P(-x + x) \leq P(-x) + P(x)$$

于是, $-P(x) \leq P(-x)$

5. 对于 $x, y \in M, 0 \leq \alpha \leq 1$, 则

$$\begin{aligned}
P(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\leq P(\alpha x) + P((1 - \alpha)y) \\
&= \alpha P(x) + (1 - \alpha)P(y) \\
&\leq \alpha r + (1 - \alpha)r \\
&= r.
\end{aligned}$$

即. $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$. 从而证得 M 是凸集.

6. 对于每个 $x_0 \in X$, $x \in X$, 由

$$\begin{aligned}
P(x) - P(x_0) &\leq P(x - x_0) \\
P(x_0) - P(x) &\leq P(x_0 - x)
\end{aligned}$$

而当 $x \rightarrow x_0$ 时, 有 $(x - x_0) \rightarrow \theta$, 故由题设知.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |P(x) - P(x_0)| = 0.$$

因此, P 在每个 $x_0 \in X$ 是连续的.

7. 对于任意 $x, y \in X$, $\alpha \geq 0$, 有

$$P_i(x + y) \leq P_i(x) + P_i(y). \quad P_i(\alpha x) = \alpha P_i(x)$$

$i = 1, 2$. 所以,

$$\begin{aligned}
P(x + y) &= C_1 P_1(x + y) + C_2 P_2(x + y) \\
&\leq C_1 [P_1(x) + P_1(y)] + C_2 [P_2(x) + P_2(y)] \\
&= [C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x)] + [C_1 P_1(y) + C_2 P_2(y)] \\
&= P(x) + P(y) \\
P(\alpha x) &= C_1 P_1(\alpha x) + C_2 P_2(\alpha x) \\
&= C_1 \alpha P_1(x) + C_2 \alpha P_2(x) \\
&= \alpha [C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x)] \\
&= \alpha P(x).
\end{aligned}$$

8. 对于满足 $\|x\| \leq r$ 的每个 $x \neq \theta$ 存在一个 $n \in N$. 使得

$\|nx\| = n\|a\| > r$. 因此, $P(nx) \geq 0$. 由(1)有. $P(nx) \leq nP(x)$. 于是, $P(x) \geq 0$.

对于 $x = \theta$, $P(\theta) \leq P(\theta) + P(\theta)$. 从而, $P(\theta) \geq 0$.

9. 对于 $x = \alpha x_0, y = \beta x_0$. 有

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f[(\alpha+\beta)x_0] = (\alpha+\beta)P(x_0) \\ &= \alpha P(x_0) + \beta P(x_0) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

$$f(rx) = f(r\alpha x_0) = r\alpha P(x_0) = rf(x)$$

这里 $r \in R$ 是任意的. 所以, f 在 Z 上是线性的. 下面证 $f(x) \leq P(x)$. $x \in Z$.

若 $\alpha \geq 0$, 则, $f(x) = \alpha P(x_0) = P(x)$

若 $\alpha < 0$. 由习题 4.

$$f(x) = \alpha P(x_0) \leq -\alpha P(-x_0) = P(\alpha x_0) = p(x).$$

10. 对习题 9 中的 f , 利用定理 4.2-2, 得到一 X 上的线性泛函 \tilde{f} 且满足 $\tilde{f}(x) \leq p(x)$.

由 $-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq P(-x)$ 推得 $-P(-x) \leq \tilde{f}(x)$.

习 题 4.3

1. $P(\theta) = P(0x) = 0p(x) = 0$. 这蕴涵

$$0 = P(\theta) = P(x + (-x)) \leq p(x) + p((-1)x) = 2p(x)$$

2. $P(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + P(y)$.

于是, $P(x) - P(y) \leq P(x - y)$

同理, $P(y) - P(x) \leq P(y - x) = P(-1(x - y)) = P(x - y)$

因此, $|P(x) - P(y)| \leq P(x - y)$.

3. 由于 f_1 是线性的,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(ix) &= \widetilde{f}_1(ix) - i\widetilde{f}(-x) \\ &= \widetilde{f}_1(ix) + i\widetilde{f}_1(x) \\ &= i[\widetilde{f}_1(x) - i\widetilde{f}_1(ix)] \\ &= i\widetilde{f}(x).\end{aligned}$$

4. 在 $Z = \{x | x = \alpha x_0\}$ 上通过

$$f(\alpha x_0) = \alpha P(x_0)$$

定义一个线性泛函 f . 则, $f(x_0) = P(x_0)$.

$|f(\alpha x_0)| = P(\alpha x_0)$. 利用定理 4.3-1, f 有一从 Z 到 X 的延拓 \widetilde{f} 且满足 $|\widetilde{f}(x)| \leq P(x)$.

5. 略.

6. f 从 R^2 到 R^3 的所有线性延拓 \widetilde{f} 为

$$\widetilde{f}(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 \quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

其范数为 $\|\widetilde{f}\| = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}$ (α_3 为任意实数) 当且仅

当 $\alpha_3 = 0$ 时, $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

7. 由 Riesz 定理 3.5-1, 对于 $x_0 \neq \theta$, 则存在有界线性泛函 $\widetilde{f}(x) = \langle x, x_0 \rangle / \|x_0\|$.

8. 因为 $X \neq \{\theta\}$, 必存在 $x_1 \in X$, $x_1 \neq \theta$, 由定理 4.3-3, X 上存在一有界线性泛函 \widetilde{f} , 使得, $\|\widetilde{f}\| = 1$. $\widetilde{f}(x_1) = \|x_1\|$. 因此, $X^* \neq \{0\}$.

9. 设 Y 是 X 的可数稠密子集. 若 $(X - Z) \cap Y = \emptyset$. 则

$Y \subset Z$, Z 是 X 的稠密集. 由定理 2.7-12, 得 f 到 $\overline{Z} = X$ 上有界线性延拓 \tilde{f} , $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$. 若 $(X - Z) \cap Y \neq \emptyset$, 存在 $y_1 \in (X - Z) \cap Y$. 令,

$Z_1 = \text{Span}(Z \cup \{y_1\})$. $g_1(z + \alpha y_1) = f(z) + \alpha c, z \in Z$ 这里 c 是定理 4.2-2 证明中 (c) 部分所确定的常数 c . 于是 g_1 是 f 到 Z_1 上的一个线性延拓, 且满足, $g_1(x) \leq P(x) = \|f\|_Z \|x\|$, 由此, $-g_1(x) = g_1(-x) \leq P(-x) = P(x) = \|f\|_Z \|x\|$. 所以, $|g_1(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|$. 故 g_1 是 f 到 Z_1 上的一个有界线性延拓. 依此类推, 至多经可数多步, f 可有界线性地延拓到 X 的一个稠密子集上. 由定理 2.7-12 得 f 到 X 上的有界线性延拓 \tilde{f} , 且 $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$.

10. 若 $x_0 \neq \theta$, 则由定理 4.3-3. 存在一个 $\tilde{f} \in X^*$, 使 $\|\tilde{f}\| = 1$. $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\| \neq 0$, 这与题设, 任意 $f \in X^*$, $f(x_0) = 0$ 矛盾. 于是 $x_0 = \theta$.

11. 将 $x - y$ 视为习题 10 中的 x_0 . 立即得证.

12. 设 $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$. $\alpha_i = \xi_i^{(0)} / \|x_0\|$, 于是, $\tilde{f}(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$. $\|\tilde{f}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = 1$, $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.

13. 由定理 4.3-3, 存在 \tilde{f} , $\|\tilde{f}\| = 1$. $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.

令 $\hat{f} = \frac{1}{\|x_0\|} \tilde{f}$. 则 $\|\hat{f}\| = \frac{1}{\|x_0\|}$. 且 $\hat{f}(x_0) = \frac{1}{\|x_0\|} \tilde{f}(x_0) = 1$.

14. 由定理 4.3-3, 存在一个 $\tilde{f} \in X^*$, 使得 $\|\tilde{f}\| = 1$, $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$. 令 $H_0 = \{x \mid \tilde{f}(x) = r\}$. 则 H_0 是一超平面. $\{x \mid$

$\tilde{f}(x) \leq r$ 是一半空间. 对于任意 $x \in \tilde{B}(\theta, r)$, $\|x\| \leq r$. 因此.

$$\tilde{f}(x) \leq \|\tilde{f}\| \|x\| \leq r.$$

即 $\tilde{B}(\theta, r) \subset \{x \mid \tilde{f}(x) \leq r\}$. 且 $x_0 \in H_0$.

15. 由定理 4.3-3. 若 $\|x_0\| > c$. 则存在 $\tilde{f} \in X^*$ 使 $\|\tilde{f}\| = 1$, $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\| > c$. 与对所有范数为 1 的 $f \in X^*$, $|f(x_0)| \leq c$ 矛盾. 从而 $\|x_0\| \leq c$.

习 题 4.4

$$1. f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = g(T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2))$$

$$= g(\alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2)$$

$$= \alpha_1 g(T x_1) + \alpha_2 g(T x_2)$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

2. O^* 是 Y^* 上的零算子. I^* 是 $Y^* = X^*$ 上的恒等算子.

$$3. ((S+T)^* g)(x) = g((S+T)x) = g(Sx) + g(Tx)$$

$$= (S^* g)(x) + (T^* g)(x)$$

$$= ((S^* + T^*) g)(x) \text{ 对所有 } x \in X,$$

$$g \in Y^*$$

因此, $(S+T)^* g = (S^* + T^*) g$ 对每个 $g \in Y^*$

于是, $(S+T)^* = S^* + T^*$

4. 我们得到, 对于任意 $x \in X$, 每个 $g \in Y^*$

$$((\alpha T)^* g)(x) = g((\alpha T)x) = g(\alpha T x)$$

$$= \alpha g(T x) = \alpha (T^* g)(x)$$

因此, $(\alpha T)^* = \alpha T^*$.

$$\begin{aligned} 5. \quad ((ST)^*g)(x) &= g(STx) = (S^*g)(Tx) \\ &= (T^*(S^*g))(x) \end{aligned}$$

从而, $(ST)^* = T^*S^*$.

$$6. \quad \text{由(11), 当 } n=2 \text{ 时, } (T^2)^* = (T^*)^2.$$

若当 $n=k$ 时, $(T^k)^* = (T^*)^k$, 则,

$$\begin{aligned} (T^{k+1})^* &= (T^k \cdot T)^* = T^*(T^k)^* = T^*(T^*)^k = \\ &= (T^*)^{k+1} \end{aligned}$$

从而, 对于任何自然数 n , $(T^n)^* = (T^*)^n$ 成立.

7. 设 S 和 T 的表示矩阵分别为 A 和 B , 则有, $(AB)^T = B^T A^T$.

$$8. \quad \text{由 } (T^{-1})^*: X^* \rightarrow Y^* \text{ 存在, 和 } T^{-1}T = I_X$$

推得, $(T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^* = I_{X^*}$

由, $TT^{-1} = I_Y$ 得,

$$(a) \quad (T^{-1})^*T^* = I_{Y^*}$$

因此, $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ 是双射, $(T^*)^{-1}$ 存在, 且由 (a) 得到,

$$(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*(T^*)^{-1} = (T^*)^{-1}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad g \in M^a &\iff (T^*g)(x) = g(Tx) = 0 \text{ 对所有 } x \in X, \\ &\iff T^*g = 0 \iff g \in N(T^*) \end{aligned}$$

10. 对于任意 $y \in R(T)$, 存在 $x \in X$, 使得 $y = Tx$. 令 $g \in N(T^*)$. 则, $g(y) = g(Tx) = (T^*g)(x) = 0$. 于是 $y \in {}^a N(T^*)$. 因为 $y \in R(T)$ 是任意的. 因此, $R(T) \subset {}^a N(T^*)$. $Tx = y$ 有解 x 的必要条件是对于所有 $g \in N(T^*)$ 有 $g(y) = 0$.

习 题 4.5

$$1. \quad f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n, \quad x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

$$g_x(f) = \alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_n \xi_n, \quad (\xi_j \text{ 是固定的, } j = 1, 2, \cdots, n)$$

2. 由于 Y 是闭真子空间, x_0 可直交分解为 $x_0 = y_0 + z_0$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Y^\perp$. 因为 $x_0 \in X - Y$ 所以, $z_0 \neq \theta$, 令 $\tilde{f}(x) = \langle x, z_0 \rangle / \|z_0\|$, 于是, 对于所有 $y \in Y$, $\tilde{f}(y) = 0$. 由定理 3.2-1 和定理 3.2-5 知, $\delta = \|x_0 - y_0\| = \|z_0\|$. 由定理 3.5-1, $\|\tilde{f}\| = 1$.

3. 设 $h \in X^{***}$. 由于 X 是自反的, 存在标准映射 $J: X \rightarrow X^{**}$ 是双射. 所以, 对于每个 $g \in X^{**}$, 存在一个 $x \in X$, 使得 $g = Jx$. 于是通过 $h(g) = h(Jx) = f(x)$ 定义 X 上一有界线性泛函 f . 且, $J_1 f = h$, 这里 $J_1: X^* \rightarrow X^{***}$ 是通过 $h(g) = g(f) = f(x)$ 定义的标准映射. (f 是固定的而 x 是任意的). 因此, J_1 是满射. 故 X^* 是自反的.

4. (a) 若 X 是自反的, 由习题 3 则 X^* 是自反的.

(b) 设 X^* 是自反的. 由 (a) 则 X^{**} 是自反的. 根据定理 4.5-4, X^{**} 是完备的. 由于 X 是完备的且与 X^{**} 的一子空间同构 (参看 4.5-2). 因此那个子空间是完备的. 利用定理 1.4-8, 也是闭的. 由已给的提示和定理 4.5-2, X 是自反的.

5. 令 $h = \tilde{f} / \delta$. 由于 $\|\tilde{f}\| = 1$. 所以, $\|h\| = 1/\delta$. 对于所有 $y \in Y$, 因为 $\tilde{f}(y) = 0$, 于是 $h(y) = 0$. 且 $h(x_0) = \tilde{f}(x_0) / \delta = \delta / \delta = 1$.

6. 令 $x_0 \in Y_2$, $x_0 \notin Y_1$. 则 $\delta = \inf_{y \in Y_1} \|y - x_0\| > 0$. 则存在 $\tilde{g} \in X^*$ 使得, $\tilde{g}|_{Y_1} = 0$, $\tilde{g}(x_0) = 1$ (参看习题 5), 因此, $\tilde{g} \in Y_1^\circ$, 但, $\tilde{g} \notin Y_2^\circ$.

7. 若 $Y \neq X$, 存在一个 $x_0 \in X - Y$. 且, $\delta = \inf_{y \in Y} \|y - x_0\|$

> 0 . 由于 Y 是闭的. 由引理 4.5-7, 存在 $\tilde{f} \in X^*$, $\tilde{f}|_Y = 0$, 而 $\tilde{f}(x_0) = \delta > 0$. 这与假定矛盾.

8. 若 $x_0 \in A$, 则存在序列 $(x_n) \subset \text{Span } M$, 使得 $x_n \rightarrow x_0$. 对于满足 $f|_M = 0$ 的每个 $f \in X^*$ 有 $f(x_n) = 0$. (因为 f 是线性的). 由于 f 是连续的, 则 $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. 反过来, 用

反证法. 若 $x_0 \notin A$. 根据引理 4.5-7, 存在 $\tilde{f} \in X^*$ 使得 $\tilde{f}|_A = 0$. $\tilde{f}(x_0) \neq 0$. 这与题设矛盾.

9. 若 M 不是完全的. 则 $Y = \overline{\text{Span } M} \neq X$, 存在 $x_0 \in X - Y$, 由引理 4.5-7, 存在 $\tilde{f} \in X^*$ 使得 $\tilde{f}|_Y = 0$, 因而在 M 上也处处为零. 但 $\tilde{f}(x_0) \neq 0$ 这与题设矛盾. 从而 M 是完全的. 若 M 是完全的, 则 $X = Y$. 显然满足习题中的条件.

10. 设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 X 中线性无关集. 根据习题 5 (是引理 4.5-7 的一个直接结果), X 上存在 n 个有界线性泛函 f_1, \dots, f_n , 使得,

$$f_i(x_i) = 1, f_i(x_k) = 0 \quad (k \neq i).$$

下面证明 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 是 X^* 中一线性无关集. 若

$$\sum_{i=1}^n r_i f_i = 0$$

则对于所有 $x \in X$, 有

$$\sum_{i=1}^n r_i f_i(x) = 0.$$

分别取 $x = x_1, \dots, x_n$, 得 $r_i = 0$. 即证得集 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 在 X^* 线性无关.

习 题 4.6

1. (a) 在 R 中全体有理数构成的集合是属于瘠集.
(b) 在其自身中也是瘠集.
2. (a) 整数的全体构成的集合在 R 中是属于瘠集.
(b) 因为整数全体构成一完备度量空间, 根据定理 4.6-2, 在其自身中是非瘠的 (第二范畴的)
3. 因为离散度量空间 X 中的每个子集均是开的. 所以它没有稀疏集.
4. 具有有理坐标的所有点的集合是 R^2 中一个瘠稠密子集.
5. $(\bar{M})^c$ 的闭包等于 X 全体当且仅当对于每个 $x \in \bar{M}$ 均是 $(\bar{M})^c$ 的聚点, 即 \bar{M} 没有内点. 因此, M 在 X 中是稀疏的当且仅当 $(\bar{M})^c$ 在 X 中稠密.
6. 用反证法证明. 若 M^c 是瘠集, 则 $X = M \cup M^c$ 是瘠集. 这与定理 4.6-2 矛盾. 因此, M^c 是非瘠的.
7. 若对于所有 $x \in X$, $\sup \|T_n x\| < +\infty$. 根据一致有界性定理 4.6-3, 则 $(\|T_n\|)$ 有界, 即存在常数 c , 使得

$$\|T_n\| \leq c. \quad (n=1, 2, \dots)$$
 从而, $\sup_n \|T_n\| \leq c$. 这与 $\sup_n \|T_n\| = \infty$ 矛盾. 因此, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $\sup_n \|T_n x_0\| = +\infty$.
8. $X = \{x \mid x = (\xi_j) j \geq J \in N \text{ 时 } \xi_j = 0\} \subset l^\infty$ $f_n(x) = n\xi_n$. 对于每个 $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 但 $\|f_n\| = n$, 即 $(\|f_n\|)$ 无界. 其原因是 X 为非完备的度量空间.

9. 显然, $\|T_n x\| \leq \|x\|$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k|^2\right) = 0. \quad \|T_n\| \leq 1. \quad \text{取 } x_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

则 $\|x_0\| = 1$, $\|T_n x_0\| = 1$. $\|T_n\| \geq \|T_n x_0\| = 1$, 于是, $\|T_n\| = 1$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 1$

10. 因为 c_0 是 l^∞ 的闭子空间, 所以 c_0 是完备的. 在 c_0 上定义有界线性泛函 f_n 为:

$$f_n(x) = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由 § 2.8 习题 18, 我们有: $\|f_n\| = |\eta_1| + \dots + |\eta_n|$. 对于每个 $x \in c_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$ 存在. 因此, 根据定理 4.6-3,

$(\|f_n\|)$ 是有界的. 即, $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| < +\infty$.

11. 因为对于每个 $x \in X$, $(T_n x)$ 均是 Y 中的 Cauchy 序列, 由 § 1.4 习题 3, 每个 Cauchy 序列均是有界的, 利用定理 4.6-3 证得 $(\|T_n\|)$ 是有界的.

12. 因为 Y 是完备的, 有 $T_n x \rightarrow y \in Y$, 定义, $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = y$. 由 T_n 是线性的. T 是线性的. 由于 $\|T_n\| \leq c$ (根据习题 11), 我们有,

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq c \|x\|.$$

利用范数的连续性, 得,

$$\|Tx\| \leq c \|x\|.$$

13. 令 $g_n(f) = f(x_n)$, 则对于每个 $f \in X^*$, $(g_n(f))$ 是有界的, 根据定理 4.6-3, $(\|g_n\|)$ 是有界的. 由定理 4.5-1 知, $\|x_n\| = \|g_n\|$, 因此 $(\|x_n\|)$ 是有界的.

14. 因为 (c) 蕴涵 (b) (参看习题 13). 根据定理 4.6-3,

(b) 蕴涵(a). 由于,

$$|g(T_n x)| \leq \|g\| \|T_n\| \|x\|$$

于是, (a) 蕴涵(c). 因此, (a)、(b)、(c) 三个命题等价.

15. $x(t)$ 的 Fourier 级数为.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \cdots)$$

当 $t=0$ 时, 此级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

习 题 4.7

1. 对于固定的 $t_0 \in [a, b]$, 在 $C[a, b]$ 上定义 有界线性泛函 δ_{t_0} 为.

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

由 $x_n \xrightarrow{w} x$ 则 $\delta_{t_0}(x_n) \rightarrow \delta_{t_0}(x)$. 即 $x_n(t_0) \rightarrow x(t_0)$. 因此, (x_n) 在 $[a, b]$ 上是逐点收敛的.

2. 任意取 $h \in Y^*$, 定义 f 为

$$f(x) = h(Tx) \quad x \in X.$$

显然 f 是线性的. 由 $h \in Y^*$ 和 T 是有界的. 有

$$|f(x)| = |h(Tx)| \leq \|h\| \|Tx\| \leq \|h\| \|T\| \|x\|$$

因此, $f \in X^*$, 因为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 蕴涵 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ 即, $h(Tx_n) \rightarrow h(Tx)$, 而 $h \in Y^*$ 是任意的, 这就意味着 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

3. 因为任意 $f \in X^*$ 是线性的. 所以,

$$\begin{aligned} f(x_n + y_n) &= f(x_n) + f(y_n) \longrightarrow f(x) + f(y) \\ &= f(x + y). \end{aligned}$$

$$f(ax_n) = af(x_n) \longrightarrow af(x) = f(ax).$$

4. 用反证法证. 若 $x_0 \notin \bar{Y}$. 则由引理4.5-7, 存在一个 $\tilde{f} \in X^*$, 使得对于所有 $y \in \bar{Y}$, $\tilde{f}(y) = 0$ $\tilde{f}(x_0) = \delta = \inf_{y \in \bar{Y}} \|y - x_0\| > 0$. 显然 $(\tilde{f}(x_n))$ 不收敛于 $\tilde{f}(x_0)$. 这与 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 矛盾. 因此, $x_0 \in \bar{Y}$.

5. 令 $Y = \text{Span}(x_n)$, 根据习题4. $x_0 \in \bar{Y}$ 由定理1.4-7 (a), 存在 Y 中的序列 (y_m) . 使得, $y_m \rightarrow x_0$. 因为 $y_m \in Y = \text{Span}(x_n)$, 即 y_m 是 (x_n) 的元素的线性组合.

6. 利用习题5直接得证.

7. 设 (x_n) 是弱Cauchy序列, 定义 $g_n \in X^{**}$ 为 $g_n(f) = f(x_n)$ (参看§4.5), 因为 $(f(x_n))$ 是Cauchy数列, 所以它有界, 即,

$$|f(x_n)| = |g_n(f)| \leq c,$$

由于 X^* 是完备的, 根据定理4.5-1和4.6-3得 $\|x_n\| = \|g_n\| \leq c$.

8. 用反证法, 若 A 无界, 则 A 包含一无界序列 (x_n) , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$. 于是对于 (x_n) 的每个子序列 (x_{n_i}) , 均有 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i}\| = \infty$. 由习题7, (x_n) 没有弱Cauchy子序列. 这与题设矛盾.

9. 设 (x_n) 是 X 中任意的弱Cauchy序列. 则对于每个 $f \in X^*$, $(f(x_n))$ 均收敛. 对于 $x_n \in X$ 存在 $g_n \in X^{**}$, 使得 $g_n(f) = f(x_n)$. 因此, $(g_n(f))$ 收敛, 即 $g_n(f) \rightarrow g(f)$. 由习题7知 (x_n) 有界且 $\|g_n\| = \|x_n\|$ (参看4.5-1). 于是

$$\|g(f)\| \leq \|g(f) - g_n(f)\| + \|g_n(f)\| \leq \varepsilon + c\|f\| \text{ 取 } \varepsilon =$$

$\|f\|$. ($n > N$), 则有

$$\|g(f)\| \leq (1+c) \|f\|$$

即 f 有界。由定义 $g(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(f)$ 知 g 是线性的。因此, $g \in X^{**}$. 由于 X 是自反的, 则存在 $x \in X$, 使得对于每个 $f \in X^*$, 有

$$g(f) = f(x).$$

从而, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. 即 $x_n \xrightarrow{w} x$. 因为 (x_n) 是 X 中任意弱Cauchy序列. 因此, X 是弱完备的.

习 题 4.8

1. 对于每个 $x \in X$, 有,

$$\|T_n x - T x\| \leq \|T_n - T\| \|x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

即一致算子收敛蕴涵强算子收敛.

2. 对于每个 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} & \|(S_n + T_n)x - (S + T)x\| \\ & \leq \|S_n x - Sx\| + \|T_n x - Tx\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时). 因此, $S_n + T_n$ 强算子收敛于 $S + T$.

3. 在定理4.7-4(a)中, 用 $y_n = T x_n$ 和 $y = T x$ 代替 x_n 和 x . 利用此定理直接证得此命题.

4. 设 $(f_n) \subset X^*$, 且 $f_n \xrightarrow{w} f$. 则对于每个 $g \in X^{**}$, 有 $g(f_n) \rightarrow g(f)$. 对于每个 $x \in X$, 存在 $g_x \in X^{**}$, $f_x(x) = g_x(f_n) \rightarrow g_x(f) = f(x)$. 即 $f_n \xrightarrow{w} f$ 蕴涵 $f_n \xrightarrow{w*} f$.

若 X 是自反的, 对于每个 $g \in X^{**}$, 存在 $x \in X$. 使得 $f(x) = g(f)$. 对于任意 $f \in X^*$ 均成立. 因此, 弱*收敛: $f_n \xrightarrow{w*} f$ 蕴涵:

$$g(f_n) - g(f) = f_n(x) - f(x) \rightarrow 0$$

5. $f_n(x) = \xi_n$, $x = (\xi_n) \in l^1$. 因为 $x \in l^1$. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ 收敛. 我们有 $f_n(x) = \xi_n \rightarrow 0$. ($n \rightarrow \infty$) 即 (f_n) 强算子收敛于 0. 但易证 $\|f_n\| = 1$. 所以 (f_n) 不一致收敛于 0.

6. 设 $T_n \rightarrow T$, 且 $\|x\| = 1$, 则由

$$\|T_n x - T x\| \leq \|T_n - T\| \|x\| = \|T_n - T\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

可得: 对于每个 $\varepsilon > 0$, 总存在 N , 使得对于所有 $n > N$, 和所有范数为 1 的 $x \in X$, 有

$$\|T_n x - T x\| < \varepsilon.$$

反过来. 若习题中的这些条件成立. 则,

$$\|T_n y - T y\| < \varepsilon \quad (n > N, \|y\| = 1)$$

对于任意固定的 $x \neq \theta$, 设 $y = x / \|x\|$, 有

$$\|T_n x - T x\| = \|T_n y - T y\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

因此, 对于所有 $n > N$,

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon.$$

7. 由假设, 对于每个 $x \in X$, $(T_n x)$ 收敛, 因此, 由引理 1.4-2. $(\|T_n x\|)$ 是有界的. 于是 $(\|T_n\|)$ 有界 (参看定理 4.6-3).

8. 显然, 对于闭球 K 存在一个半径足够大的 r , 使得 $K \subset \tilde{B}(\theta, r)$. 由于 $T_n \rightarrow T$, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\|T_n - T\| < \varepsilon / r$$

因此, 对于所有 $x \in K$, 当 $n > N$ 时有,

$$\|T_n x - T x\| \leq \|T_n - T\| \|x\| < \varepsilon.$$

9. 对于 M 中任意序列 (f_n) , 由于 M 有界, 所以 (f_n) 有界, 即 $\|f_n\| \leq r$. 因为 X 是可分的, 则 X 包含一个可数稠密子集 V , 我们可将 V 排成一序列 (x_m) . 由于

$$\left| f_n(x_m) \right| \|f_n\| \|x_m\| \leq r \|x_m\|$$

因此, 对于固定的 m , $(f_n(x_m))$ 是有界的。于是 (f_n) 有一个子序列 A_1 使其在 x_1 点收敛。且 A_1 有一个子序列 A_2 使其在 x_2 点收敛。依此下去, 我们可得到在 V 的每点均收敛的子序列 (f_{n_k}) 因为 V 在 X 中稠密, 并且 X 是完备的, 根据推论4.8-7. (f_{n_k}) 弱*收敛于 X 上一有界线性泛函。

习 题 4.9

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

2. 将 C_1 法用于序列 $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$ 得序列 $(1, \frac{1}{2},$

$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \cdots)$ C_1 -极限为 $\frac{1}{2}$.

将 C_1 法用于序列 $(1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{8}, -\frac{3}{16}, -\frac{4}{32}, \dots)$

得序列 $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ 其 C_1 -极限是0.

$$3. \quad \xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = 2\eta_2 - \eta_1, \quad \xi_3 = 3\eta_3 - 2\eta_2, \dots$$

$$\xi_n = n\eta_n - (n-1)\eta_{n-1} \quad \text{当} (\xi_n) = (1, 0, 0, \dots) \text{时}$$

$$(\eta_n) = (1/n)$$

4. 例如, 对于序列 $(1, -1, 3, -3, 5, -5, \dots)$ 有 C_1 -变换序列 $(1, 0, 1, 0, \dots)$ 没有极限.

5. 将 H_1 法用于序列 $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots)$ 得序列: $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, 将 H_2 法用于 $(1, -3, 5, -7$

$\dots)$ 即将 H_1 法用于 $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ 得 $(1, 0, \frac{1}{3}, 0,$

$\frac{1}{5}, 0, \dots)$

6. 众所周知,

$$S_n = \frac{1}{1-Z} - \frac{Z^{n+1}}{1-Z}$$

因此,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k = \frac{1}{1-z} - \frac{z(1-z^{n+1})}{(n+1)(1-z)^2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{1-z}$$

7. 关于 K 用数学归纳法证明:

当 $K = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(1)} &= \sigma_0^{(0)} + \sigma_1^{(0)} + \cdots + \sigma_n^{(0)} \\ &= \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = \sum_{v=0}^n C_{n-v}^0 \xi_v \text{ 成立.}\end{aligned}$$

$$\text{假如 } k = j \text{ 时, } \sigma_n^{(j)} = \sum_{v=0}^n C_{n+j-1-v}^j \xi_v \text{ 成立.}$$

则当 $K = j+1$ 时,

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(j+1)} &= \sigma_0^{(j)} + \sigma_1^{(j)} + \cdots + \sigma_n^{(j)} \\ &= C_{j-1}^j \xi_0 + \left(\sum_{v=0}^1 C_{j-1-v}^j \xi_v \right) + \cdots + \left(\sum_{v=0}^n C_{n+j-1-v}^j \xi_v \right) \\ &= \left(\sum_{m=0}^n C_{m+j-1}^j \right) \xi_0 + \left(\sum_{m=0}^n C_{m+j-2}^j \right) \xi_1 + \cdots + C_{j-1}^j \xi_n \\ &= C_{n+j}^j \xi_0 + C_{n+j-1}^j \xi_1 + \cdots + C_{n+j-n}^j \xi_n \\ &= \sum_{v=0}^n C_{n+j-v}^j \xi_v \text{ 成立}\end{aligned}$$

因此, 对于任意正整数 K ,

$$\sigma_n^{(K)} = \sum_{v=0}^n C_{n+K-1-v}^K \xi_v \text{ 均成立.}$$

上面证明过程中, 用到下面组合等式:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + \cdots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$$

这个等式用公式: $C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1} - C_{n+k}^{n+1}$ 可证得.

$$8. \text{ 取 } a_j = \frac{1}{j+1} \text{ 时, } \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$

$$\cdots = 1.2 \text{ 而 } \Delta^n a_0 = \frac{1}{n+1}. \text{ 所以, } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}} =$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots$$

由于两个级数的和相同, 因此,

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots \end{aligned}$$

习 题 4.10

1. 将区间 n 等分, 每个小区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 的长度为 $\frac{b-a}{n} = h$. 在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上以宽度为 h 、高为 $x(t_i^*)$ ($t_i^* = a +$

$(j - \frac{1}{2})h$) 的矩形代替小曲边梯形而得此公式的, 其结点 t_k^*

$= a + (k - \frac{1}{2})h$. $k = 1, 2, \dots, n$, 系数 $\alpha_k = h$.

2. 将 $[a, b]$ n 等分. 每个小区间的长度为 $\frac{b-a}{n}$, 在每个 $[t_i, t_{i+1}]$ 上用上、下底分别为 $x(t_i)$ 和 $x(t_{i+1})$ 的梯形面积代替小曲边梯形面积而得此近似公式. 即用结点的 x 的线性组合来表示积分的近似值. 其结点为 $t_k = a + kh$.

4. 今考察一段如图

$$\text{设 } e_n'(t) = \int_{t_1}^t x^*(t) dt - \int_{t_1}^t x(t) dt$$

$$= \frac{t-t_i}{2} [x(t_i) + x(t)] -$$

$$\int_{t_i}^t x(t) dt$$

对 t 微分二次得

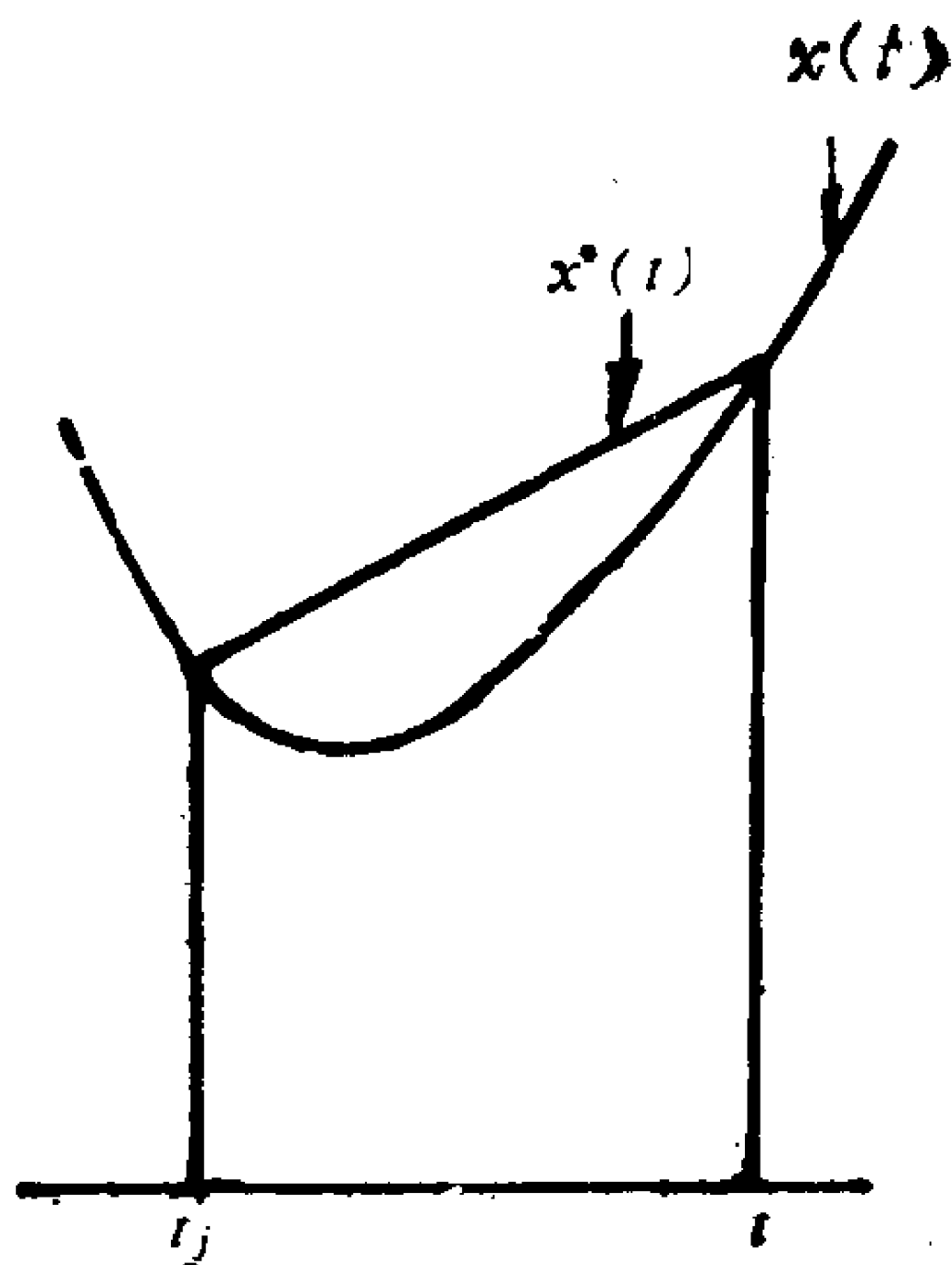
$$\frac{1}{2}(t-t_i)m_2^* \leq$$

$$(e_n^i(t))'' \leq \frac{1}{2}(t-t_i)m_2$$

从 t_i 到 t 求二次积分后, 且令 $t = t_i + h$ 代入得:

$$m_2^* \cdot \frac{h^3}{12} \leq e_n^i(t_i + h)$$

$$\leq m_2 \cdot \frac{h^3}{12}$$



$$\text{令 } h = \frac{(b-a)}{n},$$

$$\text{又 } e_n(x) = f_n(x) - f(x) = \int_a^b x^*(t) dt - \int_a^b x(t) dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} e_n^i(t_i + h)$$

$$\text{所以 } K_n m_2^* \leq e_n(x) \leq K_n m_2 \quad \text{且 } K_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

7. 用拉格朗日补插公式:

$$\begin{aligned}
P_3(t) = & \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)} x_0 \\
& + \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)} x_1 \\
& + \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)} x_2 \\
& + \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} x_3
\end{aligned}$$

在 $[t_0, t_3]$ 上近似 $x(t)$. 则直接计算 $\int_{t_0}^{t_3} P_3(t) dt$.

$$\text{有 } \int_{t_0}^{t_3} x(t) dt \approx \int_{t_0}^{t_3} P_3(t) dt = \frac{3h}{8} (x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3)$$

$$\begin{aligned}
8. \quad |r(x)| &= \left| \int_{-h}^h x(t) dt - 2hx(0) \right| \\
&= \left| \int_{-h}^h [x(t) - x(0)] dt \right| \\
&= \left| \int_{-h}^h \left[\int_0^t x'(\tau) d\tau \right] dt \right| \\
&\leq P(x) \int_{-h}^h \left| \int_0^t d\tau \right| dt \\
&= P(x) h^2.
\end{aligned}$$

$$9. \quad \int_{-h}^h x(t) dt = 2h \left[x(0) + x''(0) \frac{1}{3!} h^2 + x^{(4)}(0) \frac{h^4}{5!} + \dots \right] \quad (1)$$

$$\approx 2h [\alpha_{-1} x(-h) + \alpha_0 x(0) + \alpha_1 x(h)] \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{由 } x(\pm h) = x(0) \pm x'(0)h + \frac{x''(0)}{2!}h^2 \pm \frac{x'''(0)}{3!}h^3 \\ + \frac{x^{(4)}(0)}{4!}h^4 \pm \cdots \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)代入(2)，比较(1)、(2)系数，得

$$(*) \begin{cases} \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ -\alpha_{-1} + \alpha_1 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_{-1} + \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{于是, } \alpha_{-1} = \alpha_1 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

$$(4) \int_{-h}^h x(t) dt \approx \frac{h}{3} [x(-h) + 4x(0) + x(h)]$$

当用三次多项式近似表达 $\alpha_{-1}x(-h) + \alpha_0x(0) + \alpha_1x(h)$ 时，因为(1)中不含 $x'''(0)$ ，所以 h^3 的系数为0。而前三个方程与上述方程相同。比较 h^3 系数时得： $\frac{1}{6}\alpha_{-1} - \frac{1}{6}\alpha_1 = 0$ 。因

此，方程组

$$\begin{cases} \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ -\alpha_{-1} + \alpha_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_{-1} + \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}\alpha_{-1} - \frac{1}{6}\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

与(*)同解. 即此时. $\alpha_1 = \alpha_1 = \frac{1}{6}$, $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

有与(4)一样的表示.

10. 用分部积分直接可证得系数有界.

习 题 4.11

1. $Tx = \xi_1$, $x = (\xi_1, \xi_2)$. T 将 R^2 中的开球映射成 R 中的开区间. 开区间是 R 中的开集. 因此, T 是开映射. 映射 $T_1: (\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$ 将开球映成开区间. 但开区间在 R^2 中不是开集. 所以, T_1 不是开映射.

2. 例如, 习题1中的 T 将闭集 $\{(\xi_1, \xi_2) | \xi_1 \xi_2 = 1\} \subset R^2$ 映成 $R - \{0\}$, 而 $R - \{0\}$ 在 R 中不是闭的.

3. $\alpha A = \{\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha\}$.

$$A + W = \{1 + W, 2 + W, 3 + W, 4 + W\}$$

$$A + A = \{2, 3, 4, \dots, 8\}.$$

4. 若有 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = 1$, 则: $\sum_{k=2}^{\infty} \|x_k\| = 1 - \|x_1\| > 1 - \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}.$$

这与 $\sum_{k=2}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$ 矛盾.

5. T 是线性的:

$$T(\alpha x + \beta y) = (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1), \frac{1}{2}(\alpha \xi_2 + \beta \eta_2), \dots$$

$$= \alpha \left(\xi_1, \frac{1}{2} \xi_2, \frac{1}{3} \xi_3 \cdots \right) + \beta \left(\eta_1, \frac{1}{2} \eta_2, \frac{1}{3} \eta_3 \cdots \right)$$

$$= \alpha T x + \beta T y. \quad \|T x\| = \sup_j \left| \frac{1}{j} \xi_j \right|$$

$$\leq \sup_j |\xi_j| = \|x\|.$$

即 $\|T\| \leq 1$. 因此 T 是有界的. 因为 $T^{-1}y = (\eta_1, 2\eta_2, \cdots)$

取 $y_k = (K^{-1}\delta_{kj})$, 则 $x_k = T^{-1}y_k = (\delta_{kj})$

$1 = \|x_k\| = \|T^{-1}y_k\| = K \|y_k\|$. 于是, $\|T^{-1}\| \geq K$.

$K = 1, 2, \cdots$, 故 T^{-1} 无界. 这与定理 4.11-3 不矛盾. 因为这里的 X 不是完备的.

6. (a) 若 $R(T)$ 在 Y 中是闭的. 则 $R(T)$ 是完备的. 由定理 4.11-3, T^{-1} 是有界的.

(b) 假定 T^{-1} 是有界的. 对于 $y \in \overline{R(T)} \subset Y$, 存在 $(y_n) \subset R(T)$, 使得 $y_n \rightarrow y$. 且有 $x_n = T^{-1}y_n$, 因为 T^{-1} 是连续的. X 是完备的, 由定理 1.4-9 知 (x_n) 收敛. 即 $x_n \rightarrow x \in X$. 因为 T 是连续的. $y_n = T x_n \rightarrow T x$. 因此 $y = T x \in R(T)$. 由于 $y \in \overline{R(T)}$ 是任意的, 从而证得 $R(T)$ 是闭的.

7. 因为 X 和 Y 是 Banach 空间. $T: X \rightarrow Y$ 是双射有界性算子. 由定理 4.11-3. T^{-1} 是有界的. 因为 $1 = \|T T^{-1}\| \leq$

$$\|T\| \|T^{-1}\|. \quad \text{则} \quad \|T^{-1}\| > 0. \quad \|T\| > 0. \quad \text{令} \quad a = \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

$b = \|T\|$. 于是有,

$$a \|x\| \leq \|T x\| \leq b \|x\|.$$

8. 定义线性算子 $T: X_1 \rightarrow X_2$ 为 $x \mapsto x$. 由 $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ 蕴

涵 $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$, 则 T 是连续的. 因此 T 是有界的, 且为双射的. 由定理 4.11-3, T^{-1} 是有界的. 根据习题 7, 于是有

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

9. 定义线性算子 $T: X_2 \rightarrow X_1$, 为 $x \mapsto x$. 则 T 是双射连续的. 由定理 4.11-3, T^{-1} 是有界的, 令 $K = \|T^{-1}\|$, 对于所有 $x \in X$, 有

$$\|x\|_2 \leq K\|x\|_1$$

10. 由 $x \mapsto x$ 所给出的线性算子: $T: X_1 \rightarrow X_2$ 是连续的、双射的. 由定理 4.11-3, T^{-1} 是连续的. 并且一个集 M 在 X_1 中是开的当且仅当在 X_2 中是开集. 已知, $T_1 \supset T_2$. 因此, $T_1 = T_2$.

习 题 4.12

1. 直接可验证满足范数公理 (N₁) 至 (N₄).
2. 只验证两个范数满足三角不等式. 令, $z_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, 2$. 则.

$$\begin{aligned} \|z_1 + z_2\| &= \max\{\|x_1 + x_2\|, \|y_1 + y_2\|\} \\ &\leq \max\{\|x_1\| + \|x_2\|, \|y_1\| + \|y_2\|\} \\ &\leq \max\{\|x_1\|, \|y_1\|\} + \max\{\|x_2\|, \|y_2\|\} \end{aligned}$$

由 § 1.2 中的 Cauchy—Schwarz 不等式直接可得

$$\|z_1 + z_2\|_0 \leq \|z_1\|_0 + \|z_2\|_0$$

3. 因为 T 是线性的. 因此关于线性运算:

$$\begin{aligned} (x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) &= \{x_1 + x_2, T(x_1 + x_2)\} \\ \alpha(x, Tx) &= \{\alpha x, T(\alpha x)\} \end{aligned}$$

是封闭的. 即 $G(T)$ 是 $X \times Y$ 中的一向量子空间.

4. 参看闭图象定理的证明中的第一部分.

5. 由于 T 是线性的, 根据定理2.6-10, T^{-1} 是线性的. 因为 $G(T) \subset X \times Y$ 是闭的, 由 $(x, y) \mapsto (y, x)$ 定义的映射 $X \times Y \rightarrow Y \times X$ 是等距的, 从而 $G(T^{-1}) = \{(Tx, x) | x \in D(T)\} \subset Y \times X$ 是闭的. 即 T^{-1} 是闭线性算子.

6. 设 $x_n \rightarrow x, \tilde{x}_n \rightarrow x, Tx_n \rightarrow y$.

$T\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{y}$. 由定理4.12-3知 $y = Tx = \tilde{y}$.

7. 因为 $T: X \rightarrow Y$ 是线性有界的. 且 $D(T) = X$ 是闭的. 由定理4.12-5(a), T 是闭的. 由于假设 $T^{-1}: Y \rightarrow X$ 存在. 根据习题5, T^{-1} 是闭的. 由于, $D(T^{-1}) = Y$ 是闭的, 利用闭图象定理. T^{-1} 是有界的.

8. (a) 考虑任意 $a \in \overline{A}$. 存在 $a_n \in A$, 使得 $a_n \rightarrow a$. 令 $C_n \in C$ 使 $a_n = TC_n$. 因为 C 是紧的, (C_n) 有收敛的子序列 (C_{n_j}) 即, $C_{n_j} \rightarrow C \in C$. 也有 $TC_{n_j} \rightarrow a$. 根据定理4.12-3 $a = TC \in A$. 故 A 是闭集.

(b) 考虑任意 $b \in \overline{B}$, 存在 $b_n \in B$, 使得 $b_n \rightarrow b$. 令 $k_n = Tb_n$. 因为 K 是紧的, (k_n) 中有收敛的子序列 (k_{n_j}) , 即 $k_{n_j} \rightarrow k \in K$, 也有 $b_{n_j} \rightarrow b$. 由定理4.12-3, $Tb = k \in K = T(B)$ 因此, $b \in B$. 于是证得 B 是闭的.

9. 任意闭子集 $K \subset Y$ 是紧的 (参看 § 2.5 习题 9). 由本节习题 8, K 的原象在 X 中是闭的. 因此, T 是连续的 (参看 § 1.3 习题 14). 即 T 是有界的 (根据定理2.7-10)

10. 由于 $T: X \rightarrow Y$ 是双射线性算子. 所以, T^{-1} 存在. 由 T 是闭线性算子, 利用习题 5, T^{-1} 亦是闭线性算子. 因为 X 是紧的, 根据习题 9, T^{-1} 是有界的.

11. 对于任意 $x \in \overline{N(T)}$, 存在 $x_n \in N(T)$, 使得, $x_n \rightarrow x$. 于是 $Tx_n = \theta \rightarrow \theta$, 因为 T 是闭线性算子, 由定理 4.12-3. 得 $Tx = \theta$. 因此, $x \in N(T)$. 即 $N(T)$ 是 X 的闭子空间.

12. 因为 $T_2 \in B(X, Y)$, X 在其自身中是闭的, 由引理 4.12-5(a), T_2 亦是闭线性算子. 对于任意 $x_n \rightarrow x$, 这里 $x_n, x \in X$. 若 $T_1 x_n \rightarrow y$, $T_2 x_n \rightarrow y_2$, 因为 T_1, T_2 是闭线性算子, 由定理 4.12-3, $T_1 x = y_1$, $T_2 x = y_2$. 于是, $(T_1 + T_2)x_n \rightarrow y_1 + y_2$ 时, 有 $(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x = y_1 + y_2$. 再利用一次定理 4.12-3. 因此, $T_1 + T_2$ 是闭的.

13. 由习题 5 知, T^{-1} 是闭线性算子. 因为 X 是完备的. 根据引理 4.12-5(b), 则, $D(T^{-1}) = R(T)$ 是闭的.

14. 因为部分和

$$x_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

序列 (x_n) 一致收敛于 x , 即在 $C[0, 1]$ 上, $x_n \rightarrow x$, 类似地, $y_n = Tx_n = x_n' = u_1' + \cdots + u_n'$ 也一致收敛. 即在 $C[0, 1]$ 上, $y_n \rightarrow y$. 由例题 4.12-4 知, 微分算子 T 是闭的, 根据定理 4.12-3. $x \in D(T)$, $y = Tx = x'$.

15. (a) 若 T 有闭线性延拓 \tilde{T} . 其图象为 $\overline{G(T)}$. 因为线性算子 \tilde{T} 将 θ 映成 θ . 因此, $\overline{G(T)}$ 不含形如 $(\theta, y), y \neq \theta$ 的元素.

(b) 假定 $\overline{G(T)}$ 不含形如 $(\theta, y), y \neq 0$ 的元素. 若 $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{G(T)}$. 则

$$(x, y_1) - (x, y_2) = (\theta, y_1 - y_2) \in \overline{G(T)}$$

由假定, $y_1 - y_2 = \theta$. 因此, 对任意 $(x, y) \in \overline{G(T)}$ 存在映射

\tilde{T} 为 $x \mapsto y$. 即, $\tilde{T}x = y$. 显然 \tilde{T} 是 T 的延拓. 因为 $\overline{G(T)}$ 是向量空间. (由于 $G(T)$ 是向量空间). 所以, \tilde{T} 是线性的. 由 $\overline{G(T)}$ 是闭的, 故 \tilde{T} 是闭线性算子.

习 题 5.1

1. 利用分析中的Lagrange中值定理. 对于任意 $x, y \in X$, 有

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\xi^2} \right| d(x, y)$$

其中 ξ 位于 x 与 y 之间. $|\xi| \geq 1$. $\frac{1}{\xi^2} \leq 1$.

因此, $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\xi^2} \geq \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ 即 $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\xi^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ 于是使

$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ 成立的最小 α 为 $\frac{1}{2}$.

2. 例如: $X = (0, 1)$. 映射 $T: X \rightarrow X$ 为 $Tx = \frac{1}{2}x$, 显然 T 是压缩映射, 但在 X 中没有不动点.

3. 由Lagrange中值定理

$$|Tx - Ty| = \left| 1 - \frac{1}{\xi^2} \right| |x - y| < |x - y|.$$

(因为 $\xi > 1$). 方程 $x = x + \frac{1}{x}$ 在 X 上无解. 因此映射 T 没有

不动点.

4. 若 x, y 是 T 的两个不动点, 则有 $x \neq y$ 且

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

产生矛盾, 因此不动点是唯一的.

5. 由于 T 是压缩映射, 则存在 $0 \leq \alpha < 1$, 使得
 $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$. 因此,

$$d(T^n x, T^n y) \leq \alpha^n d(x, y). \quad 0 \leq \alpha^n < 1$$

故证得 T^n 为压缩映射.

$T^n (n > 1)$ 为压缩映射, T 不一定是压缩映射, 例如映射
 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 为 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, 0)$ 不是压缩映射. 但是 T^2 ,
 $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (0, 0)$ 是压缩映射.

6. 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 有 $\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} < \frac{\alpha^m}{1-\alpha}$, 因此当 x_0 不是 T 的

不动点情况下, 序列 $\left\{ \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \right\}$ 是严格的单调减少的.

在(3)式中以 $m-1$ 代替 m 得,

$$d(x_m, x_{m-1}) \leq \alpha^{m-1} d(x_0, x_1)$$

所以(6)蕴涵(5).

7. 根据微积分中Lagrange中值定理有

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| |x - y| \leq \alpha |x - y|$$

即 g 是 R 上的一压缩映射. 由定理5.1-3知迭代 $x_n = g(x_{n-1})$ 收敛.

8. 根据微分中值定理.

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| |x - y| \leq \alpha |x - y|$$

ξ 位于 x 与 y 之间, 又 $|g(x_0) - x_0| < (1 - \alpha)r$. 由定理 5.1-5, g 在 J 上存在唯一不动点 x . 即 $x = g(x)$. 有唯一解 x . 且迭代序列 (x_m) 收敛于此解 x 由 (5) 式和 (7) 式得,

$$d(x, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \alpha^m r.$$

即 $|x - x_m| < \alpha^m r$.

由 (6) 式得

$$|x - x_m| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_m - x_{m-1}|$$

9. 由于 $g'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ $0 < K_1 \leq f'(x) \leq K_2$,

取 $\lambda = \frac{1}{2K_2}$ 时, $\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq 1 - \frac{K_1}{2K_2} < 1$, 根据微分中值定

理. $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| |x - y| \leq \left(1 - \frac{K_1}{2K_2}\right) |x - y|$

因此 g 是压缩映射, 由定理 5.1-3, $x_{n+1} = g(x_n)$ 收敛到 g 的唯一不动点 x , 此 x 即是 $f(x) = 0$ 的解.

$$10. (a) \quad x_1 = g(x_0) = \frac{1}{1 + 1^2} = 0.500,$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{1 + (0.5)^2} = 0.800$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{1}{1 + (0.8)^2} = 0.610$$

$$|g'(x)| = \frac{2|x|}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{2|x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

$$<1 \quad (x \neq 0)$$

当 $x=0$ 时, $|g'(0)|=0$. 所以 $|g'(x)|<1$.

(b) $Tx = 1 - x^3$, $x_0 = 1$, $Tx_0 = 1 - x_0^3 = 0 = x_1$, $x_2 = Tx_1 = 1 - 0^3 = 1$, \dots 迭代序列 $0, 1, 0, 1, \dots$ 不收敛. $x_0 = 0.5$ 时, $x_1 = 0.8750$, $x_2 = 0.3301$, $x_3 = 0.9640$, $x_4 = 0.1042$, $x_5 = 0.9887, \dots$ 不收敛. 这是因为在根 (0.682328) 附近, $1 - x^3$ 的导数的绝对值大于 1, T 不是压缩映射.

11. 将方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 变形为

$$x = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$$

令 $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$. 其导数在 1 点为 0, 而且 在根的附近

导数值很小. 因此迭代

$$x_n = g(x_{n-1})$$

收敛的速度快. 当取 $x_0 = 1$ 时, $x_1 = 0.707107$,

$$x_2 = 0.686589, \quad x_3 = 0.683097$$

12. 因为 $f(\hat{x}) = 0$. 由微分中值定理.

$$|f(x)| = |f(x) - f(\hat{x})| = |f'(\xi)| \cdot |x - \hat{x}|$$

$\leq K_1 |x - \hat{x}|$ 由 \hat{x} 是一级零点, 存在 \hat{x} 的某闭邻域 $N_1 \subset (a, b)$ 使得 $f'(x) \neq 0$. 而且 $f''(x)$ 连续. 因此,

$\frac{f''(x)}{f'(x)^2}$ 在 N_1 上有界. 于是对于任意 $x \in N_1$,

$$|g'(x)| = \frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} \leq K_2 |f(x)|$$

$$\leq K_1 K_2 |x - \hat{x}|$$

当 $|x - \hat{x}| < \frac{1}{2K_1 K_2}$ 时, $|g'(x)| < \frac{1}{2}$

令 $N_2 = \left\{ x \mid |x - \hat{x}| < \frac{1}{2K_1 K_2} \right\}$, $N = N_1 \cap N_2$.

所以在 \hat{x} 的邻域 N 中 g 为一压缩映射.

13. 令 $x = \sqrt{C}$, $f(x) = x^2 - C = 0$. 则, $f'(x) = 2x$ 利用习题12中的Newton法得计算平方根的迭代过程.

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{C}{x_n} \right).$$

直接计算知, 当 $x > \sqrt{\frac{C}{3}}$ 时, $|g'(x)| < 1$. 迭代序列才收敛.

当 $x_0 = 1$ 时, 求得 $\sqrt{2}$ 的近似值 $x_1 = 1.500000$,
 $x_2 = 1.416667$, $x_3 = 1.414216$, $x_4 = 1.414214$.

14. (1) 当 $K < 1$ 时, T 是一压缩映射.

(2) 由微分中值定理.

$$|Tx - Ty| = |T'\xi| |x - y|$$

ξ 位于 x 与 y 之间. $T'x$ 连续. 则在 $[a, b]$ 上必有界, 因此, T 满足Lipschitz条件.

习 题 5.2

1. (a) 准确解 $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$(b) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & 0 \end{pmatrix} \text{ 满足条件(5)}$$

从 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 开始用Jacobi迭代得

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{27}{10} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{97}{50} \\ \frac{144}{50} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{3}{10}, \quad d(x^{(0)}, x^{(1)}) = \frac{17}{10}$$

$$\text{误差界为 } d(x^{(2)}, x) \leq \frac{(0.3)^2 \cdot \frac{17}{10}}{1 - 0.3} = 0.2185$$

实际误差为 $d(x^{(2)}, x) = 0.1200$

(c) 从 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 开始用Gauss-Seidel迭代

$$\text{得, } x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.600 \\ 2.880 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.976 \\ 2.993 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0.2, \quad \text{误差界为 } d(x^{(2)}, x) \leq \frac{0.2^2}{1 - 0.2} \times 1.88 = 0.094 \quad \text{实际}$$

误差 $d(x^{(2)}, x) = 0.024$

2. 因为 λ 是 C 的特征值, 则 $(C - \lambda I)x = 0$ 有非零解. 若对于所有的 j 有

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |C_{jk}| < |C_{jj} - \lambda|$$

由5.2-2知, 方程组 $(C - \lambda I)x = 0$ 有唯一零解. 这就产生矛盾. 因此至少存在一个 $j (1 \leq j \leq n)$ 使得

$$|C_{j,j} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |C_{j,k}|$$

(a) 若0是 K 的特征值. 由 $K = I - C$ 及 Greshgorin 定理, 至少存在一个 $j (1 \leq j \leq n)$ 使得

$$1 - |C_{j,j}| \leq |1 - C_{j,j}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |C_{j,k}|$$

因此, $\sum_{k=1}^n |C_{j,k}| \geq 1$, 这与(5)矛盾. 故 K 不可能有特征值0.

(b) 对 C 的每个特征值 λ , 由 Gershgorin 定理,

$$|\lambda| - |C_{j,j}| \leq |C_{j,j} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |C_{j,k}|$$

利用(5) 有

$$|\lambda| \leq \sum_{k=1}^n |C_{j,k}| < 1$$

故证得 C 的谱半径小于1.

3. 因为

$$\begin{aligned} d_1(Tx, Tz) &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n C_{i,k} (\xi_k - \zeta_k) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |C_{i,k}| |\xi_k - \zeta_k| \\ &\leq \left(\max_k \sum_{i=1}^n |C_{i,k}| \right) \sum_{k=1}^n |\xi_k - \zeta_k| \\ &= \alpha d(x, z) \end{aligned}$$

由于 $\sum_{i=1}^n |C_{i,k}| < 1 \quad k = 1, 2, \dots, n$. 所以 $\alpha < 1$, T 为压缩映射.

迭代序列(6)收敛.

4. 利用Cauchy-Schwarz不等式 (参看 § 1.2) 得,

$$\begin{aligned} d_2(Tx, Tz)^2 &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n C_{jk} (\xi_k - \zeta_k) \right]^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n C_{jk}^2 \sum_{s=1}^n (\xi_k - \zeta_k)^2 \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}^2 \right] d_2(x, z)^2 \end{aligned}$$

当 $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}^2 < 1$ 时, T 为压缩映射. 因此(6)式收敛.

5. 由微分中值定理,

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |x_2 - x_1|$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在矩形域 R 上连续, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在闭域 R 上有界. 即存

在常数 $M > 0$, 对于任意 $(x, y) \in R$. 有 $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq M$. 因此 f

在 R 上关于 x 满足 Lipschitz 条件.

$$\begin{aligned} 6. \quad x_1 &= \int_0^t 1 d\tau = t, \quad x_2 = \int_0^t 1 + \tau^2 d\tau = \frac{1}{3}t^2 + t \\ x_3 &= \int_0^t (1 + x_2^2) d\tau = \int_0^t \left(1 + \tau^2 + \frac{2}{3}\tau^4 + \frac{1}{9}\tau^6 \right) d\tau \\ &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7 \end{aligned}$$

准确解为 $x(t) = t \operatorname{tg} t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \dots$

显然 x_3 准确解 $x(t)$ 中所含 $t, \dots t^5$ 的项完全一致.

7. 利用(22)式有

$$\begin{aligned}x_1(t) &= V(t) + \mu \int_0^1 e^{t-\tau} V(\tau) d\tau \\&= V(t) + \mu e^t \int_0^1 e^{-\tau} V(\tau) d\tau \\&\quad (\text{令 } \int_0^1 e^{-\tau} V(\tau) d\tau = K_0) \\&= V(t) + \mu K_0 e^t \\x_2(t) &= V(t) + \mu \int_0^1 e^{t-\tau} x_1(\tau) d\tau \\&= V(t) + \mu K_0 e^t (1 + \mu) \\x_3(t) &= V(t) + \mu \int_0^1 e^{t-\tau} x_2(\tau) d\tau \\&= V(t) + \mu K_0 e^t (1 + \mu + \mu^2) \\&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\x_n(t) &= V(t) + \mu K_0 e^t (1 + \mu + \dots + \mu^{n-1})\end{aligned}$$

由于 $|\mu| < 1$. 其准确解为

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = V(t) + \frac{\mu}{1 - \mu} K_0 e^t$$

8. 定义映射 $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 为

$$Tx = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau, x(\tau)) d\tau$$

则, $d(Tx, Ty) = |Tx(t) - Ty(t)|$

$$\begin{aligned}&= |\mu| \left| \int_a^b [K(t, \tau, x(\tau)) \right. \\&\quad \left. - K(t, \tau, y(\tau))] d\tau \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\mu| \int_a^b |K(t, \tau, x(\tau)) \\
&\quad - K(t, \tau, y(\tau))| d\tau \\
&\leq |\mu| l \int_a^b |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \\
&\leq |\mu| l(b-a) \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \\
&= |\mu| l(b-a) d(x, y).
\end{aligned}$$

因此, 当 $|\mu| < \frac{1}{l(b-a)}$ 时 T 为压缩映射.

故此时积分方程有唯一解 $x(t)$.

9. (a) 此微分方程可以写成

$$\int_{t_0}^t x' dt = \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

即,

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \\
&= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

这是Volterra积分方程.

(b) 对 $\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x)$ 两边积分两次. 并代入两个初始

条件, 得:

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)x_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u f(u, x(u)) du$$

对 $\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^u f(u, x(u)) du \right] d\tau$ 用分部积分得,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{\tau} f(u, x(u)) du \right] d\tau \\
&= \tau \int_{t_0}^{\tau} f(u, x(u)) du \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \tau f(\tau, x(\tau)) d\tau \\
&= t \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t \tau f(\tau, x(\tau)) d\tau \\
&= \int_{t_0}^t (t - \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

因此,

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)x_1 + \int_{t_0}^t (t - \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

是Volterra积分方程.

10. 由(22)式,

$$x_{n+1}(t) = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) x_n(\tau) d\tau$$

$$x_n(t) = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) x_{n-1}(\tau) d\tau$$

等式两边分别相减得

$$z_{n+1}(t) = \mu \int_a^b K(t, \tau) Z_n(\tau) d\tau = \mu S Z_n(t)$$

取 $x_0(t) = V(t)$, 则,

$$x_1(t) = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) V(\tau) d\tau$$

$$= V(t) + \mu S V$$

$$x_2(t) = V(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) x_1(\tau) d\tau$$

$$= V(t) + \mu S V + \mu^2 S^2 V$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$x_n(t) = V(t) + \mu S V + \mu^2 S^2 V + \dots + \mu_n S_n V$$

所以, $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = V + \mu SV + \mu^2 S^2 V + \dots$

$$11. (a) x = 1 + \mu + \mu^2 + \dots = \frac{1}{1 - \mu}.$$

$$(b) \text{ 令 } C = \int_0^1 x(t) dt, \text{ 则 } x(t) - \mu C = 1$$

$x(t) = 1 + \mu C$. 两边从 0 至 1 求定积分得.

$$C = \int_0^1 x(t) dt = \int_0^1 (1 + \mu C) dt = 1 + \mu C$$

即 $C = 1 + \mu C$. 因此, $C = \frac{1}{1 - \mu}$, 代入

$$x(t) = 1 + \mu C \text{ 中, } x(t) = 1 + \frac{\mu}{1 - \mu} = \frac{1}{1 - \mu}.$$

习 题 5.3

1. 令 $\delta = \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$. $f(y) = d(x, y) \in Y$,

则 $f(y)$ 在紧子集 Y 上连续, 根据推论 2.5-7, 存在 $y_0 \in Y$, 使得 $f(y)$ 在 y_0 达到最小值. 根据 Y 中对 x 最佳逼近的定义, 因此 $\delta = d(x, y_0)$, y_0 就是 Y 中对 x 的最佳逼近.

2. 令 $0 \leq \lambda \leq 1$, $\mu = 1 - \lambda$. 对于 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. 由于 $x = \lambda \alpha + \mu \beta$. 有,

$$\begin{aligned} f(\lambda \alpha + \mu \beta) &= \left\| x - \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) e_i \right\| \\ &\leq \lambda \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| + \mu \left\| x - \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \right\| \\ &= \lambda f(\alpha) + \mu f(\beta) \end{aligned}$$

即证得 f 为凸函数.

3. 对于 $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, 则有

$$\|x + y\|_1 = 2.$$

因此(6)中的范数不是严格凸的.

4. $\delta = \delta(x, \tilde{B}) = \inf_{\|\xi_1\| + \|\xi_2\| = 1} (|\xi_1 - 2| + |\xi_2|)$ (这是因为 x 在单位闭球 \tilde{B} 外)

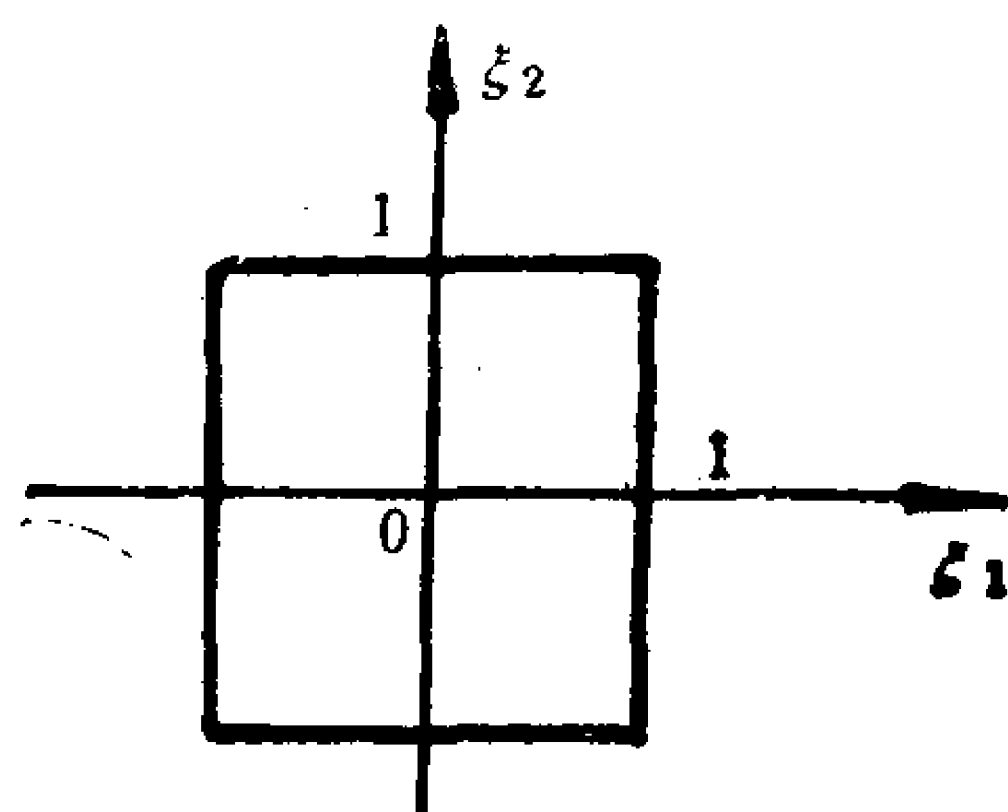
即 δ 等于函数 $f(\xi_1) = |\xi_1 - 2| + 1 - |\xi_1|$ 在条件 $|\xi_1| \leq 1$ 下的极小值, 易得只有当 $\xi_1 = 1$ 时 $f(\xi_1)$ 才有极小值 $f(1) = 1$, 因此, $\delta = 1$. 并 \tilde{B} 对 x 的最佳逼近是唯一的 $y_0 = (1, 0)$.

5. 对于点 $x = (1, 0)$, $y = (1, 1)$. 有 $\|x\| = \|y\| = 1$.

$x \neq y$, 但 $\|x + y\| = 2$. 所以范数

$$\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$$

不是严格凸的.



附图 16

6. 对于点 $x = (2/3, 1/3, 0, 0, \dots)$, $y = (1/3, 2/3, 0, 0, \dots)$ 有 $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$. $\|x + y\| = 2$. 所以 l^1 不是严格凸的空间.

7. 根据引理 5.3-5, 以两个最佳逼近 x 与 y 为端点的线段 $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) 均是最佳逼近.

8. 由三角不等式知.

$$\|ax + (1 - a)y\| \leq 1$$

若存在 $0 < \alpha_0 < 1$ 上式等号成立, 则由 3.1-2 知,

$$\alpha_0 x = c(1 - \alpha_0)y \quad (c > 0)$$

$$\alpha_0 \|x\| = c(1 - \alpha_0)\|y\| \quad \text{由 } \|x\| = \|y\| = 1$$

得 $\alpha_0 = c(1 - \alpha_0)$

故 $x = y$ 与严格凸条件矛盾.

现证明条件为充分的: 在上述不等式中, 取 $\alpha = \frac{1}{2}$ 即得到严格凸定义中的条件.

9. 设 $x_1 = \frac{1}{\|x\|}x, y_1 = \frac{1}{\|y\|}y, \alpha = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}$

则, $\|x_1\| = \|y_1\| = 1$, 并有下列结果.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\|x + y\|}{\|x\| + \|y\|} = \left\| \frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|} \right\| \\ &= \|\alpha x_1 + (1 - \alpha)y_1\| \text{ 因为 } X \text{ 是严格凸的赋范空间.} \end{aligned}$$

由习题 8 得,

$$x_1 = y_1, \text{ 所以, } x = \frac{\|x\|}{\|y\|}y. \quad c = \frac{\|x\|}{\|y\|} > 0$$

10. 若 X 不是严格凸的, 则存在范数为 1 的两个元素 $x \neq y$, 使得 $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. 由题设, 对某个 $c > 0$, 有 $x = cy$. 但是 $\|x\| = \|y\| = 1, \|x\| = c\|y\|$. 因此, $c = 1, x = y$, 这与假设 $x \neq y$ 矛盾. 从而 X 为严格凸的赋范空间.

11. 由习题 8 知以单位球面上任意两点为端点的线段的内点均不在球面上 (在球面上), 即球面上不包含线段. 球面上的点不可能是线段的内点. 根据定义, 故球面上的每一

点均是 X 中闭单位球的端点.

习 题 5.4

1. 设 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 为 Y 的一个基, $\{t_1, \dots, t_n\}$ 为 $[a, b]$ 中由 n 个不同点组成的子集, 则由 Y 满足Haar条件, 根据引理5.4-3, (1)中的行列式不等于0. 因此, 将 Y 限制到点集 $\{t_1, \dots, t_n\}$ 上时, $\{y_1, \dots, y_n\}$ 的线性无关. 且每个 $y \in Y$, 可唯一地表示成 $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(t) \quad t \in \{t_1, \dots, t_n\}$, 从而证得此时的 Y 仍是 n 维向量空间.

2. (a) 当 Y 看成 $C[0, 1]$ 的子空间时. 由于对任二点 $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 \neq t_2$ 时,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{vmatrix} = (t_2 + t_1)(t_2 - t_1) \neq 0$$

由引理5.4-3, Y 满足Haar条件.

(b) 当 Y 看成 $C[-1, 1]$ 的子空间时, 对于 $t_1, t_2 \in [-1, 1], t_2 = -t_1$, (1)中行列式为零, 因此, Y 不满足Haar条件.

3. 由于 v_j 是(1)中行列式的第 j 个列向量, $\{v_1, \dots, v_n\}$ 线性无关, 所以(1)中行列式不为零. 于是可证得 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 线性无关. Y 是 n 维子空间. 对 Y 的每一个基 $\{z_1, \dots, z_n\}$ 可唯一地表示成: $z_j = \alpha_{j1}y_1 + \dots + \alpha_{jn}y_n \quad j=1, 2, \dots, n$. 因为 $\{z_1, \dots, z_n\}$ 线性无关, 可得

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

因此 D 的转置行列式 $D^T \neq 0$.

对任意 n 个不同的 $t_j \in [a, b]$ ($j = 1, 2, \dots, n$)
有.

$$\begin{vmatrix} z_1(t_1) & z_1(t_2) & \cdots & z_1(t_n) \\ z_2(t_1) & z_2(t_2) & \cdots & z_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n(t_1) & z_n(t_2) & \cdots & z_n(t_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

由引理5.4-3, 证得 Y 满足Haar条件.

反之, 由 Y 是 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 的张成, $\dim Y = n$, 可得 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 是 Y 的一个基, 再根据引理5.4-3, 对于任意 n 个不同的 $t_j \in [a, b]$ ($j = 1, 2, \dots$)

以 $v_j = (y_1(t_j), \dots, y_n(t_j))$ $j = 1, \dots, n$
作为列向量的行列式(1)不为零. 因此,
 $v_j = (y_1(t_j), \dots, y_n(t_j))$ ($j = 1, \dots, n$)
线性无关.

4. 若结论不成立, 必存在一个 $y_0 \in Y$, 使得,

$$\delta = \|x - y_0\| < \min |x(t_j) - y(t_j)|$$

对任意 $y \in Y$, 则 $y_* = y_0 - y \in Y$, $y = y_0 - y_* = (x - y_*) - (x - y_0)$ 必与 $x - y_*$ 在 $n+1$ 个点 t_1, \dots, t_{n+1} 均有相同的符号, 因此 Y 在 $[a, b]$ 中至少有 n 个零点且 $y \neq \theta$, 这与 Y 满足Haar条件矛盾. 所以证得:

$$\delta \geq \min_i |x(t_i) - y(t_i)|$$

5. 因为这里 $x' = e^t > 0$. 则 $x(t) = e^t$ 在 $[0, 1]$ 上向上凹. 过点 $(0, 1)$ 和 $(1, e)$ 的割线方程为 $\tilde{y} = (e-1)t + 1$, 令 $(x(t) - \tilde{y}(t))' = 0$, 得 $t = \ln(e-1)$ 故 $\tilde{y}(t)$ 与 $x(t)$ 在 $t = \ln(e-1)$ 处有极大偏差 $k = 2 - e - (e-1)\ln(e-1)$, 曲线 $x = e^t$ 在 $t = \ln(e-1)$ 的切线方程为, $\hat{y}(t) = (e-1)t + (e-1)[1 - \ln(e-1)]$. 曲线完全位于 \tilde{y} 与 \hat{y} 之间. 介于 \tilde{y} 与 \hat{y} 中间的直线 $y(t) = \hat{y}(t) + k$, $k = 1 + \frac{1}{2}[(e-1)\ln(e-1) - e]$ 使 $x - y$ 在 $[0, 1]$ 上有一个交错集 $\{0, \ln(e-1), 1\}$. 而 $\dim Y = 2$. 根据引理 5.4-8, y 是 Y 中对 x 的最佳逼近.

6. 由定理 5.4-10 和公式 (14), $x(t) = t^3 + t^2$ 的二次多项式最佳逼近 y_0 为

$$y_0(t) = t^3 + t^2 - \frac{1}{4}T_3(t) = t^2 + \frac{3}{4}t$$

其极大偏差为 $\|x - y_0\| = \frac{1}{4}$.

7. 由于在 $[0, \pi]$ 中, $\cos n\theta$ 的零点为

$$\theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

因为 $t = \cos \theta$, 所以 $T_n(t)$ 在 $[-1, 1]$ 中有 n 个不同的零点

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2n}\pi \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

8. $T_n(t)$ 相邻的零点为

$$t_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad t_{k+1}^{(n)} = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi$$

我们来证 $T_{n-1}(t)$ 的第 K 个零点

$$t_k^{(n-1)} = \cos \frac{2k-1}{2n-2} \pi$$

位于上述 $T_n(t)$ 的两个零点之间. 因为余弦函数在 $(0, \pi)$ 上是单调的, 则只须证明下述不等式成立

$$\frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2n-2} < \frac{2k+1}{2n}$$

左边不等式成立是显然的. 第二个不等式成立等价于 $2k < 2n-1$. 这个不等式当 $k < n$ 时是正确的. 因为 $T_n(t)$ 有 n 个零点, 以这 n 个点作为边界点的区间有 $n-1$ 个, 而每个区间均包含 $T_{n-1}(t)$ 的一个零点, 并且只能包含一个零点. 这是由于 $T_{n-1}(t)$ 是 $n-1$ 次的多项式. 这就证明了题中的结论

9. 若 $T_n(t)$ 与 $T_{n-1}(t)$ 有一个公共零点 t_0 , 则由定义 5.4-9 中的递推公式

$$T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t) = 2tT_n(t).$$

可得 $T_{n-2}(t_0) = 0$, 重复用这个递推公式, 有 $T_0(t_0) = 0$. 这与 (14) 中的 $T_0(t) = 1$ 矛盾. 因此, $T_{n-1}(t)$ 与 $T_n(t)$ 没有公共零点.

10. 在积分中, 用换元积分. 令 $t = \cos \theta$, 则

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(t) T_m(t) dt = \int_{\pi}^0 \frac{1}{\sin \theta} \cos n \theta \cos m \theta$$

$$\begin{aligned} & (1 - \sin \theta) d\theta \\ & = 0 \quad (m \neq n) \end{aligned}$$

$m = n = 0$ 时, 积分值为 π .

习 题 5.5

$$\begin{aligned} 1. G(\cdots, \alpha y_i, \cdots) &= \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_1, \alpha y_i \rangle & \cdots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \alpha y_i, y_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha y_i, \alpha y_i \rangle & \cdots & \langle \alpha y_i, y_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, \alpha y_i \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix} \\ &= \alpha \cdot \overline{\alpha} G(\cdots, y_i, \cdots) \\ &= |\alpha|^2 G(\cdots, y_i, \cdots) \end{aligned}$$

2. 若 $G(y_1, \cdots, y_i) \neq 0$, 由定理 5.6-1 知, $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 线性无关. 因此, 子集 $\{y_1, \cdots, y_n\} \quad j = 1, \cdots, n-1$, 也线性无关. 再用一次定理 5.6-1. 于是证得 $G(y_1, \cdots, y_i) \neq 0 \quad j = 1, \cdots, n-1$.

3. 因为 $G(x, y) = \|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2$, Schwarz 不等式等价于 $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$, 因此用 Gram 行列式将 Schwarz 不等式可表示为

$$G(x, y) \geq 0$$

由定理 5.6-1, 等号成立的充要条件是 x 与 y 线性相关.

4. 用数学归纳法证, 当 $n = 1$ 时, 显然有, $G(y_1) = \|y_1\|^2 \geq 0$. 假设对于任意自然数 k 有 $G(y_1, \cdots, y_k) \geq 0$, 则由定理 5.5-2 中的公式 (5), $G(y_1, \cdots, y_{k+1}) = G(y_{k+1}, \cdots, y_k) = \|z\|^2 G(y_1, \cdots, y_k) \geq 0$

因此, 对于任意自然数 n , $G(y_1, \dots, y_n) \geq 0$.

由定理5.5-1知, $\{y_1, \dots, y_n\}$ 线性无关的充分必要条件是 $G(y_1, \dots, y_n) > 0$.

5. 利用行列式的性质, 证得

$$\begin{aligned} & G(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \alpha y_i) \\ &= G(y_1, \dots, y_n) + \overline{\alpha} G(y_1 \cdots y_i \cdots y_i) \\ &= G(y_1, \dots, y_n) + \overline{\alpha} \cdot 0 = G(y_1 \cdots y_n) \end{aligned}$$

下面利用这个等式证明定理5.5-2.

$$\begin{aligned} & G(x, y_1 \cdots y_n) \\ &= G(x - \sum_{i=1}^n \overline{\alpha}_i y_i, y_1, \dots, y_n) \\ &= G(z, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle z, z \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \langle y_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix} \\ &= \|z\|^2 G(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

从而定理5.5-2得证.

6. 由定理5.5-2, y_k 到 $\text{Span}\{y_1, \dots, y_n\}$ 的距离的平方为:

$$\frac{G(y_k, \dots, y_n)}{G(y_{k+1}, \dots, y_n)},$$

而 y_k 到 $\text{Span}\{y_1, \dots, y_m\}$ 的距离的平方为

$$\frac{G(y_k, \dots, y_m)}{G(y_{k+1}, \dots, y_m)}$$

因为 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 是 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 的子集, 因此

$$\frac{G(y_k, \dots, y_n)}{G(y_{k+1}, \dots, y_n)} \leq \frac{G(y_k, \dots, y_m)}{G(y_{k+1}, \dots, y_m)}$$

下面证最后一个不等式.

$$\|z\|^2 = \frac{G(y_m, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} \text{ 是 } y_m \text{ 到 } \text{Span}\{y_{m+1}, \dots, y_n\}$$

的距离的平方, 由于 $(y_m - z) \perp z$, $\|z\|^2 + \|y_m - z\|^2 = \|y_m\|^2 = G(y_m)$ 于是证得,

$$\frac{G(y_m, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} \leq G(y_m)$$

7. 由习题6, 令 $k=1$ 得,

$$\begin{aligned} \frac{G(y_1, \dots, y_n)}{G(y_1, \dots, y_m)} &\leq \frac{G(y_2, \dots, y_n)}{G(y_2, \dots, y_m)} \leq \dots \\ &\leq \frac{G(y_m, \dots, y_n)}{G(y_m)} \\ &\leq G(y_{m+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

因此, 证得

$$G(y_1, \dots, y_n) \leq G(y_1, \dots, y_m) \cdot G(y_{m+1}, \dots, y_n)$$

当 $M_1 \perp M_2$ 时,

$$G(y_1, \dots, y_n) =$$

$$\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \dots & \langle y_1, y_m \rangle & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y_m, y_1 \rangle & \dots & \langle y_m, y_m \rangle & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \langle y_{m+1}, y_{m+1} \rangle & \dots & \langle y_{n+1}, y_{n+1} \rangle & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \langle y_n, y_{m+1} \rangle & 0 & \dots & \langle y_n, y_n \rangle & \dots \end{vmatrix}$$

$$= G(y_1, \dots, y_m) G(y_{m+1} \dots y_n)$$

$$\text{若 } G(y_1, \dots, y_n) = G(y_1, \dots, y_m) G(y_{m+1}, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{G(y_1, \dots, y_n)}{G(y_1, \dots, y_m)} &\leq \frac{G(y_m, \dots, y_n)}{G(y_m)} \\ &\leq G(y_{m+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

$$\text{因此, } \frac{G(y_m, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} = G(y_m) = \|y_m\|^2$$

而 y_m 到 $\text{Span}\{y_{m+1}, \dots, y_n\}$ 的距离的平方为

$$\frac{G(y_m, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} = \|z_m\|^2 = \|y - \sum_{i=m+1}^n \alpha_i y_i\|^2$$

$$\text{因为 } y_m = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i y_i + z_m, \quad z_m \in (\text{Span}\{y_{m+1}, \dots, y_n\})^\perp$$

$$\text{所以, } \|y_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n \alpha_i y_i \right\|^2 + \|z_m\|^2. \quad \text{但 } \|y_m\|^2 = \|z_m\|^2$$

$$\text{从而, } \left\| \sum_{i=m+1}^n \alpha_i y_i \right\|^2 = 0. \quad \text{即 } \sum_{i=m+1}^n \alpha_i y_i = 0, \text{ 由于}$$

y_{m+1}, \dots, y_n 线性无关, 于是 $\alpha_i = 0 \quad (i = m+1, \dots, n)$

$y_m = z_m \in (\text{Span}\{y_{m+1}, \dots, y_n\})^\perp$, 因此, $y_m \perp y_i$,

$(i = m+1, \dots, n)$. 一般地, 由于对每个 $i = 1, 2, \dots, m-1$,

$$G(y_1, \dots, y_2 \dots y_m, y_{m+1} \dots y_n) = G(y_1 \dots y_m \dots y, y_{m+1} \dots y_n)$$

$$G(y_1 \dots y_i \dots y_m) = G(y_1 \dots y_m \dots y_i)$$

于是有类似的等式

$$\begin{aligned} &G(y_1 \dots y_m \dots y_i y_{m+1} \dots y_n) \\ &= G(y_1 \dots y_m \dots y_i) G(y_{m+1} \dots y_n) \end{aligned}$$

重复上述过程, 可证得 $y_i \perp y_j \quad i = 1, 2, \dots, m-1$,

$j = m + 1, \dots, n$, 因此证明了 $M_1 \perp M_2$.

8. 在习题 6 不等式

$$\frac{G(y_n, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} \leq G(y_m)$$

中令 $m = 1$, 得

$$G(y_1, \dots, y_n) \leq G(y_1)G(y_2, \dots, y_n)$$

类似地, $G(y_2, \dots, y_n) \leq G(y_2)G(y_3, \dots, y_n)$

依此类推, $G(y_1, \dots, y_n) \leq G(y_1)G(y_2)\cdots G(y_n)$

$$= \langle y_1, y_1 \rangle \langle y_2, y_2 \rangle \cdots \langle y_n, y_n \rangle$$

若 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 相互直交, 显然 $G(y_1, \dots, y_n)$ 是一个对角形行列式, 其主对角线上的元依次为 $\langle y_1, y_1 \rangle, \dots, \langle y_n, y_n \rangle$. 因此,

$$G(y_1, \dots, y_n) = \langle y_1, y_1 \rangle \cdots \langle y_n, y_n \rangle.$$

反之, 若上述等式成立, 可得

$$G(y_m, \dots, y_n) = G(y_m)G(y_{m+1}, \dots, y_n)$$

$m = 1, 2, \dots, n-1$, 由习题 7 知, y_i 相互直交.

9. 令 $Y = \text{Span}\{x_1, x_2, \dots\}$, $Y_n = \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$

则, $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots \subset H$.

对任意 $x \in H$, 其到 Y_n 的距离 δ_n :

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n \geq \dots$$

由定理 5.5-2 知, 存在 $y_n \in Y_n$, 使得,

$$\delta_n^2 = \|x - y_n\|^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)}$$

Y 在 H 中稠密的充分必要条件是

$$\delta_n \rightarrow 0, \text{ 即 } \frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

习 题 5.6

1. 由于在 $Y(p_n)$ 上, 显然对于加法和数乘运算是封闭的. 因此, $Y(p_n)$ 是一向量空间.

根据定理 5.6-1, 对于每 $n+3$ 个数:

$x_0, \dots, x_n, k_0', k_n'$, 有唯一的三次样条函数 $y(t) \in Y(p_n)$, 与之对应, 于是可定义映射:

$T: R^{n+3} \longrightarrow Y(p_n)$ 为

$$(x_0, \dots, x_n, k_0', k_n') \longmapsto y(t)$$

显然, T 是线性双射, 即 $Y(p_n)$ 与 R^{n+3} 是同构的向量空间, 因此,

$$\dim Y(p_n) = \dim R^{n+3} = n+3.$$

2. 当 $k_0' = k_n' = 0$ 时, 每给 $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$ 一组值, 由定理 5.6-1 知, 就唯一确定一个三次样条函数 $y(t) \in Y(p_n)$. 当取 $x(t_j) = 1, x(t_k) = 0 \quad k = j \quad j = 0, 1, \dots, n$. 时所确定的三次样条函数记作 $y_j(t)$. 则由定理 5.6-1.

$$\begin{aligned} y_j(t_k) = x(t_k) &= \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \\ &= \delta_{jk}. \end{aligned}$$

且,

$$y_j'(a) = k_0' = 0, \quad y_j'(b) = k_n' = 0.$$

令 $y_{n+1}(t) = t, y_{n+2}(t) = t^2$. 下面证 $\{y_0, \dots, y_{n+2}\}$ 线性无关. 设 $\lambda_0 y_0(t) + \lambda_1 y_1(t) + \dots + \lambda_{n+1} t + \lambda_{n+2} t^2 = 0$.

令 $t = t_k$, 得, $\lambda_k + \lambda_{n+1} t_k + \lambda_{n+2} t_k^2 = 0. \quad k = 0, 1, \dots, n$

对于 $\lambda_0 y_0(t) + \dots + \lambda_n y_n(t) + \lambda_{n+1} t + \lambda_{n+2} t^2 = 0$

两边关于 t 求导数有,

$$\lambda_0 y_0'(t) + \cdots + \lambda_n y_n'(t) + \lambda_{n+1} + 2\lambda_{n+2}t = 0$$

分别取 $t = a$ 和 $t = b$, 则得,

$$\lambda_{n+1} + 2a\lambda_{n+2} = 0$$

$$\lambda_{n+1} + 2b\lambda_{n+2} = 0$$

于是线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_k + \lambda_{n+1} t_k + \lambda_{k+1} t_k^2 = 0 & k=0,1,\cdots,n \\ \lambda_{n+1} + 2a\lambda_{n+2} = 0 \\ \lambda_{n+1} + 2b\lambda_{n+2} = 0 \end{cases}$$

的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & t_0 & t_0^2 \\ & 1 & 0 & \cdots & t_1 & t_1^2 \\ & & \searrow & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & t_n & t_n^2 \\ & & & & 1 & 2a \\ & & & & & 1 & 2b \end{vmatrix} = 2(b-a) \neq 0.$$

因此, $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+2} = 0$, 即 $\{y_0 \cdots y_{n+2}\}$ 线性无关. 由习题 1 知, $\dim Y(P_n) = n+3$.

从而证得 $\{y_0, \cdots, y_{n+2}\}$ 是 $Y(P_n)$ 的一个基.

3. 这里 $\tau_0 = \tau_1 = 1$ $x(-1) = 1, x(0) = 0, x(1) = 1, k'_0 = 4t^2|_{t=-1} = -4, k'_2 = 4t^3|_{t=-1} = 4, \Delta x_1 = 0 - 1 = -1, \Delta x_2 = 1 - 0 = 1$. 代入定理 5.6—1 证明中的 (*), 解得 $k'_1 = 0$. 再将 $x(-1) = 1, x(0) = 0, x(1) = 1, k'_0 = -4, k'_1 = 0, k'_2 = 4$ 代入 $P_i(t)$ 中得: $P_0(t) = t^2[1 - 2(t+1)] = -2t^3 - t^2 \quad t \in [-1, 0]$
 $P_1(t) = 2t^3 - t^2 \quad t \in (0, 1]$

因此所求三次样条函数

$$y(t) = \begin{cases} -2t^3 - t^2 & t \in [-1, 0] \\ 2t^3 - t^2 & t \in (0, 1] \end{cases}$$

$$4. \text{Chebyshev 逼近为 } \tilde{y}(t) = t^4 - \frac{1}{8}T_4(t) = t^2 - \frac{1}{8}\tilde{y}$$

(t) 不满足 (2a) 与 (5)

$$5. x(t) - \tilde{y}(t) = t^4 - t^2 + \frac{1}{8} \quad \max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t) - \tilde{y}(t)| = \frac{1}{8}$$

由于对称关系, 当 $t \in [0, 1]$ 时, $x(t) - y(t) = t^4 - 2t^3 + t^2$

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = \frac{1}{16} = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|,$$

因此, Chebyshev 多项式 $\tilde{y}(t)$ 比样条函数 $y(t)$ 有较大的极大偏差.

6. 由于三次样条函数 $y(t)$ 在每个子空间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上和一个次数不超过三的多项式 $P_j(t)$ 一致, 因为 $y(t)$ 具有三阶连续导数, 则

$$P_{j-1}'''(t_j) = P_j'''(t_j)$$

因此每个多项式 $P_j(t)$ 的三次项系数均是相同的, 又由于,

$P_{j-1}''(t_j) = P_j''(t_j)$, 所以二次项系数也是相同的. $P_j(t) j = 0, 1, \dots, n-1$ 的三次项, 二次项系数均相同, 再由 $P_{j-1}'(t_j) = P_j'(t_j)$ 得所有 $P_j(t)$ 的一次项系数相同. 最后, 由 $P_{j-1}(t_j) = P_j(t_j)$ 知常数项也一致. 从而证得 $y(t)$ 必为一个次数不超过 3 的多项式.

$$7. \text{这里 } x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$k'_0 = k'_2 = 0, \tau_j = \frac{2}{\pi}, j=0, 1, \Delta x_j = 1. \quad j=1, 2$ 代入(*)解

得, $k'_1 = \frac{3}{\pi}$ 因此,

$$P_0(t) = -\frac{4}{\pi^2} t^2 \left[1 + 2 \times \frac{2}{\pi} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{3}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi^2} t \left(t + \frac{\pi}{2} \right)^2$$

$$= -\frac{4}{\pi^3} t^3 + \frac{3}{\pi} t$$

$$P_1(t) = \frac{4}{\pi^2} t^2 \left[1 - 2 \cdot \frac{2}{\pi} \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{3}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi^2}$$

$$\cdot t \left(t - \frac{\pi}{2} \right)^2$$

$$= -\frac{4}{\pi^3} t^3 + \frac{3}{\pi} t$$

8. 显然有: $P(x) \geq 0, P(\lambda x) = |\lambda| P(x).$

下面证 P 满足三角不等式:

$$\begin{aligned} [P(x+y)]^2 &= \langle x+y, x+y \rangle_2 \\ &= \langle x, x \rangle_2 + \langle y, y \rangle_2 + 2\langle x, y \rangle_2 \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式, $\langle x, y \rangle_2 \leq |\langle x, y \rangle_2|$

$$\leq \langle x, x \rangle_2^{1/2} \langle y, y \rangle_2^{1/2}$$

因此, $P(x+y)^2 \leq [P(x) + P(y)]^2$

即 $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

从而, 证得 P 是拟范数, P 不是范数, 这是由于不满足: $P(x) = 0 \Rightarrow x = \theta$, 例如, $x = 1$ 时, $P(x) = 0$.

9. 因为

$$\begin{aligned}\|x-y\|_2^2 &= \langle x-y, x-y \rangle_2 \\ &= \langle x, x \rangle_2 - 2\langle x-y, y \rangle_2 - \langle y, y \rangle_2 \\ &= P(x)^2 - P(y)^2 \leq P(x)^2\end{aligned}$$

所以, 这样用 P 估计偏差, 而与划分的具体选择无关.

习 题 6.1

$$1. \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 3; \quad -\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \lambda_2 = 9; \quad -4\xi_1 + \xi_2 = 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = a+ib; \quad -i\xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \lambda_2 = a-ib; \quad -\xi_1 + i\xi_2 = 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \text{对 } Ax = \lambda x (x \neq 0) \quad \text{有 } \overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x = \lambda \overline{x}^T x$$

$$\text{则 } \lambda = \frac{\overline{x}^T Ax}{\overline{x}^T x} \text{ 由 } \overline{x}^T x \text{ 为实的且}$$

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{x}^T Ax)} &= \overline{(\overline{x}^T Ax)^T} = (x^T \overline{A} \overline{x})^T = \overline{x}^T \overline{A}^T x \\ &= \overline{x}^{-T} Ax\end{aligned}$$

故亦为实的.

$$3. \quad \text{对 } Ax = \lambda x (x \neq 0) \text{ 有 } \overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x = \lambda \overline{x}^T x$$

则 $\lambda = \frac{\overline{x}^T A x}{x^T x}$ 由 $\overline{x}^T x$ 为实的且

$$\begin{aligned} \overline{(\overline{x}^T A x)} &= \overline{(\overline{x}^T A x)^T} = (x^T \overline{A} \overline{x})^T = \overline{x}^T A^{-T} x \\ &= -\overline{x}^T A x \end{aligned}$$

则为纯虚数或零

4. 由 $Ax = \lambda x (x \neq 0)$ 得

$$\begin{aligned} (\overline{Ax})^T &= \overline{x}^T \overline{A}^T = \overline{\lambda} \overline{x}^T \text{ 且 } (\overline{Ax})^T \\ &= \overline{x}^T A^{-1} \end{aligned}$$

则 $\overline{x}^T A^{-1} \cdot Ax = \overline{\lambda} \overline{x}^T \lambda x$ 即 $\overline{x}^T x = |\lambda|^2 \overline{x}^T x$

得 $|\lambda|^2 = \frac{\overline{x}^T x}{x^T x} = 1$

5. 由 3.10—2 及习题 2 与 4 可得

6. 特征方程

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \beta_n \lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_0 = 0$$

则 $\beta_n = (-1)^n, \beta_0 = \det A, \beta_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn})$

又 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n \frac{\beta_0}{\beta_n} \det A$

$\text{trace } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots$

$$+ \alpha_{nn}$$

7. A^{-1} 存在充要条件为 $\det A \neq 0$, 由习题6知

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

又 $Ax_k = \lambda_k x_k$ 左乘 A^{-1} 得 $A^{-1}x_k = \frac{1}{\lambda_k} x_k$

8. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (二阶单位矩阵)

A 的特征方程为 $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$ 根为 λ_1, λ_2

A^{-1} 的特征方程为 $(a_{11} - \lambda D)(a_{22} - \lambda D) - a_{21}a_{12} = 0$ 其中

$$D = \det A = \lambda_1 \lambda_2$$

故特征值为 $\frac{\lambda_1}{D} = \frac{1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{D} = \frac{1}{\lambda_1}$

9. 由 $Ax_i = \lambda_i x_i$ 知 $(kA)x_i = (k\lambda_i)x_i$

利用归纳法 $m=1$ 时 $Ax_i = \lambda_i x_i$

假设 $m=k$ 时 $A^k x_i = \lambda_i^k x_i$ 成立

左乘 A $A^{k+1} x_i = \lambda_i A x_i = \lambda_i \lambda_i x_i = \lambda_i^{k+1} x_i$

知 $m=k+1$ 时亦成立

10. 归纳证明: 在 P 之次数为零时成立.

假设 P 之次数为 $m-1$ 时成立即:

$$P_{m-1}(A)x_k = P_{m-1}(\lambda_k)x_k$$

对任一 $P_m(A) = K_m A_m + P_{m-1}(A)$ 由习题9知

$$\begin{aligned} P_m(A)x_i &= [K_m A_m + P_{m-1}(A)]x_i \\ &= K_m \lambda_i^m x_i + P_{m-1}(\lambda_i)x_i \\ &= P_m(\lambda_i)x_i \end{aligned}$$

11. 由 $Ax_i = \lambda_i x_i$ 及 $y_i = C^{-1}x_i$ (即 $x_i = Cy_i$)

则 $\tilde{A}y_i = C^{-1}ACy_i = C^{-1}Ax_i = C^{-1}\lambda_i x_i = \lambda_i C^{-1}x_i = \lambda_i y_i$

12. 特征值 $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 为特征向量但 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 不是

13. $\lambda = 1$, 代数重数为 n , 几何重数为 1, 特征向量为 $(1, 0, 0, \dots, 0)^T$

14. 设 Y_0 为 A 对应特征值 λ_0 的特征空间, 并令 $\dim Y_0 = m$, 对任一 $x_0 \in Y_0$ 有 $Ax_0 = \lambda_0 x_0 \in Y_0$ 故 A 映射 Y_0 到其自身. 设 A_0 为对应映射 $Y_0 \rightarrow Y_0$ 的矩阵, 则 $\det(A_0 - \lambda I_0) = (\lambda_0 - \lambda)^m$, (其中 I_0 为 m 阶单位矩阵) 且为 $\det(A - \lambda I)$ 之因子, 由代数重数定义得证.

15 由 $Tx = x' = \lambda x$ 得 $\lambda = 0$ 时特征向量 $x = \text{常数} (\neq 0)$

当 $\lambda \neq 0$ 时 $x(t) = e^{\lambda t} \notin X$, 即 $\lambda \neq 0$ 不是特征值.

代数重数为 n , , 几何重数为 1.

习 题 6.2

1. $T_\lambda = (1 - \lambda)I$ $\sigma(I) = \{1\} = \sigma_p(I)$

由 $(1 - \lambda)Ix = 0$ 对应特征值 1 的特征空间为 X ,

$R_\lambda(I) = (1 - \lambda)^{-1}I$ 对 $\lambda \neq 1$ 为有界.

2. 由定义直接得证.

3. 设 Z 为特征空间, 对任一 $x \in Z$, 有 $(T - \lambda I)x = \theta$ 即 $Tx = \lambda x$; 又 $(T - \lambda I)Tx = (T - \lambda I)\lambda x = \theta \therefore Tx \in Z$

例如 6.1 习题 15 及 6.2 习题 1 中之特征空间.

4. T 的表示矩阵其最后 $n - m$ 行与前 m 列相交的元素均为零.

5. 不变子空间 $Y_n = \text{Span}\{e_n, e_{n+1}, \dots\}$ ($n = 1, 2, \dots$)
对任一 λ $(T - \lambda I)x = \theta \implies x = \theta$.

6. $\lambda \in \sigma_p(T)$ 蕴涵 $\lambda \in \sigma_p(T_1)$, 并且扩充后原特征向量

仍保持, 可能增加某些新的特征向量。

7. 令 $\lambda \in \sigma_r(T_1)$ 则 $T_{1\lambda}^{-1}$ 存在且其定义域不在 X 中稠密, 由 $D(T_1) \supset D(T)$ 得 $D(T_{1\lambda}) \supset D(T)$ 且 $R(T_{1\lambda}) \supset R(T)$ 所以 $R(T)$ 不可能在 X 中稠密, 因而 $\lambda \in \sigma_s(T)$

8. 令 $\lambda \in \sigma_c(T)$ 则 $T_{1\lambda}^{-1}$ 存在且其定义域在 X 中稠密, 由 T_1 为 T 的扩张, 则 $D(T) \subset D(T_1)$, 从而 $R(T) \subset R(T_{1\lambda})$, 故 $R(T_{1\lambda})$ 在 X 中稠密。

再由 $T_{1\lambda}^{-1}$ 无界, 则: 或者 $T_{1\lambda}^{-1}$ 无界此时 $\lambda \in \sigma_c(T_1)$, 或者 $T_{1\lambda}^{-1}$ 不存在此时 $\lambda \in \sigma_p(T_1)$ 。

9. 令 $\lambda \in \rho(T_1)$ 则 $T_{1\lambda}^{-1}$ 存在、有界且 $R(T_{1\lambda})$ 在 X 中稠密, 故 $T_{1\lambda}^{-1}$ 存在则 $\lambda \in \rho(T)$

否则 $\lambda \in \sigma_r(T)$

10. 令对应 T 的有关量为 $\rho, \sigma_p, \sigma_c, \sigma_r$

对应 T_1 的有关量为 $\rho_1, \sigma_{p1}, \sigma_{c1}, \sigma_{r1}$,

则 $\rho \cup \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r = \rho_1 \cup \sigma_{p1} \cup \sigma_{c1} \cup \sigma_{r1}$

由习题6与8

$\sigma_p \cup \sigma_c \subset \sigma_{p1} \cup \sigma_{c1}$

右边二集不相交, 则

$\rho \cup \sigma_r \supset \rho_1 \cup \sigma_{r1} \supset \rho_1$

习 题 6.3

1. $\sigma(T)$ 为函数 v 的值域, 由 v 为定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数, 其值域为一闭区间。

2. 例如: $v(t) = a + (b - a)t \quad Tx = vx$

3. $\{\lambda\} \quad \because R_\lambda(T|_Y)$ 不存在且 $\lambda^* \neq \lambda$ 时 $R_{\lambda^*}(T|_Y) \in \rho(T|_Y)$

4. $\sigma_p(T) = \{q \mid q = \alpha_i\}$; 由 $\sigma(T)$ 是闭且 α_i 在 $[0, 1]$ 中稠密, 故 $\sigma(T) = [0, 1]$

5. $R_\lambda(T)$ 存在, 且 $T_\lambda(l^2)$ 其中 $x \in l^2$, 在 l^2 中稠密故 $\lambda \notin \sigma_p(T)$ 因此 $\lambda \in \sigma_c(T)$

6. 因 C 为可分, 故 $K \subset C$ 亦可分, 设 (α_i) 在 K 中稠密, 则 α_i 为 T 的特征值, 因此 $\sigma(T) = K$

7. 设 $|\lambda| > \|T\|$ 且 $y = T_\lambda x$ 则

$$\|y\| = \|\lambda x - Tx\| \geq |\lambda| \|x\| - \|Tx\| \geq (|\lambda| - \|T\|) \|x\|;$$

因而

$$\|R_\lambda(T)\| = \sup_{y \neq 0} (\|x\|/\|y\|) \leq 1/(|\lambda| - \|T\|)$$

8. 特征值为方程 $x'' - \lambda x = 0$; $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$ 有非零解的 λ , 则 $\lambda = -n^2 (n \in N)$ 故谱无界

9. (a) l^∞ 为 Banach 空间 $T \in B(l^\infty, l^\infty)$ 且 $\|T\| = 1$

由定理 6.3-4 $|\lambda| \geq \|T\| = 1$ 时 $\lambda \in \rho(T)$

(b) $|\lambda| \leq 1$, 考察 T_λ^{-1} 存在

$$T_\lambda x = (\xi_2 - \lambda \xi_1, \xi_3 - \lambda \xi_2, \dots) = 0$$

$$\implies x = (a, a\lambda, a\lambda^2, \dots) \in l^\infty, a \in C \text{ 且 } a \neq 0$$

$x \neq 0$, 故 $|\lambda| \leq 1$ 均为特征值.

特征空间 $y = \{x \in l^\infty \mid x = (a, a\lambda, a\lambda^2, \dots), a \in C\}$

10. $|\lambda| = 1$ 不是 T 的特征值, 因为 $(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \notin l^p$

$$1 \leq p < \infty$$

$$\text{即 } T_\lambda x = \theta \implies x = \theta.$$

习 题 6.4

$$1. T_\lambda = T - \lambda I \quad T_\mu = T - \mu I$$

则 $T_\lambda T_\mu = T_\mu T_\lambda$

$$(T_\lambda T_\mu)^{-1} = (T_\mu T_\lambda)^{-1} \text{ 得 } R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$$

$$2. \quad R_\mu R_\lambda = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = R_\lambda R_\mu$$

3. 由 $R_\lambda(S)S_\lambda = I$ 且 $T_\lambda R_\lambda(I) = I$, 及 $T_\lambda = T - \lambda I$, $S_\lambda = S - \lambda I$

$$\begin{aligned} R_\lambda(S)(T - S)R_\lambda(T) &= R_\lambda(S)(T_\lambda - S_\lambda)R_\lambda(T) \\ &= (R_\lambda(S)T_\lambda - I)R_\lambda(T) \\ &= R_\lambda(S) - R_\lambda(T) \end{aligned}$$

4. A、假设 $p(T)x = y$ 有解则 $x = p(T)^{-1}y$, 其中 $p(T)^{-1}$ 在全空间 X 上有定义.

$\lambda = 0$ 时 $(p(T) - I_\lambda)^{-1}$ 存在故 $0 \in \rho(p(T))$, 即 $0 \notin \sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$

故对所有的 $\lambda \in \sigma(T)$ $p(\lambda) \neq 0$

B. 反之, 对所有 $\lambda \in \sigma(T)$ $p(\lambda) \neq 0$ 则 $0 \in \rho(p(T))$, 由引理 6.2-3 用于 $p(T)$ 知 $p(T)^{-1}$ 定义在全空间 X , 故对所有的 y , $p(T)x = y$ 有唯一解.

5. 多项式 $p(\lambda) - \mu$ 只能在复数域内才一般的可分为一次因子的乘积.

6. 若方阵具有 n 个不同的特征值.

7. 若 $\lambda \in \sigma(T)$ 由 6.4-2 定理

$$\sigma(aT) = a\sigma(T) \text{ 即 } \lambda \in \sigma(T) \iff a\lambda \in \sigma(aT)$$

由 6.3-5 定义

$$r_o(aT) = \sup_{a\lambda \in \sigma(aT)} |a\lambda| = |a| \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = |a| r_o(T)$$

同理可证: $r_o(T^k) = [r_o(T)]^k$

$$8. (a) \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda = \pm 1$$

(b) 显然 $A^2 = I$

I 之特征值为 1, 由 6.4-2 A 之特征值为 $\pm\sqrt{1} = \pm 1$

9. 例

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(a) R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda} \left[I - T + T \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{\lambda} (I - T) - \frac{1}{\lambda - 1} T$$

其在 $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ 不存在 $\therefore \sigma(T) = \{0, 1\}$

(b) 令 $p(T) = T^2 - T$ 故 $p(T) = 0$

相应 $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0$ $\lambda = 0, \lambda = 1$

10. (a) 由 $T_B^2 = T_B$ 可得

$$(b) \text{ 计算 } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ 可得}$$

$\lambda = 1$ 的对应的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

特征空间为 $\xi_1\xi_2$ 平面上的直线 $\xi_2 = -\xi_1$

$$\lambda = 0 \text{ 所对应的特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

特征空间的平面为 $\xi_1 = \xi_2$

习 题 6.5

$\dim X < \infty$, 由2.4-2定理知其 完备.

$$2. \quad \|xy\| = \max |x(t)y(t)|$$

$$\leq \max |x(t)| \max |y(t)| = \|x\| \|y\|$$

3. C^n 为Banach空间, 在其中引进乘法, 对任意 $x, y \in$

$$C^n \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n).$$

$$\text{定义 } xy = (\xi_1\eta_1, \dots, \xi_n\eta_n)$$

易验证其满足(1), (2a), (2b), (3)

且其为具有单位元素 $e = (1, \dots, 1)$ 的交换代数.

$$\text{由 } \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|y\| = \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|xy\| = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i\eta_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2 \right)^{1/2}$$

证得(6)式 $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ 成立.

4. (a) 所有 $x \neq 0$

(b) 对 $t \in [a, b]$ 函数值均不为零的所有 $x(t)$

(c) 所有 n 阶可逆方阵.

5. 设 n 阶方阵为 A , λ 为其谱值

(a) 依6.5-6定义, $A - \lambda E$ 不可逆, 则 $\det |A - \lambda E| = 0$

得 $(A - \lambda E)x = 0$ $Ax = \lambda x$ 有非零解, 符合

6.1-1定义.

(b)依6.1-1定义 $Ax = \lambda x$ 有非零解, 则 $\det |A - \lambda E| = 0$ 得 $A - \lambda E$ 为非可逆矩阵, 其符合6.5-6定义.

6. 考察 $\sin t - \lambda \cdot 1$ 不可逆, 即 $\sigma(\sin t) = [-1, 1]$ 为 $\sin t$ 之值域, 同理, 一般 $\sigma(x) = x$ 在 $[a, b]$ 上的值域.

7. 向量空间到自身的线性算子已知为一线性空间, 用线性算子合成为一线性算子来定义乘法, 其满足(1), (2a), (2b), (3). 构成一代数

$$8. y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z,$$

$$9. x^{-1}y = x^{-1}y(xx^{-1}) = (x^{-1}x)yx^{-1} = yx^{-1},$$

10. A ; n 阶方阵 $A_1: n$ 阶主对角线以外均为零的矩阵.

$C; \alpha E$.

若 $x, y \in C \subset A$, 即与 A 中任意元素可交换, 则 $\alpha x + \beta y$, xy 均可与 A 中任意元素可交换且 $xy = yx$, 并满足有关运算规律, 故 C 为 A 的可交换的子代数.

习 题 6.6

1. 由6.6-1定理直接可得.

2. 由(1)式

$$\|(ex)^{-1} - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \cdots\| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|x\|^i = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

3. 由6.6-1定理

$$(e - yx^{-1})^{-1} = e + \sum_{i=1}^{\infty} (yx^{-1})^i$$

$$\text{又 } (x - y)^{-1} = [(e - yx^{-1})x]^{-1} = x^{-1}(e - yx^{-1})^{-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} x^{-1} (yx^{-1})^j$$

4. 形如

$$x = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的复矩阵所成之集 A , 不难验证为一代数 即对任意 $x, y \in A$ 及 $c_1, c_2 \in k$.

$$\alpha x + \beta y \in A \quad xy \in A \quad \text{并满足 6.5 (1) (2) (3)}$$

$$\det (x - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} (\alpha - \lambda)\lambda = 0 \\ \lambda = 0, \quad \lambda = \alpha. \end{matrix}$$

$$\sigma(x) = \{0, \alpha\}.$$

5. $x \in \tilde{\rho}(x) = C - \tilde{\sigma}(x)$ 则 $x - \lambda e$ 在 B 中可逆

由 $A \supset B$ 其在 A 中亦可逆即 $x \in \rho(x)$

故 $\tilde{\rho}(x) \subset \rho(x)$ 即 $\tilde{\sigma}(x) \supset \sigma(x) = C - \rho(x)$

$$\begin{aligned} 6. \quad v(\mu) - v(\lambda) &= (x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} \\ &= (x - \mu e)^{-1} (x - \lambda e) (x - \lambda e)^{-1} \\ &\quad - (x - \mu e)^{-1} (x - \mu e) (x - \lambda e)^{-1} \\ &= (x - \mu e)^{-1} [(x - \lambda e) - (x - \mu e)] \\ &\quad (x - \lambda e)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda) (x - \mu e)^{-1} (x - \lambda e)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda) v(\mu) v(\lambda). \end{aligned}$$

7. 否则 A 会含 $-x$, 对所有 $\lambda \in C$ $x - \lambda e \neq 0$, 即 $\sigma(x) = \emptyset$, 与 $\sigma(x) \neq \emptyset$ 矛盾.

8. 对任意 $x_0 \in G$, 设 $x \in G$ 且满足

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{2 \|x_0^{-1}\|}$$

$$\begin{aligned}\text{则 } \|e - x_0^{-1}x\| &= \|x_0^{-1}x - e\| = \|x_0^{-1}(x - x_0)\| \leq \|x_0^{-1}\| \\ &\cdot \|x - x_0\| < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

由习题1知 $x_0^{-1}x \in G$, 再由6.6-1定理

$$x^{-1}x_0 = (x_0^{-1}x)^{-1} = e + \sum_{i=1}^{\infty} (e - x_0^{-1}x)^i$$

由下式可知映射为连续的

$$\begin{aligned}\|x^{-1} - x_0^{-1}\| &= \|(x^{-1}x_0 - e)x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\| \|x^{-1}x_0 - e\| \\ &= \|x_0^{-1}\| \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (e - x_0^{-1}x)^i \right\| \\ &\leq \|x_0^{-1}\| \sum_{i=1}^{\infty} \|e - x_0^{-1}x\|^i \\ &= \frac{\|x_0^{-1}\| \|e - x_0^{-1}x\|}{1 - \|e - x_0^{-1}x\|} \\ &< 2 \|x_0^{-1}\| \|e - x_0^{-1}x\| \\ &\leq 2 \|x_0^{-1}\|^2 \|x - x_0\|\end{aligned}$$

9. 对任意非零元素 $x \in A$, 由题设存在 $v \in A, vx = e$, 且 $v \neq 0$ 否则 $0 = vx = e$ 矛盾.

令 $xv = w$, 则 $w \neq 0$, 不然

$v = ev = vxv = vw = 0$ 与 $v \neq 0$ 矛盾.

对 w 存在 $y \in A$ $yw = e$ 即 $yxv = e$, 则 v 有一左逆元素 yx , 和一右逆元素 x , 且由 § 6.6 习题8知 $yx = x$, 又已知 $yxv = e$ 得 $xv = e$ 与 $vx = e$ 联合则得 x 存在逆元素.

$$\begin{aligned}10. \|x_n y_n - x_m y_m\| &= \|(x_n - x_m) y_n + x_m (y_n - y_m)\| \\ &\leq \|x_n - x_m\| \|y_n\| + \|x_m\| \|y_n - y_m\|\end{aligned}$$

由Cauchy序列有界得 (x_n, y_n) 为Cauchy序列再由

$$\|x_n y_n - xy\| \leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|$$

当 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ 时 $x_n y_n \rightarrow xy$.

习 题 7.1

1. 零算子为线性. 且 $T(M) = \{\theta\}$ 为紧集.

2. 若 (x_n) 有界, 则存在子序列 (y_k) 使得 $(T_1 y_k)$ 收敛, 且 (y_k) 存在一子序列 (z_m) 使得 $(T_2 z_m)$ 收敛. 则 $(T_1 + T_2)(z_m) = T_1 z_m + T_2 z_m$ 收敛

又 $(\alpha T_1)(z_m) = \alpha T_1 z_m$ 收敛

又紧算子为有界算子故 $C(X, Y)$ 为 $B(X, Y)$ 的子空间.

3. 对任意的 $T \in \overline{C(X, Y)}$, 根据 1.4-7(a) 在 $C(X, Y)$ 中存在一序列 (T_n) , 依 $B(X, Y)$ 的范数收敛于 T , 由 $B(X, Y)$ 为完备及 7.1-5 知 T 为紧的即 $T \in C(X, Y)$

4. 由习题 3 知 $C(X, Y)$ 为 $B(X, Y)$ 中闭子空间, 再根据 1.4-8 及 2.7-14 知 $C(X, Y)$ 为完备.

5. 由 $\|T_n x\| \leq \|x\|$ 可得

6. 若 T 为紧的, 由 M 有界知 $T(M)$ 为紧的. 反之,

$\overline{T(M)}$ 为紧的, 若 B 为 X 的任意有界子集, 存在足够大的正数 r 有 $B \subset rM = \{x \in X \mid x = ry, y \in M\}$ 由 T 为线性 $T(B) \subset T(rM) = rT(M)$ 则 $\overline{T(B)} \subset r \overline{T(M)}$, 根据紧集定义

$\overline{rT(M)}$ 为紧的, $\overline{T(B)}$ 亦为紧的.

7. 由定理 7.1 - 3 可得 (可将有界序列除以其界, 变为范数不超过 1 的向量序列).

8. 由 f 为线性知 T 亦为线性. 再由 f 有界

$$\|Tx\| = |f(x)| \|z\| \leq C \|x\|$$

知 T 有界. 再者 $\dim T(X) \leq 1$ 由定理7.1-4(a)得证.

9. 不难证: T 为线性、有界, 且 $\dim T(X) \leq 1$. 再由7.1-4(a)得证,

10. 将7.1-4定理与7.1-5定理结合起来得证.

11. 投影算子为线性、有界的利用7.1-(4)可证.

12. 证明过程类似于7.1-6例.

13. 同习题12.

14. 令 $T_n: l^\infty \rightarrow l^\infty \quad x = (\xi_j) \in l^\infty$

$$T_n x = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots)$$

$$\|(T - T_n)x\| = \sup_{j > n} \frac{|\xi_j|}{j} \leq \frac{\|x\|}{n+1}$$

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

由7.1-5得证.

15. 由 \bar{A} 为紧的 由2.5-6知 $T(\bar{A})$ 为紧的, 再由2.5-2

其为闭的. 由 $T(A) \subset T(\bar{A})$ 推得 $\overline{T(A)} \subset \overline{T(\bar{A})} = T(\bar{A})$,
故 $\overline{T(A)}$ 是紧集 $T(\bar{A})$ 的子集且为闭, 根据2.5节习题9知
 $\overline{T(A)}$ 为紧的, 故 $T(A)$ 为相对紧的.

习 题 7.2

1. 对给定的 $\varepsilon > 0$, 空间 X 有一 $\varepsilon/2$ -网 $M = \{x_1, \dots, x_r\}$ 因

此 Y 包含于 s 个球 $B(x, \varepsilon/2), \dots, B(x_s, \varepsilon/2)$ 之中, 由 Y 为无限, 其中一球必包含 Y 之无限子集 Z , 其直径小于 $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

2. 设 (x_n) 为 X 中任意Cauchy序列, 由 X 为紧的则 (x_n) 存在一收敛的子序列, 如 $x_{n_k} \rightarrow x \in X$, 当 $k \rightarrow \infty$. 令 $\varepsilon > 0$ 因 (x_{n_k}) 收敛且 (x_n) 为Cauchy序列则存在 N 使得

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n_k, n > N)$$

由

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$(n_k, n > N)$$

知 (x_n) 收敛证得 X 完备.

反之: 对于实直线 R 其为完备, 但非紧的 (即非有界的)

3. 由7.2-2引理(a)知紧性 \implies 全有界性.

反之: 在 R 中开区间 (a, b) 为全有界的, 但非紧的 (非闭的).

4. 若 X 为紧的, 由7.2-2(a)则其为全有界的, 再由习题2知其为完备的.

反之, 由7.2-2(b)令 $B = X$ 及 $X = \overline{X}$ 知 X 为紧的.

5. 因 X 为紧的则其为全有界的.

6. 算子 $T_n: l^2 \rightarrow l^2$ 由

$$T_n x = y_n = (\eta_1, \dots, \eta_n, 0, 0 \dots)$$

定义 (其中 η_i 为习题中所表明的)

则 T_n 为线性、有界, 由7.1-(a)得知 T_n 为紧的 再由1.2节中Schwarz不等式(11)

$$\begin{aligned}\|(T - T_n)x\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k \right|^2 \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \sum_{l=1}^{\infty} |\xi_l|^2\end{aligned}$$

这蕴涵着 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 应用 7.1-5 命题得证.

7. 对习题 6 中的 T_1, T_2 , 易验证 $\alpha T_1 + \beta T_2$ 亦为同类算子.

又 $Tx = (\eta_j) = (\xi_j / \sqrt{j})$ 定义一紧线性算子, 但 $\sum \sum |a_{jk}|^2 = \sum \frac{1}{n}$ 发散.

8. 不可能存在. 因为 l^∞ 为不可分的 (参看 1.3-7 及 7.2-3)

9. 可以.

10. 设 $T_n x = (\lambda_1 \xi_1, \dots, \lambda_n \xi_n, 0, 0, \dots)$. 则 T_n 由 7.1-4(a) 知为紧的. 令 $\varepsilon > 0$, 存在 N 对所有 $j > N$ $|\lambda_j| < \varepsilon$. 且令 $n > N$, 则

$$\begin{aligned}\|Tx - T_n x\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_k \xi_j|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2\end{aligned}$$

则 $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$. 由 7.1-5 知 T 为紧的.

习 题 7.3

1. 由 $S = T^p$ 为紧的, 由定理 7.3-1 知 S 的特征值为可数且 $\lambda = 0$ 为可能存在的唯一聚点, 再应用 6.4-2 多项式谱映射定理知

$$\sigma(S) = \sigma(T^p) = [\sigma(T)]^p$$

则 $\sigma(T)$ 为可数且 $\lambda = 0$ 为可能存在的唯一聚点.

2. 由 T_1 为紧的则对 X 中任一有界序列 (x_n) , 其含有一有界子序列其象在 Y 中收敛, 再由 T_2 为紧, 存在一子序列其在 Z 中收敛. 故 T_2T_1 为紧的[参看7.1-3, 7.3-2与7.1-2(a)].

3. 由7.3-1定理知绝对值大于 $k > 0$ 的特征值为有限, 再由定理7.3-3知对应每一特征值 $\neq 0$ 的特征空间的维数为有限, 故命题得证.

4. 设 $B_1 \subset X$ 为任一有界集, 则 $T_1(B_1)$ 为有界(定理2.7-7)故 $M = T_2T_1(B)$ 为相对紧的, 则 \overline{M} 为紧的, 由2.5-6及2.5-2知 $T_3(\overline{M})$ 为紧且闭的, 再由 $T_3(M) \subset T_3(\overline{M})$ 则 $\overline{T_3(M)} \subset T_3(\overline{M})$ 则 $\overline{T_3(M)}$ 为紧的(2.5节习题9).

另一证明: 设 (x_n) 为 X 中任意有界序列, 则 (T_1x_n) 为有界(2.7节), $(T_2T_1x_n)$ 含有一收敛的子序列 (y_k) (7.1-3), 则 (T_3y_k) 收敛(2.7-9, 1.4-8), 则 $T_3T_2T_1$ 为紧的(7.1-3).

5. 设 (x_n) 为有界, 如对所有的 n $\|x_n\| \leq C$, 则

$$\|Sx_n\| \leq \|S\| \|x_n\| \leq \|S\| C$$

故 (Sx_n) 为有界, 由 T 为紧故 (Sx_n) 含有一子序列 (Sx_{n_k}) 使得 (TSx_{n_k}) 收敛, 此即证明 TS 为紧.

6. 若 T 为紧的则 T^*T 亦为紧的(7.3-2)

反之: 设 T^*T 为紧的, 令 (x_n) 为有界, 如 $\|x_n\| < C$, 则其含一子序列 x_{n_k} 使得 $(T^*Tx_{n_k})$ 收敛. 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一 N 使得

$$\|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad (k, j > N)$$

由此得出

$$\begin{aligned}
 \|Tx_{n_k} - Tx_{n_j}\|^2 &= \|T(x_{n_k} - x_{n_j})\|^2 \\
 &= \langle (T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j})(x_{n_k} - x_{n_j}) \rangle \\
 &\leq \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| \cdot \|x_{n_k} - x_{n_j}\| \quad (3.1-2) \\
 &\leq \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| \cdot 2C < \varepsilon \\
 &\quad (j, k > N)
 \end{aligned}$$

(则 Tx_{n_k})收敛因而 T 为紧的.

7. T^* 为线性有界(3.6-2), 由引理7.3-2知

TT^* 为紧的, 又 $TT^* = (T^*)^*T^*$, 由习题6得知 T^* 为紧的.

8. 否则, $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, 由引理7.3-2知其为紧的, 这与引理7.1-2(b)矛盾.

9. 令 $N = N(T)$, 假设 $\dim N = \infty$, 则 N 含有无限多个线性无关子集, 从中可取一各项均不同的序列 (x_n) , 现考察 $K_m = \text{Span}\{x_1, \dots, x_m\}$, 则, $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, 各为 N 的真闭子空间, 且每个 K_i 均是 K_{i+1} 的真子集. 设 $y_1 = \|x_1\|^{-1}x_1$,

由2.5-4 (用 $\theta = \frac{1}{2}$) 存在一 $y_2 \in K_2$, 使得 $\|y_2\| = 1$, 且 $\|y_2$

$- y_1\| \geq \frac{1}{2}$, 还存在一 $y_3 \in K_3$ 使得 $\|y_3\| = 1$, 且 $\|y_3 - y_1\| \geq$

$\frac{1}{2}$, $\|y_3 - y_2\| \geq \frac{1}{2}$; 等等. 由此就得一无限序列 (y_m) 使得

$\|y_m\| = 1$. 若 $p \neq q$, 有 $\|y_p - y_q\| \geq \frac{1}{2}$, 因此,

$$(A) \quad \|\lambda y_p - \lambda y_q\| \geq |\lambda|/2 \quad (p \neq q)$$

由 $y_p \in N$, 则有 $0 = T_\lambda y_p = (T - \lambda I)y_p$, 因此,

$$(B) \quad T y_p = \lambda y_p$$

因 $\lambda \neq 0$, 由关系 (A) 与 (B) 得知 $(T y_p)$ 不含有收敛的子序列, 但这与 T 为紧的且 (y_p) 有界相矛盾, 因此, $\dim N = \infty$ 不可能成立.

10. 在习题9中得 $T y_m = \lambda y_m$, 因此 $T^p y_m = \lambda^p y_m$, 由 T^p 是紧的, 则序列 $(T^p y_m) = (\lambda^p y_m)$ 应有一收敛的子序列, 但由 $\lambda \neq 0$ 及习题9解答中之 (A) 得

$$\|\lambda^p y_m - \lambda^p y_q\| \geq |\lambda^p|/2 \quad (m \neq q)$$

故不可能, 由此矛盾使命题得证.

11. 若 $\dim X = \infty$, 则 $T = I$ 不是紧的 [参看 7.1-2(b)], 若 $\lambda = 1 \neq 0$ 得 $\dim N(T_\lambda) = \dim X = \infty$.

又: 若 $\dim X = \infty$ 则 $T = 0$ 为紧的. 对 $\lambda = 0$ 得 $\dim N(T_\lambda) = \dim X = \infty$

12. 若 $\dim N(T_\lambda) = \infty$, 则 $N(T_\lambda)$ 中包含一无限的直交序列 (x_n) , 因此 $T_\lambda x_n = 0$ 即 $T x_n = \lambda x_n$. 用 § 3.2 的习题1对任意 m 且 $n \neq m$ 有

$$\begin{aligned} \|T x_n - T x_m\|^2 &= \|\lambda x_n - \lambda x_m\|^2 = |\lambda|^2 \|x_n - x_m\|^2 \\ &= 2 |\lambda|^2 \end{aligned}$$

由 $\lambda \neq 0$ 及上式可知序列 $(T x_n)$ 不会含有收敛的子序列, 根据 (x_n) 为有界这就与 T 的紧性相矛盾.

13. 类似于习题9, 若假设 $\dim N(T_\lambda) = \infty$, 从 2.5-4 可得出 (y_m) , $\|y_m\| = 1, y_m \in N(T_\lambda) = \infty$, 同时 $\|y_m - y_q\| \geq \frac{1}{2}$,

对 $m \neq q$, 因此 (参看课文 7.3-4 证明靠末尾的地方)

$$0 = T^p y_m = (W - \mu I) y_m$$

因 T^p 为紧的且 S^p 为有界的, 由 $W^p = (TS)^p = (ST)^p = S^p T^p$ 知为紧的, 故 $(W^p y_m) = (\mu^p y_m)$ 必含一收敛的子序列, 但由 $\lambda \neq 0$ 因而 $\mu \neq 0$ 且

$$\|\mu^p y_m - \mu^p y_p\| \geq |\mu^p| / 2 \quad (m \neq p)$$

知这是不可能的.

14. 反之, 若 $0 \in \rho(T)$, 由7.1-2(a) 及6.2-3知 $T^{-1} = R_0(T)$ 存在、有界且定义在全空间 X 上, 再由7.3-2知 $T^{-1}T = TT^{-1} = I$ 为紧的, 但这与7.1-2(b)矛盾.

15. 若 $\lambda = 0$ $N(T_1^n) = \{x \mid \xi_{2k} = 0\}$

若 $\lambda = 1$ $N(T_1^n) = \{x \mid \xi_{2k-1} = 0\}$

若 $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ $N(T_1^n) = \{\theta\}$.

T 不是紧的.

习 题 7.4

1. 在7.4-1引理证明中, 对(3)式使用 T , 对 $n > m$ 得

$$\begin{aligned} T^2 y_n - T^2 y_m &= \lambda^2 (y_n - x_2) & x_2 \in N_{s-1} \\ \dots &= \dots & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^p y_n - T^p y_m &= \lambda^p (y_n - x_p) & x_p \in N_{s-1} \\ \|T^p y_n - T^p y_m\| &\geq |\lambda^p| / 2 \end{aligned}$$

其他相同.

2. 设 $N_m = N_{m+1}$ 且 $n > m$. 则由 $x \in N_{s+1}$ 蕴涵

$$0 = T_1^{n+1} x = T_1^{m+1} (T_1^{n-m} x)$$

则 $T_1^{n-m} x \in N_{m+1} = N_m$ 且 $T_1^n x = T_1^m (T_1^{n-m} x) = 0$ 即 $x \in N_s$.

3. 由6.2节习题9知 $\lambda \in \rho(\tilde{T})$ 蕴涵 $\lambda \in \rho(T) \cup \sigma_r(T)$
(后面7.6-4定理证明 $\lambda \neq 0$ 时 $\lambda \in \rho(T)$)

4. T 的紧性证明类似7.1-6例

若 $\lambda = 0$ 则 $(1, 0, 0, \dots)$ 为对应之特征向量则 $\lambda \in \sigma_p(T)$

若 $\lambda \neq 0$ 由 $Tx = \lambda x$ 得 $\xi_{n+1} = n! \lambda \cdot \xi_1$ 由 $x \in l^2$ 知

$\xi_1 = 0$ 因而 $x = 0$ 即 $\lambda \notin \sigma_p(T)$

5. 若 $\lambda \neq 0$ 为使 $Tx = \lambda x$ 则由 $0 = \lambda \xi_1$,
 $\xi_{n-1}/(n-1) = \lambda \xi_n (n=2, 3, \dots) \implies x = 0$ 即 $\lambda \in \rho(T)$

若 $\lambda = 0$ 令 $Tx = (\eta_i)$ 则 $\eta_1 = 0$ 故 $\overline{R(T)} \neq l^2$
即 $0 \notin \sigma_c(T)$ 又因为 $\sigma_p(T) = \emptyset$ 故 $0 \in \sigma_r(T)$.

6. 0为特征值, 特征向量 $x_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$
当 $n \rightarrow \infty$ 即习题5中情况无特征值, 转化为剩余谱.

7. $\{\alpha_i\}$ 中任一 α_i 均为 T 的特征值, 由 $\sigma(T)$ 是闭集,
 $[0, 1] = \{\overline{\alpha_i}\} \subset \sigma(T)$. 根据7.4-4 $(0, 1] \subset \sigma_p(T)$.
由定理7.3-1知 T 不能为紧的.

8. 由 $T^m x = (\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots)$ 故 $N(T^m) = \{x \in l^2 \mid \xi_j = 0, j > m\}$ 故不存在整数 m 使得 $N(T^m) = N(T^{m+1})$

又 $T^{n+1}(X) = T^n(X)$ 对 n 为非负整数均成立, 故
 $n_0 = 0$.

9. 若 $\lambda \notin [0, 1]$ 则 $T^{-1}x(t) = x(t)/(t-\lambda)$ 故
 $\sigma(T) = [0, 1]$ 为不可数. 再由7.4-4与7.3-1知若 T 为紧的
则与其具有不可数个特征值矛盾.

10. $\sigma(T) = \{0, 2\}$, $\lambda = 0$ 时 $r = 1$, $\lambda = 2$ 时 $r = 1$,
 $\lambda \neq 0, 2$ $r = 0$ 且

$$\begin{aligned} N(T_0) &= \{\alpha(1, 1)\}; & N(T_2) &= \{\gamma(1, -1)\} \\ T_0(R^2) &= \{\beta(1, -1)\}; & T_2(R^2) &= \{\delta(1, 1)\} \end{aligned}$$

习 题 7.6

1. 泛函 f_0 定义为

$$f_0(y) = f_0(T_1 x) = g(x) \quad \text{其中 } y = T_1 x$$

由 T_1 与 g 均为线性知 f_0 亦为线性.

2. 方程组 $\sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \xi_k = n_j \quad (j=1, \dots, n)$

有一解 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 的充分必要条件是
对齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{j,k} \beta_j = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

所有解 $b = (\beta_j)$ 均满足

$$\sum_{j=1}^n \beta_j n_j = 0.$$

3. 令

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \dots, & \alpha_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}, & \dots, & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

则由 $Ax = y$

$$\text{知: } \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \xi_k = \eta_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

相当于第五节中的式(4)为

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{j,k} \varphi_j = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

其一解为 $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

由4.4-3例, 知

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{j=1}^n \varphi_j \eta_j = \sum_{j=1}^n \varphi_j \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \xi_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_k \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,k} \varphi_j \right) = 0. \end{aligned}$$

4. 由定理7.14(b)知在有限维空间中, 任意线性算子均为紧的, 再由7.6-1得到相应结论.

5. 令 $A = T - \lambda I$ 则7.5节(1)式成为 $Ax = y$, 其有一解的充分必要条件是满足(4)式 $\sum_j \alpha_{j,k} \omega_j = 0 (k=1, \dots, n)$ 任意解 $\omega = (\omega_j)$ 同时亦满足(5)式 $\sum_j \eta_j \omega_j = 0$. 再利用 A 的列向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 与点积, 该条件成为

$$\omega \cdot \alpha_k = 0 \quad (k=1, \dots, n) \implies \omega \cdot y = 0$$

即向量 ω 若与 A 的所有列向量直交时则其亦与增广矩阵所有列向量直交, 由此得知二矩阵有相同的秩.

6. 若(1)有解 x_* 且(2)有解 $x \neq 0$ 则 $x + x_* \neq x_*$ 仍为(1)的解, 同理若(3)有解 f_* 且(4)有解 $f \neq 0$ 则

$f + f_* \neq f_*$ 仍为(3)的解.

7. (1) 式 $Tx - \lambda x = y$ 有解 $\iff (T - \lambda I)x = y$ 有解
 $\iff R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ 存在

其充分必要条件为

(2) 式 $Tx - \lambda x = 0 \implies x = 0 \iff Tx = \lambda x \implies x = 0$.

8. (a) 设所要求的 (f_i) 存在, 但对某一 $m_0, z_{m_0} \in \overline{A_{m_0}}$ 则由4.5节习题8知, $f_{m_0}(z_{m_0}) = 0$, 这与 $f_{m_0}(z_{m_0}) = 1$ 矛盾.

(b) 反之, 对任意 m_0 令 $z_{m_0} \notin \overline{A_{m_0}}$, 由4.5节习题5, 存在

一 $g_{m_0} \in X^*$, 其在 $\overline{A_{m_0}}$ 上的值均为零而在 z_{m_0} 上的值为1, 因此对 $k \neq m_0$ $g_{m_0}(z_k) = 0$ 且 $g_{m_0}(z_{m_0}) = 1$.

9. 有限双直交系 $(z_1, \dots, z_k); (f_1, \dots, f_k)$

z_1, \dots, z_k 线性无关. 且 $A_m = \overline{A_m}$.

10. 对集 $\{z_1, \dots, z_n\}$ 若 $\sum \alpha_k z_k = 0$

以任意的 y 作内积:

$$\sum \alpha_k \langle z_k, y \rangle = \alpha_j = 0$$

同理可证 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 线性无关.

11. 根据3.5-1Riesz表示定理, 双直交系

$\{z_1, z_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}$ 的条件形式为 $\langle z_k, y_j \rangle = \delta_{kj}$

12. 对 H 中任一线性无关集 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 在 H 中存在一集 $\{z_1, \dots, z_m\}$ 使得 $\langle z_k, y_j \rangle = \sigma_{kj}$,

证明: 将 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 标准正交化得 $\{e_1, \dots, e_m\}$

(参看§3.4)

则:
$$y_j = \sum_{s=1}^m \alpha_{j,s} e_s; \quad e_s = \sum_{r=1}^m \beta_{s,r} y_r$$

其中: 若 $s > j$ $\alpha_{j,s} = 0$; 若 $r > s$ $\beta_{s,r} = 0$ 因此

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^m \alpha_{j,s} \beta_{s,r} y_r \\ &= \sum_{r=1}^m \left(\sum_{s=1}^m \alpha_{j,s} \beta_{s,r} \right) \cdot y_r \end{aligned}$$

故

$$\sum_{s=1}^m \alpha_{j,s} \beta_{s,r} = \delta_{j,r} = \begin{cases} 0, & \text{若 } j \neq r \\ 1, & j = r. \end{cases}$$

选取

$$z_k = \sum_{i=1}^m \overline{\beta}_{i,k} e_i,$$

则可得预期结果:

$$\begin{aligned} \langle z_k, y_i \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m \overline{\beta}_{i,k} e_i, \sum_{s=1}^n \alpha_{j,s} e_s \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^n \overline{\beta}_{i,k} \overline{\alpha}_{i,s} \delta_{i,s} \\ &= \sum_{s=1}^n \overline{\beta}_{s,k} \overline{\alpha}_{j,s} = \delta_{j,k}. \end{aligned}$$

13. 若 $A = (\alpha_{i,k})$

两方程组

$$\sum_k \alpha_{j,k} \xi_k = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

与

$$\sum_i \alpha_{i,k} \eta_i = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

具有相同数目的线性无关解 (即若 $r = \text{rank } A = n$ 时只有平凡解, 若 $r < n$ 时有 $n-r$ 个线性无关解)

14. 令 $\dim R(T) = n$, $\{y_1, \dots, y_n\}$ 为 $R(T)$ 的一基

由4.5-7引理的结论中得知: 存在 $g_k \in Y^* (k=1, \dots, n)$ 使得 $g_k(y_j) = \delta_{j,k}$ (参看定理7.6-3(a)的证明部分). 且 $\{g_1, \dots, g_n\}$ 线性无关, 事实上, 若 $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = 0$, 则

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k \right) (y_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k(y_j) = 0 \end{aligned}$$

令 $x \in X$, 则 $Tx \in R(T)$. 具有表示式

$$Tx = f_1(x) y_1 + \dots + f_n(x) y_n.$$

其中 $f_k \in X^*$.

这蕴涵着

$$g_k(Tx) = (T^*g_k)(x) = f_k(x)$$

下面证明 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 线性无关. 对于 y_i , 存在 $x_i' \in X$, 使得 $Tx_i' = y_i$. 令 $\beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n = 0$ 则,

$$\begin{aligned} \beta_i &= \left(\sum_{k=1}^n \beta_k f_k \right) (x_i') = \sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x_i') \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_k (T^*g_k)(x_i') = \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(Tx_i') \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(y_i) = 0 \end{aligned}$$

15. 给定级数为一致收敛, 通过逐项积分, Tx 可由 Fourier 级数表示. 因 $Tx \in C[0, \pi]$ 则 $Tx = 0$ 当且仅当 $x = 0$, 若 $y(0) \neq 0$, 则上述级数各项在 $s = 0$ 时为零, 故 $Tx = y$ 无解.

习 题 7.7

1. 在这种情况下, (2) 中的 T 为 n 阶方阵, x 与 y 为 n 行向量. 或是非齐次方程组对任意给定的方程右边的向量 y 均有唯一解; 或是对应齐次方程组至少有非平凡解, 在第一种情况下, 同样适用于其转置矩阵. 在第二种情况下, 齐次方程组与其转置方程组具有相同的 $(n-r)$ 个线性无关解, 其中 r 为系数矩阵的秩数.

2. 将 (1) 式乘以连续函数 z 并在 $[a, b]$ 上积分,

$$\int_a^b x(s)z(s)ds - \mu \int_a^b \left(\int_a^b k(s,t)x(t)dt \right) z(s)ds$$

$$= \int_a^b \tilde{y}(s) z(s) ds$$

由于函数连续, 故可交换积分次序, 并将 s 变换为 t , t 换为 s 后得到

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[z(s) - \mu \int_a^b k(t, s) z(t) dt \right] x(s) ds \\ &= \int_a^b \tilde{y}(s) z(s) ds \end{aligned}$$

因此若方括号 $[\dots]$ 内的表达式对某一 $z \neq 0$ 为0, 则(1)没有解, 除非 \tilde{y} 使得对所有 $[\dots] = 0$ 的解 z 均有

$$\int_a^b \tilde{y}(s) z(s) ds = 0$$

这就具体说明了定理7.5-1.

3. 例如

$$[a, b] = [0, 1]$$

$$k(s, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq S < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq S \leq 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

且 $x(t)$ 在 $[0, 1]$ 连续 $\int_0^1 x(t) dt \neq 0$.

$$\text{则 } (Tx)(S) = \int_0^1 k(s, t) x(t) dt = \begin{cases} \int_0^1 x(t) dt & 0 \leq S < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq S \leq 1 \end{cases}$$

即 $Tx \notin C[0, 1]$

$$4. \text{ 令 } Tx(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt.$$

则(1)式成为 $Tx - \lambda x = y$

$$- \lambda \left(I - \frac{T}{\lambda} \right) x = y$$

由7.3-1定理当 $\left\| \frac{T}{\lambda} \right\| < 1$ 即 $\|\mu T\| < 1$ 时

$$x = -\frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} y = \tilde{y} + \mu T \tilde{y} + \mu^2 T^2 \tilde{y} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |(T\tilde{y})(s)| &= \left| \int_a^b K(s, t)\tilde{y}(t)dt \right| \\ &\leq (b-a) \cdot M \cdot \|\tilde{y}\| \end{aligned}$$

$$\|T\tilde{y}\| / \|\tilde{y}\| \leq (b-a)M$$

即 $\|\mu T\| < 1$.

故 Neumann 级数收敛,

$$5. \text{ 令 } \int_0^1 x(t)dt = C$$

则 $x(s) = \mu \cdot C + 1$

$$\int_0^1 x(s)ds = \int_0^1 (\mu C + 1)ds$$

$$C = \mu C + 1$$

即 $C = 1/(1 - \mu)$. ($\mu \neq 1$).

$$\text{代入 } x(s) - \mu \int_0^1 x(t)dt = 1$$

得 $x(s) = 1/(1 - \mu)$. ($\mu \neq 1$)

Neumann 级数

$$x = -\mu(y + \mu T y + \mu^2 T^2 y + \cdots)$$

其中 $y = -1/\mu$; $T y = -1/\mu$; $T^2 y = -1/\mu$, $\cdots T^n y = -1/\mu$

所以 $x(s) = 1 + \mu + \mu^2 + \cdots = 1/(1 - \mu)$ ($|\mu| < 1$)

对应齐次方程:

$$x(s) - \mu \int_0^1 x(t) dt = 0$$

$$\mu \neq 1 \text{ 时 } x(s) = 0$$

$$\mu = 1 \text{ 时 } x(s) = C \text{ (任意)}$$

此结果与7.7-3定理一致.

$$6. \text{ 令 } \int_a^b x(t) dt = \alpha \quad \text{及} \quad \int_a^b \tilde{y}(s) ds = c$$

解方程得 $x(s) = \tilde{y}(s) + \mu k_0 c / [1 - \mu k_0 (b - a)]$

又 Neumann 级数

$$x = \tilde{y} + \mu T \tilde{y} + \mu^2 T^2 y + \cdots$$

即
$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu k_0 c + \mu^2 k_0^2 c (b - a) + \mu^3 k_0^3 c (b - a)^2 + \cdots$$

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu k_0 c / [1 - \mu k_0 (b - a)]$$

$$|\mu| < 1/k_0(b - a)$$

$$7. \text{ 由 } (T \tilde{y})(s) = \int_a^b K(s, t) \tilde{y}(t) dt$$

$$(T^2 \tilde{y})(s) = \int_a^b K(s, t) \cdot \left[\int_a^b K(t_1, t) \tilde{y}(t) dt \right] dt_1$$

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t) dt_1 \right] \tilde{y}(t) dt$$

对 n 可归纳证明

$$(T^n \tilde{y})(s) = \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_{n-1}, t) dt_1 \right. \\ \left. \cdots dt_{n-1} \right] \tilde{y}(t) dt.$$

則

$$\begin{aligned} x(s) &= \tilde{y}(s) + \mu \int_a^b K(s, t) \tilde{y}(t) dt \\ &\quad + \mu^2 \int_a^b K_{(2)}(s, t) \tilde{y}(t) dt + \cdots \\ &= \tilde{y}(s) + \mu \int_a^b \left[K_{(1)}(s, t) + \mu K_{(2)}(s, t) + \mu^2 K_{(3)}(s, \right. \\ &\quad \left. t) + \cdots \right] \tilde{y}(t) dt \end{aligned}$$

其中 $K_{(1)}(s, t) = K(s, t)$

$$= \tilde{y}(s) + \mu \int_a^b \tilde{K}(s, t, \mu) y^2(t) dt.$$

又 $\because K_n(s, t) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_{n-1}, t) dt_1$

$$\cdots dt_{n-1}$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b \cdots \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_{n-2}, t) dt_1 \right. \\ \left. \cdots dt_{n-2} \right] K(u, t) \cdot du$$

$$= \int_a^b K_{(n-1)}(s, u) \cdot K(u, t) du$$

8. $K_1(s, t) = K(s, t)$

$$K_2(s, t) = \frac{1}{2} \pi a_1 a_2 \sin S \cdot \sin 3t$$

$$K_n(s, t) = 0 \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

$$\therefore \tilde{K}(s, t, u) = (a_1 \sin s \cdot \sin 2t + a_1 \sin 2s \cdot \sin 3t) \\ + \frac{1}{2} \mu \pi a_1 a_2 \sin s \cdot \sin 3t$$

$$9. K_1(s, t) = K(s, t)$$

$$K_2(s, t) = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin ns \cos nu \right) \\ \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mu \cos mt \right) du$$

$$\text{由条件 } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \sin ns \cdot \cos mt \cdot \int_0^{2\pi} \cos nu \cdot \sin mu du \\ = 0$$

$$K_3(s, t) = K_4(s, t) = \dots = 0$$

$$\therefore x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \int_0^{2\pi} K(s, t) \tilde{y}(t) dt.]$$

10. (1)式成为

$$x(s) - \mu s \int_0^1 (1+t)x(t) dt = \tilde{y}(s)$$

$$\text{令 } \int_0^1 (1+t)x(t) dt = c \text{ (未知常数)}$$

$$\text{则 } x(t) - \mu tc = \tilde{y}(t)$$

$$(1+t)x(t) = \mu ct(1+t) + \tilde{y}(t)(1+t)$$

$$\int_0^1 (1+t)x(t) dt = \mu c \int_0^1 t(1+t) dt \\ + \int_0^1 (1+t) \tilde{y}(t) dt$$

$$c\left(1 - \frac{5}{6}\mu\right) = \int_0^1 (1+t) \tilde{y}(t) dt$$

因此 $\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{5}{6}$ 为特征值

当 $\mu = \frac{6}{5}$ 代入对应齐次方程

$$x(s) - \frac{6}{5}s \int_0^1 (1+t)x(t) dt = 0$$

$$\text{令 } \int_0^1 (1+t)x(t) dt = k$$

得 $x(s) = ks$ (k 为任意)

若 $\mu \neq 6/5$, 方程有唯一解为:

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \frac{\mu s}{\left(1 - \frac{5}{6}\mu\right)} \cdot \int_0^1 (1+t) \tilde{y}(t) dt$$

11. 与习题10方法类似, 得

特征值 $\lambda = 1/\mu = e^2 - 1$; 特征函数 e^x .

12. 原式为

$$x(s) - \mu \sin s \int_0^{2\pi} \cos t \cdot x'(t) dt = \tilde{y}(s)$$

$$\text{令 } \int_0^{2\pi} \cos t x(t) dt = c$$

$$x(s) - \mu \sin s \cdot c = \tilde{y}(s)$$

乘以 $\cos s$, 在 $[0, 2\pi]$ 上积分得

$$\int_0^{2\pi} x(s) \cos s ds - \mu c \int_0^{2\pi} \sin s \cdot \cos s ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos s \cdot \tilde{y}(s) ds$$

得
$$c = \int_0^{2\pi} \cos s \cdot \tilde{y}(s) ds$$

故解为:

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \sin s \int_0^{2\pi} \cos t \tilde{y}(t) dt.$$

13. 例1: x_n 定义在 $[0, 1]$ 上且 $x_n(t) = t^n$

例2: x_n 定义在 $[-1, 1]$ 上且 $x_n(t) = |t|^{1/n}$

上述实例均不含一致收敛的子序列, 因为其极限函数为不连续

14. (1) 式变为

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(s) b_j(t) \cdot x(t) dt$$

$$= \tilde{y}(s) + \mu \sum_{j=1}^n c_j a_j(s)$$

$$c_j = \int_a^b b_j(t) x(t) dt$$

$$= \int_a^b \tilde{y}(t) \cdot b_j(t) dt + \mu \sum_{k=1}^n \int_a^b c_k a_k(t) b_j(t) dt$$

$$\diamond a_{j,k} = \int_a^b b_j(t) a_k(t) dt$$

$$c_j - \mu \sum_{k=1}^n a_{j,k} c_k = \int_a^b \tilde{y}(t) b_j(t) dt = y_j.$$

15. (a) $K(s, t) = \sum_{j=1}^n a_j(s) \cdot b_j(t) = s + t$

$$a_1(s) = s; \quad a_2(s) = 1; \quad b_1(t) = 1; \quad b_2(t) = t$$

$$y_1 = \int_0^1 \tilde{y}(t) dt; \quad y_2 = \int_0^1 t \tilde{y}(t) dt$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}; \quad a_{21} = \frac{1}{3}; \quad a_{12} = 1; \quad a_{22} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} c_1 - \mu \left(\frac{c_1}{2} + c_2 \right) = y_1 \\ c_2 - \mu \left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2} \right) = y_2 \end{cases}$$

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \int_0^1 \frac{6(\mu-2)(s+t) - 12\mu st - 4\mu}{\mu^2 + 12\mu - 12} \tilde{y}(t) dt$$

(b) 特征值:

$$\mu_1 = -6 + 4\sqrt{3}; \quad \mu_2 = -6 - 4\sqrt{3};$$

$$\lambda_1 = 1/\mu_1; \quad \lambda_2 = 1/\mu_2$$

特征函数:

$$x_1(s) = \frac{2\mu_1}{2-\mu_1} s + 1; \quad x_2(s) = \frac{2\mu_2}{2-\mu_2} s + 1$$

108864

参 考 书 目

- (1) E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications, Wiley, New York 1978
- (2) W. Rudin, Functional Analysis, (1973)
- (3) J. Tinsley Oden, Applied Functional Analysis, (1979)
- (4) Ruth F. Curtain and A. J. P.ritchard, Functional Analysis in Modern Applied Mathematics (1977)
- (5) 夏道行等 实变函数论与泛函分析, 人民教育出版社, 1979
- (6) 定光桂, 巴拿赫空间引论, 科学出版社 1984.
- (7) 郑维行, 王声望, 实变函数与泛函分析概要, 人民教育出版社. 1980
- (8) 关肇直等, 线性泛函分析入门, 上海科技出版社. 1979

[General Information]

□□ = □□□□□□□□

□□ = □□□ □□□

□□ = 5 4 4

SS□ = 1 0 0 9 7 9 4 0

□□□□ = 1 9 8 8 □ 0 9 □ □ 1 □

□ □ □
□ □ □
□ □ □
□ □ □
□ □ □
□ □
□ □ □

- □ □ □
1. 1 □ □ □ □
1. 2 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
1. 3 □ □ □ □ □ □ □
1. 4 □ □ □ □ □ (C a u c h y) □ □ □ □ □ □
1. 5 □ □ (□ □ □ □ □ □)
1. 6 □ □ □ □ □ □ □ □

- □ □ □ □ □ □ □ □ (B a n a c h) □ □
2. 1 □ □ □ □
2. 2 □ □ □ □ □ B a n a c h □ □
2. 3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
2. 4 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
2. 5 □ □ □ □ □ □ □
2. 6 □ □ □ □
2. 7 □ □ □ □ □ □
2. 8 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

- □ □ □ □ □ □ □ □ □ (H i l b e r t) □ □
3. 1 □ □ □ □ □ H i l b e r t □ □
3. 2 □ □ □ □ □ □ □
3. 3 □ □ □ □ □ □ □ □ □
3. 4 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
3. 5 H i l b e r t □ □ □ □ □ □ □ □ □
3. 6 H i l b e r t □ □ □ □
3. 7 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

- □ □ □ □ B a n a c h □ □ □ □ □ □ □ □
4. 1 Z o r n □ □
4. 2 □ □ - □ □ □ (H a h n - B a n a c h) □ □
4. 3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ H a h n - B a n a c h □ □
4. 4 □ □ □ □
4. 5 □ □ □ □
4. 6 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
4. 7 □ □ □ □ □ □ □ □
4. 8 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
4. 9 □ □ □ □ □ □ □ □ □
4. 10 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
4. 11 □ □ □ □ □ □
4. 12 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

- □ □ B a n a c h □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
5. 1 B a n a c h □ □ □ □ □ □
5. 2 B a n a c h □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
5. 3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

5 . 4

5. 5 H i l b e r t □ □ □ □ □ □

5 . 6

6 . 1 □ □ □ □ □ □ □ □ □

6. 2

6 . 3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

6 . 4 □ □ □ □ □ □ □ □ □

6.5 Banach $\square \square$

6. 6 B a n c h

7 . 1 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

7 . 2 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

7 . 3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

7 . 4 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

7 . 5 □ □ □ □ □ □ □ □ □

7.6 Fredholm

7.7 Fredholm□□□

11

I □ □ □ □ □ □ □ □

|| || || || ||

□ □ □ □